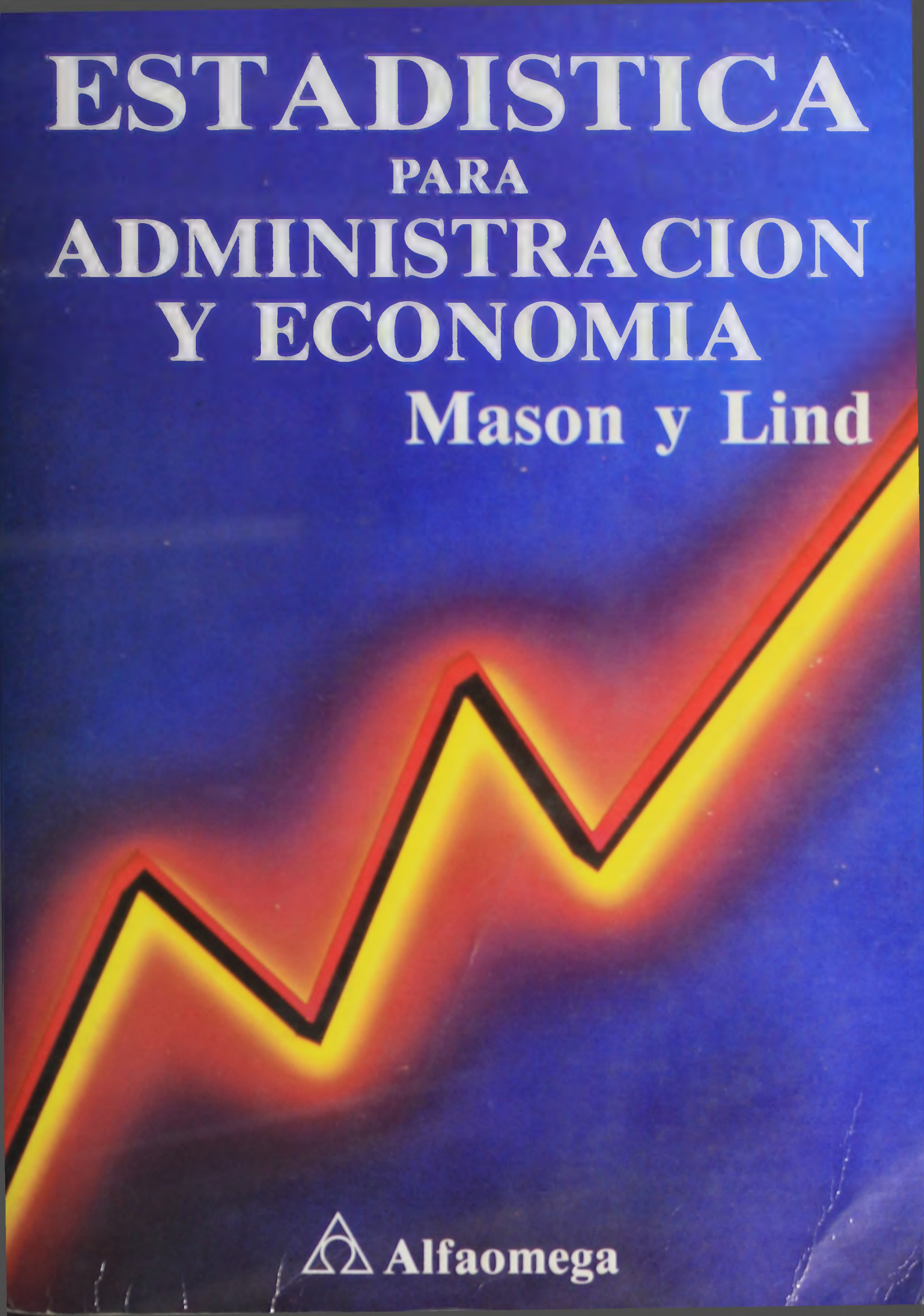
ESTADISTICA PARA ADMINISTRACION Y ECONOMIA

Mason y Lind



Alfaomega

ESTADISTICA
para
Administración y Economía

Robert D. Mason
Douglas A. Lind
ambos de
The University of Toledo, Ohio, U.S.A.

Alfaomega

Este libro fue producido mediante el proceso de *Autoedición* (DeskTop Publishing) por el equipo de **Macrodiseño Editorial, S.A. de C.V.**, Lucerna 84-1, 06600 México, D.F., Tel. 546 2411. Para ello se utilizó la Versión 2 del programa Ventura™ Publisher.

Diseño y Formación
Miguel Angel Ferreyra Cortés

Colaboración
Saúl Casas Zárate

Producción
Guillermo González Dorantes

ESTADISTICA

para

Administración y Economía

Robert D. Mason
Douglas A. Lind
ambos de
The University of Toledo, Ohio, U.S.A.

Alfaomega

Versión en español:
María de Lourdes Fournier G.
Actuaria, Universidad Nacional Autónoma de México

Revisión técnica y general:
Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México
Consultor editorial de Estadística y Administración
Miembro de la U.S. Metric Association (USMA)

Con la colaboración de:
Ma. Dolores García Díaz
ETT/Edición y Traducción Técnica
Traductora especializada en ciencias

Al cuidado de la edición:
Enrique García Carmona
Jefe de ediciones

Revisión y corrección:
Leticia Castañeda Molinar
Martha Elena Figueroa
Fco. Javier Rodríguez

Versión en español de la obra: *Statistical Techniques in Business and Economics*, 7th. ed., por Robert D. Mason y Douglas A. Lind, publicada originalmente por © 1990 Richard D. Irwin, Inc.

© 1992 Ediciones Alfaomega, S. A. de C. V.
Apartado postal, 7-1032. 06700 México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial,
Registro No. 663

Derechos reservados.
Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio, sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

ISBN 968-6223-71-1
ISBN 0-256-07696-0, versión original de Richard D. Irwin, Inc.

Impreso en México - Printed in Mexico

A Anita y Jane

El compañero Douglas A. Lind, que ha escrito otros libros sobre Estadística, ahora es coautor de este texto. Sus contribuciones a esta edición son impresionantes. Bienvenido Doug.

Robert D. Mason

Prefacio

Esta edición de *Estadística para Administración y Economía,* tiene la finalidad de proporcionar una buena introducción al campo de la Estadística. El libro incluye todos los temas que se imparten en un curso inicial y algunos otros, que no se analizan en otros textos, como *Control Estadístico de la Calidad y Muestreo de Aceptación.* Se incluyen debido a su importancia actual en las empresas. El texto está orientado a las aplicaciones y, sobre todo, se escribió para personas no especializadas en matemáticas.

AUXILIARES EN EL APRENDIZAJE

Estamos totalmente comprometidos a ayudar a los estudiantes para que se acerquen sin angustia a la Estadística. Esta orientación de la enseñanza-aprendizaje ha dado como resultado una gran cantidad de auxiliares efectivos para el aprendizaje. En cada capítulo se presentan *Problemas de Autoexamen,* diseñados para dar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con problemas semejantes a los ejemplos. Sirven para reforzar la comprensión del material precedente. Al final de cada capítulo se proporcionan las respuestas y métodos de solución.

En el *Examen del capítulo* se abarca todo el material del mismo. Estas preguntas permiten a los estudiantes evaluar su comprensión general del tema tratado. Las respuestas y métodos de solución también se dan al final del capítulo.

Después del análisis de cada concepto hay al menos un *Ejemplo* y su *Solución.*

Al final de cada capítulo se incluye un breve *Resumen* y una *Recapitulación.* Los estudiantes pueden utilizarlos para unificar las ideas principales del capítulo.

Cada capítulo contiene muchos *Ejercicios* con datos reales, relacionados con éste. Al final de cada sección se encuentran los ejercicios referentes a sus capítulos. El instructor puede asignarlos conforme a su criterio. Las respuestas a los ejercicios con número impar se encuentran al final del libro.

Las *definiciones* y *fórmulas* se destacan en recuadros.

Al principio de cada capítulo hay un conjunto de *Objetivos.* En ellos se indica lo que el estudiante será capaz de hacer al concluir el capítulo.

Después de cada grupo principal de capítulos se encuentra una Sección de *Repaso de los capítulos,* para proporcionar una comprensión general de los capítulos que abarca.

ALGUNAS CARACTERISTICAS

- En el Capítulo 2 se estudian los conceptos de "tallo y hoja".
- En el Capítulo 6 se estudia la media y la variancia de una distribución probabilística.
- En el Capítulo 7, se estudia la Distribución probabilística normal y el Factor de corrección por continuidad.
- En el Capítulo 8, dedicado a Métodos y distribuciones de muestreo, también se estudia el Factor de corrección por población finita.
- En el Capítulo 12, Análisis de variancia, se estudia el procedimiento ANOVA en dos sentidos y una prueba para determinar si dos variancias muestrales provienen de la misma población.
- En el Capítulo 14, sobre Análisis de regresión simple, se estudia la relación entre el coeficiente de determinación, el coeficiente de correlación y el error estándar de estimación.
- El Capítulo 17, sobre Métodos no paramétricos, incluye la prueba del signo para muestras pequeñas y grandes y la prueba para hipótesis con respecto a una mediana.
- El Capítulo 21, sobre Control estadístico de calidad, contiene lo referente al muestreo de aceptación.

OTRAS CARACTERISTICAS

Para mostrar las aplicaciones de las computadoras en la solución de problemas y en el análisis de datos, se incluyen más de 50 listados de computadora, la mayoría usando MINITAB*.

En la determinación de índices estacionales característicos del Capítulo 19, Análisis de series de tiempo, se usó el paquete *Computerized Business Statistics* desarrollado por Hall y Aldeman*.

En la mayoría de los capítulos existe, al final, una sección denominada Aplicación de los conceptos. Por lo general, contiene problemas más difíciles con un mayor conjunto de datos y, según lo determine el profesor, será necesario usar un paquete de computadora.

Al final del contenido aparece una lista de los principales símbolos estadísticos, su significado y la página donde se presentan por primera vez.

---

* Estos productos se mencionan sólo como referencia, la distribución está a cargo de sus propios fabricantes o distribuidores.

COMPLEMENTOS

Cada capítulo incluye objetivos, introducción, análisis de los conceptos y términos importantes, glosario, problemas para el capítulo y sus soluciones, que el profesor puede asignar según lo considere conveniente.

Robert D. Mason
Douglas A. Lind

RECONOCIMIENTOS

La presente obra se debe al esfuerzo de muchas personas: estudiantes, compañeros de trabajo, revisores y al personal de Richard D. Irwin, Inc. Estamos en deuda con todos ellos. También deseamos expresar nuestra gratitud a:

John C. Shannon	Suffolk University, Massachusetts
Edward Y. George	University of Texas–El Paso
Lamar Reinsch	Abiline Christian University
Carolyn Elkin	Miami–Dade Community College
Marlene Smith	Wayne State University
Bette Thorne	Stetson University
Robert Fetter	Yale University, Editor Asesor

Sus cuidadosas revisiones mejoraron este texto.

También queremos agradecer a los profesores de las universidades locales que nos dieron sus opiniones en la encuesta que realizó Irwin hace dos años. Ellos son:

Charles Knapp	Waulousse College
Gary Smith	Westwark Community College
Clark E. Williams	King River Community College
Tom Trollen	Scottsdale, Arizona
Selwyn James	Centennial College
Gordon Heath	Rochester Community College
John P. Connelly	Coming Community College
Cal Butler	College of Southern Idaho

Un agradecimiento especial a Daniel J. Telatko, estudiante de posgrado, quien resolvió todos los ejercicios y verificó las soluciones a los ejemplos del manuscrito. Don Temple de la California State University, Fresno y Pat Buchanon de la Pennsylvania State University quienes también hicieron revisiones cuidadosas y detalladas de ejemplos, ejercicios y de las figuras en las pruebas del libro. Gracias también a Ms. Wendy A. Fraker del departamento de Servicios de Cómputo de The University of Toledo y a Michael A. Lind por habernos ayudado con la solución de problemas con computadora.

Estamos en deuda con el Literary Executor del finado Sir Ronald A. Fisher, F.R.S. Cambridge; al Dr. Frank Yates, F.R.S. Rothamsted; y a Messrs. Oliver and Boyd, Ltd., por permitimos reproducir las tablas III y IV de su libro *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (6a. edición, 1974).

R.D.M.
D.A.L.

Contenido

CAPITULO UNO

¿Qué es la Estadística? 3

Objetivos 3
¿Quién utiliza la Estadística? 6
Divisiones de la estadística 8
Estadística descriptiva 8
Estadística inferencial 9
Niveles de medición 12
Nivel nominal 12
Nivel ordinal 13
Nivel de intervalo 14
Nivel de razón 15
Algunas ayudas para el aprendizaje 15
Aplicaciones para computadora 16
Resumen 17
Ejercicios 18
Examen capítulo 1 18

CAPITULO DOS

Resumen de datos: distribuciones de frecuencias y representaciones gráficas 23

Objetivos 23
Elaboración de una distribución de frecuencias 24
Pasos para elaborar una distribución de frecuencias 26
Límites de clase declarados y verdaderos 28
Puntos medios 29
Intervalo de clase 29
Sugerencias para elaborar una distribución de frecuencias 30
Distribución de frecuencias relativas 32
Ejercicios 33
Representaciones de tallo y hoja 35
Ejercicios 39
Representación gráfica de una distribución de frecuencias 40
Histograma 40
Polígono de frecuencias 42
Ejercicios 45
Polígonos de frecuencias acumuladas 46
Polígono de frecuencias acumuladas menor que 47
Polígono de frecuencias acumuladas mayor que 48
Ejercicios 50
Representación gráfica de los datos 51
Gráficas simples de líneas y de barras 52
Gráfica de barras seccionadas 55
Gráficas de barras bidireccionales 57
Gráficas de sectores (o circulares) 58
Ejercicios 61
Resumen 62
Ejercicios 64
Aplicación de los conceptos 65
Examen capítulo 2 67

CAPITULO TRES

Descripción de los datos: medidas de tendencia central 75

Objetivos 75
¿Qué es un promedio? 76
Media de una muestra 76
Media de una población 78
Propiedades de la media aritmética 79
Ejercicios 80
Media ponderada 81
Ejercicios 82
Mediana 83
Propiedades de la mediana 86
Moda 86
Ejemplo para computadora 88
Ejercicios 88
Media geométrica 89
Ejercicios 92
Media, mediana y moda de datos agrupados 93
Media aritmética 93
La mediana 95
Moda 98
Ejercicios 100
Selección de un promedio para datos de una distribución de frecuencias 101
Ejercicios 104
Resumen 105
Ejercicios 107
Aplicación de los conceptos 111
Examen capítulo 3 112

CAPITULO CUATRO

Medidas de dispersión y asimetría 119

Objetivos 119
¿Por qué estudiar la dispersión? 120
Medidas de dispersión: Datos no agrupados 121
Amplitud total 121
Desviación media 123
Ejercicios 124
Variancia y desviación estándar 126
Ejercicios 128
Ejercicios 132
Medidas de dispersión para datos agrupados en una distribución de frecuencias 132
Amplitud total 132
Desviación estándar 133
Ejercicios 135
Interpretación y usos de la desviación estándar 136
Teorema de Chebyshev 136
Regla empírica 137
Ejercicios 139
Otras medidas de dispersión 140
Amplitud cuartílica 140
Desviación cuartílica 143
Aproximación para evaluar los cuartiles 143
Amplitud centílica 144
Ejercicios 145
Dispersión relativa 146
Ejercicios 149
Medidas de asimetría (o sesgo) 149
Ejercicios 151
Aplicación para computadora 151
Curtosis 152
Resumen 153
Ejercicios 155
Aplicación de los conceptos 158
Examen capítulo 4 158
Sección de repaso I 165
Repaso de los capítulos 1 - 4 165
Glosario 165
Ejercicios suplementarios 168
Aplicación de los conceptos 171

CAPITULO CINCO

Estudio de conceptos probabilísticos 173

Objetivos 173
¿Qué es una probabilidad? 175
¿Por qué se estudia la probabilidad? 177
Caso 1 177
Caso 2 177
Enfoques de la probabilidad 178
Probabilidad clásica 178
Concepto de frecuencia relativa 180
Probabilidad subjetiva 181
Ejercicios 182
Algunas reglas básicas de probabilidad 183
Reglas de adición 183
Regla especial de adición 183
Ejercicios 186
Regla general de adición 187
Ejercicios 189
Reglas de multiplicación 189
Regla especial de multiplicación 189
Regla general de multiplicación 191
Diagramas de árbol 194
Ejercicios 196
Teorema de Bayes 198
Ejercicios 201
Algunos principios de conteo 202
Fórmula de la multiplicación 202
Fórmula de la permutación 204
Fórmula de la combinación 208
Resumen sobre la diferencia entre una permutación y una combinación 209
Ejercicios 209
Resumen 210
Ejercicios 211
Aplicación de los conceptos 216
Examen capítulo 5 217

CAPITULO SEIS

Distribuciones probabilísticas discretas 223

Objetivos 223
¿Qué es una distribución probabilística? 224
Variables aleatorias 226
Variable aleatoria discreta 227
Variable aleatoria continua 227
Media y variancia de una distribución de probabilidad 228
Media 228
Variancia 228
Ejercicios 231
Distribución probabilística binomial 231
¿Cómo se elabora una distribución probabilística binomial? 233
Uso de tablas de probabilidad binomial 236
Ejercicios 241
Usos e importancia de la distribución probabilística binomial 242
Distribuciones probabilísticas acumulativas 244
Ejercicios 246
Distribución hipergeométrica 247
Ejercicios 250
Distribución probabilística de Poisson 251
Ejercicios 254
Resumen 255
Ejercicios 256
Aplicación de los conceptos 260
Examen capítulo 6 260

CAPITULO SIETE

Distribución probabilística normal 267

Objetivos 267
Características de una distribución probabilística normal 268
Familia de distribuciones probabilísticas normales 269
Areas bajo la curva normal 271
Ejercicios 273
Distribución probabilística normal estándar 273
Aplicaciones de la distribución normal estándar 275
Ejercicios 277
Ejercicios 283
Aproximación normal a la binomial 283
Factor de corrección por continuidad 284
Ejercicios 287
Resumen 288
Ejercicios 289
Aplicación de los conceptos 292
Examen capítulo 7 293
Sección de repaso II 297
Repaso de los capítulos 5-7 297
Glosario 299
Ejercicios suplementarios 302
Aplicación de los conceptos 303

CAPITULO OCHO

Métodos y distribuciones de muestreo 305

Objetivos 305
¿Por qué muestrear la población? 307
¿Qué es una muestra probabilística? 309
Métodos de muestreo probabilístico 309
Muestreo aleatorio simple 309
Muestreo aleatorio sistemático 313
Ejercicios 314
Muestreo aleatorio estratificado 315
Ejercicios 316
Muestreo por conglomerados 316
Error de muestreo 317
Distribución muestral de medias 318
Ejercicios 322
Teorema de límite central 324
Simulación por computadora 324
Estimaciones puntuales y de intervalo 327
Estimación puntual 327
Estimación de intervalo 329
Error estándar de la media 331
Elaboración de los intervalos de confianza de 95% y de 99% 332
Ejercicios 333
Intervalo de confianza para una proporción de la población 334
Ejercicios 335
Factor de corrección para población finita 336
Ejercicios 338
Selección del tamaño de la muestra 338
Grado de confianza 339
Error máximo permisible 339
Variación en la población 341
Ejercicios 343
Tamaño de muestra para proporciones 343
Ejercicios 345
Resumen 345
Ejercicios 348
Aplicación de los conceptos 351
Examen capítulo 8 352

CAPITULO NUEVE

Pruebas de hipótesis: muestras grandes 357

Objetivos 357
¿Qué es una hipótesis? 358
¿Qué es una prueba de hipótesis? 359
Procedimiento de cinco pasos para probar una hipótesis 359
Pruebas de significación de una y de dos colas 365
Pruebas para la media de población: muestra grande, y se conoce la desviación estándar de la población 367
Prueba de dos colas 368
Prueba de una cola 371
Pruebas para la media poblacional: muestra grande, y se desconoce la desviación estándar de la población 372
Ejercicios 373
Prueba de hipótesis: dos medias poblacionales 374
Ejercicios 379
Errores tipo II, curvas características de operación y curvas de poder 380
Errores tipo II 380
Curvas características de operación 384
Curvas de poder 385
Resumen 385
Ejercicios 387
Aplicación de los conceptos 388
Examen capítulo 9 389

CAPITULO DIEZ

Pruebas de hipótesis: proporciones 393

Objetivos 393
Prueba para una proporción poblacional 394
Prueba de una cola 395
Prueba de dos colas 398
Ejercicios 399
Prueba donde interviene la diferencia entre dos proporciones poblacionales 400
Prueba de dos colas 401
Prueba de una cola 404
Ejercicios 405
Resumen 406
Ejercicios 408
Aplicación de los conceptos 409
Examen capítulo 10 409
Sección de repaso III 412
Repaso de los capítulos 8-10 412
Glosario 413
Ejercicios suplementarios 414

CAPITULO ONCE

Prueba *t* de Student: muestras pequeñas 419

Objetivos 419
Características de la distribución *t* de Student 420
Prueba para la media poblacional 422
Ejercicios 425
Resultados por computadora 428
Ejercicios 428
Resultados por computadora 432

Ejercicios 433
Prueba de hipótesis para observaciones por pares 434
Ejercicios 437
Resumen 439
Ejercicios 441
Aplicación de los conceptos 442
Examen capítulo 11 443

CAPITULO DOCE

Análisis de variancia 449

Objetivos 449
Distribución *F* 450
Comparación de dos variancias poblacionales 451
Consideraciones de validación 451
Ejercicios 454
ANOVA: noción general 454
Consideraciones en que se basa la prueba ANOVA 456
Procedimiento de análisis de variancia 456
Ejercicios 462
Inferencias acerca de las medias de tratamiento 466
Ejercicios 469
ANOVA en dos sentidos 470
Ejercicios 474
Resumen 475
Ejercicios 476
Aplicación de los conceptos 479
Examen capítulo 12 481
Sección de repaso IV 485
Repaso de los capítulos 11 y 12 485
Glosario 486
Ejercicios 487

CAPITULO TRECE

Análisis de correlación simple 493

Objetivos 493
¿Qué es un análisis de correlación simple? 494
Diagrama de dispersión 495
Coeficiente de correlación 497
Cálculo del coeficiente de correlación 498
Ejercicios 500
Coeficiente de determinación 502
Coeficiente de no determinación 502
Ejercicios 503
Prueba de la significación del coeficiente de correlación 503
Muestras pequeñas 504
Muestras grandes 505
Una aplicación empleando el sistema MINITAB 505
Correlación de rango 507
Ejercicios 512
Prueba de la significación de r_s 514
Ejercicios 515
Una advertencia 517
Resumen 517
Ejercicios 519
Aplicación de los conceptos 523
Examen capítulo 13 525

CAPITULO CATORCE

Análisis de regresión simple 529

Objetivos 529
Análisis de regresión 530
Ecuación de regresión 531
Principio de mínimos cuadrados 532
Trazo de la línea de regresión 535
Ejercicios 537

Error estándar de estimación 539
Consideraciones de base para la regresión lineal 542
Ejercicios 544
Estimación de intervalos de confianza 544
¿A qué conclusión llegó el Director de Personal? 547
Algo más acerca del coeficiente de determinación 548
Ejercicios 552
Relación entre coeficiente de correlación, coeficiente de determinación y error estándar de estimación 552
Resumen 555
Ejercicios 556
Aplicación de los conceptos 559
Examen capítulo 14 560

CAPITULO QUINCE

Regresión y correlación múltiples 563

Objetivos 563
Análisis de regresión múltiple 564
Ejercicios 567
Error estándar múltiple de la estimación 569
Consideraciones acerca de la regresión y la correlación múltiples 571
Análisis de correlación múltiple 572
Coeficiente de correlación múltiple 572
Coeficiente de determinación múltiple 572
Coeficiente de no determinación múltiple 573
Tabla ANOVA 573
Aplicación por computadora 575
Matriz de correlación 577
Prueba global: determinación de la validez o no validez del modelo de regresión múltiple 577
Evaluación de los coeficientes individuales de regresión 580
Variables cualitativas en la regresión 582
Regresión por pasos 584
Análisis de residuos 586
Resumen 590
Ejercicios 592
Examen capítulo 15 602
Sección de repaso V 606
Repaso de los capítulos 13-15 606
Glosario 607
Ejercicios 609

CAPITULO DIECISEIS

Análisis de datos de nivel nominal: distribución ji cuadrada 611

Objetivos 611
Prueba de bondad de ajuste de ji cuadrada: frecuencias esperadas iguales 612
Características de la distribución ji cuadrada 617
Prueba de bondad de ajuste: frecuencias esperadas desiguales 618
Limitaciones de la ji cuadrada 622
Ejercicios 624
Análisis de tablas de contingencia 625
Ejercicios 630
Resumen 631
Ejercicios 632
Aplicación de los conceptos 633
Examen capítulo 16 635

CAPITULO DIECISIETE

Métodos no paramétricos: análisis de datos ordenados por rango 639

Objetivos 639
Prueba de signo 640
Muestras pequeñas 641
Ejercicios 645
Muestras grandes 647
Ejercicios 649
Prueba de una hipótesis con respecto a una mediana 649
Ejercicios 650
Prueba *U* de Mann-Whitney 651
Muestras pequeñas 651
Ejercicios 655
Muestras grandes 656
¿Es posible aplicar pruebas que necesitan medición ordinal a datos de nivel más elevado? 657
Prueba de Kruskal-Wallis: análisis de variancia por rangos 658
Ejercicios 665
Prueba de Wilcoxon de rangos con signo de pares ajustados para diferencias 666
Ejercicios 670
Resumen 672
Ejercicios 674
Examen capítulo 17 676
Aplicación de los conceptos 678
Sección de repaso VI 684
Repaso de los capítulos 16 y 17 684
Glosario 684
Ejercicios 685

CAPITULO DIECIOCHO

Números de índice 687

Objetivos 687
Significado de los números índice 688
¿Por qué convertir datos a índices? 690
Tipos de números índice 691
Indices de precios 691
Indices de cantidad 691
Indices de valores 691
Indices especiales 692
Elaboración de los números índice 692
Indices no ponderados 692
Indices ponderados 694
Indice de precios de Laspeyres 695
Ejercicios 696
Indice de cantidad de Laspeyres 698
Indice de precios de Paasche 699
Indice de valor 700
Ejercicios 702
Indices especiales 703
Indice de precios al consumidor 705
Usos especiales del índice de precios al consumidor 706
Deflación de las ventas 707
Poder adquisitivo del dinero 708
Ajustes del costo de la vida 710
Corrimiento de la base 710
Resumen 712
Ejercicios 714
Examen capítulo 18 717

CAPITULO DIECINUEVE

Análisis de series de tiempo 723

Objetivos 723
Componentes de una serie de tiempo 724
Tendencia secular 724
Variación cíclica 726

Variación estacional 726
Variación irregular 727
Tendencia lineal 727
Método de mínimos cuadrados 729
Método codificado 729
Trazo de la recta 732
Ejercicios 734
Método del promedio móvil 736
Tendencias no lineales 741
Ejercicios 744
Variación estacional 745
Métodos para determinar índices estacionales 746
Método que utiliza promedios 746
Método de razón a promedio móvil 748
Solución por computadora 752
Ejercicios 753
Ajuste de los datos de ventas estacionales 754
Resumen 755
Ejercicios 757
Aplicación de los conceptos 761
Examen capítulo 19 762

CAPITULO VEINTE

Introducción a la toma de decisiones bajo incertidumbre 769

Objetivos 769
Elementos de una decisión 771
Un caso acerca de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre 772
Tabla de ganancias 772
Ganancias esperadas 772
Ejercicios 774
Pérdida de oportunidad 775
Ejercicios 776
Pérdida esperada de oportunidad 776
Ejercicios 778
Estrategias de deploración Maximín, Maximáx y Minimáx 778
Valor de la información perfecta 779
Análisis de sensibilidad 780
Ejercicios 782
Arboles de decisión 782
Resumen 784
Ejercicios 785
Aplicación de los conceptos 789
Examen capítulo 20 789

CAPITULO VEINTIUNO

Control estadístico de calidad 795

Objetivos 795
Diagrama de control 796
Causas de variación 798
Objetivo y tipos de los diagramas de control de calidad 801
Diagramas para variables 802
Diagrama de medias 804
Algunas situaciones controladas y fuera de control 809
Ejercicios 811
Diagramas de atributos 811
Ejercicios 818
Muestreo de aceptación 818
Ejercicios 823
Resumen 823
Ejercicios 825
Examen capítulo 21 827

APENDICES

Tablas 833

Apéndice A Distribución probabilística binomial 835
Apéndice B Distribuciones probabilísticas binomiales acumulativas 845
Apéndice C Distribución de Poisson: probabilidad de exactamente x ocurrencias 854
Apéndice D Areas bajo la curva normal 856
Apéndice E Tabla de números aleatorios 857
Apéndice F Distribución *t* de Student 858
Apéndice G Valores críticos de la distribución *F* al nivel de significación de $\alpha = 0.05$ 859
Apéndice H Valores críticos de rho, coeficiente de correlación de rangos de Spearman 861
Apéndice I Valores críticos de ji cuadrada 862
Apéndice J Valores críticos de *U* en la prueba de Mann-Whitney 863
Apéndice K Valores *T* de Wilcoxon 864
Apéndice L Factores para diagramas de control 865

RESPUESTAS

Ejercicios impares de los capítulos 867

Capítulo 1 ¿Qué es la Estadística? 867
Capítulo 2 Condensación de los datos: distribuciones de frecuencias y presentaciones gráficas 867
Capítulo 3 Descripción de los datos: medidas de tendencia central 871
Capítulo 4 Medidas de dispersión y sesgo 872
Capítulo 5 Revisión de conceptos probabilísticos 874
Capítulo 6 Distribuciones probabilísticas discretas 875
Capítulo 7 Distribución probabilística normal 877
Capítulo 8 Métodos y distribuciones de muestreo 879
Capítulo 9 Pruebas de hipótesis: muestras grandes 880
Capítulo 10 Pruebas de hipótesis: proporciones 881
Capítulo 11 Prueba *t* de Student: muestras pequeñas 882
Capítulo 12 Análisis de variancia 883
Capítulo 13 Análisis de correlación simple 885
Capítulo 14 Análisis de regresión simple 887
Capítulo 15 Regresión y correlación múltiples 888
Capítulo 16 Análisis de datos a nivel nominal: distribución ji cuadrada 890
Capítulo 17 Métodos no paramétricos: análisis de datos por rango 890
Capítulo 18 Números índice 892
Capítulo 19 Análisis de series de tiempo 893

Capítulo 20 Introducción a la toma de decisiones bajo incertidumbre 897

Capítulo 21 Control estadístico de calidad 898

RESPUESTAS

Ejercicios impares de repaso de los capítulos 901

Repaso de los capítulos 1 - 4 901
Repaso de los capítulos 5 - 7 901
Repaso de los capítulos 8 - 10 902
Repaso de los capítulos 11 - 12 902
Repaso de los capítulos 13 - 15 903
Repaso de los capítulos 16 - 17 903

Indice 905

TABLA

Simbología

Símbolo	Pág.	Significado
A_2	804	Factor de los límites sup. e inf. basado en la amplitud R
a	533	Intercepción Y
ANOVA	450	Análisis de variancia
b	533	Pendiente de la recta
$\bar{c}$	815	Número de defectos por unidad
C.A.	150	Coeficiente de asimetría
C.V.	147	Coeficiente de variación
D_4	807	Factor de límites de control de amplitud total
D.M.	123	Desviación media
D.Q.	143	Desviación cuartílica
EMV	773	Valor monetario esperado
EOL	777	Pérdida esperada de oportunidad
EVPI	779	Valor esperado de la información perfecta
F	457	Distribución F
f_e	613	Frecuencia esperada en una categoría específica
f_o	613	Frecuencia observada en una categoría específica
H	659	Prueba de Kruskal-Wallis
IPC	705	Indice de precios al consumidor
k	565	Número de variables independientes
M.G.	89	Media geométrica
MSB	471	Cuadrado medio según bloques
MSE	459	Cuadrado medio debido al error
MSTR	459	Cuadrado medio entre tratamientos
μ	78	Media poblacional
n	77	Número total de valores en la muestra
N	78	Número total de observaciones en la población
${}_nC_r$	208	Combinación de n número de objetos tomados r cada vez
${}_nP_r$	204	Permutación de n número de objetos tomados r cada vez
P	692	Indice simple de precios

TABLA

Simbología

Símbolo	Pág.	Significado
P(A)	180	Probabilidad de que suceda un evento
P(A|B)	191	Probabilidad de que ocurra un evento después de otro
p	396	Proporción poblacional
$\bar{p}$	328	Proporción muestral
$\bar{p}_c$	402	Estimador combinado de la proporción poblacional
Q	698	Indice ponderado de cantidad
Q_1	140	Primer cuartil
Q_3	140	Tercer cuartil
r	498	Coeficiente de correlación
ρ	507	Coeficiente de correlación de población
r^2	502	Coeficiente de determinación
r_s	507	Coeficiente de rango de Spearman
s	131	Desviación estándar muestral
s_2	129	Variancia muestral
s_d	435	Desviación estándar de las diferencias entre observaciones por pares
σ	128	Desviación estándar poblacional
σ^2	126	Variancia de una población
σ_p	337	Error estándar de la proporción
$\sigma_{\bar{x}}$	331	Error estándar de la media
SSE	460	Error de suma de cuadrados
SSR	553	Suma de los cuadrados de regresión
SST	459	Tratamiento de suma de cuadrados
Total SS	460	Variación total
$s_{y \cdot x}$	539	Error estándar de estimación
t	420	Distribución t de Student
T_c^2	459	Elevar al cuadrado el total de cada columna
U	652	Prueba U de Mann-Whitney
V	700	Indice de valor
χ^2	613	Distribución ji cuadrada
$\bar{X}$	77	Media muestral
$\bar{X}_w$	81	Media ponderada
Y'	533	Valor pronosticado de Y'
z	274	Desvío normal estandarizado

1

¿Qué es la Estadística?

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Saber qué significa Estadística.
2. Citar algunas aplicaciones de la Estadística en administración y otras áreas.
3. Explicar lo que significan Estadística descriptiva y Estadística inferencial.
4. Distinguir entre los niveles de medición nominal, ordinal, de intervalo y de razón (o cociente).

Si uno ve el futbol por televisión por la noche, o escucha un juego de beisbol por la radio, o lee alguna de las revistas deportivas o de negocios más conocidos en su localidad, se verá sometido a (y algunas veces abrumado por) una gran cantidad de cifras a las que comúnmente se denomina estadística. Estas cifras pueden referirse a deportes, al mercado de valores, al desempleo, a la producción industrial o a la esperanza de vida. Por ejemplo:

- Del *The Wall Street Journal*: una asociación de floristas recibió 55 200 pedidos de flores el último Día del Padre, o sea, más que los 49 600 del año anterior. El número de personas que consideran las flores adecuadas como regalo para los hombres ha aumentado a 63% con respecto al 44% de 1982.
- Del *Changing Times*: 3% de los 239 000 empleados de IBM se mudan de casa anualmente. Hay más de 30 000 agencias de viaje en Estados Unidos y durante la década de 1990 habrá aproximadamente 40 000. El estadounidense promedio tiene una deuda no saldada de consumidor de $1 600 (dólares).*
- Tomado del mundo de los deportes: Kirk Gibson de los Dodgers de Los Angeles ganó el premio al Jugador Más Valioso de la Liga Nacional, al obtener 0.290 con 25 home runs; Erick Dickerson dominó en la Liga Americana con un promedio de 4.4 yardas por carrera; y la asociación de jugadores informó que jugadores de los Yankees tienen el sueldo promedio por equipo más elevado ($718 670 dólares), seguidos por los de los Tigres ($612 326), los Medias Rojas ($610 172) y los Mets ($605 895).
- Tomado de informes anuales y otras fuentes financieras: el diario *Times Mirror* tuvo un ingreso neto de $266 491 000 (dólares) el último año; el déficit comercial de Estados Unidos es de 9 890 millones de dólares; y de acuerdo con el Departamento de Agricultura, Iowa tiene la mayor cantidad de cerdos (13.8 millones), seguido por Illinois (5.3 millones).
- Algunas estadísticas: una revista tiene una oferta especial: puede obtenerse la publicación por 59 centavos (de dólar) por ejemplar, 77% menos del precio normal de $2.50. La esperanza de vida para mujeres blancas en 1850 era de 40.5 años; en la actualidad es de 78.7 años, de acuerdo con el Departamento de Salud y Servicios Humanos del gobierno de Estados Unidos. La Oficina del Censo de dicho país informó que en 1910 31.0% de la fuerza de trabajo se dedicaba a la agricultura; en la actualidad el porcentaje es de sólo 2.2%.

A un dato numérico o valor aislado se le denomina dato, o valor, **estadístico**. El precio al cierre de acciones comunes de una empresa (24 1/2) es un dato estadístico. Un promedio de calificaciones (4.0) también es un valor estadístico. Las ventas totales al menudeo en un cierto mes, 131 880 millones de dólares, es asimismo un dato estadístico. A un conjunto de datos numéricos se le denomina **estadística**. Por ejemplo, las cifras que se mencionaron antes (55 200 pedidos de flores para el Día del Padre; 30 000 agencias de viajes, 2.2% de la fuerza de trabajo

---

* (N. del R.) Todas las cantidades monetarias indicadas con $ corresponden a dólares de Estados Unidos.

dedicada a la agricultura, y 13.8 millones de cerdos), por lo general se designan como "estadísticas".

Sin embargo, el estudio de las estadísticas según se expondrá en este libro tiene un significado mucho más amplio que la simple recopilación y publicación de hechos y datos numéricos. El estudio general de las estadísticas se define como la ciencia estadística o Estadística.*

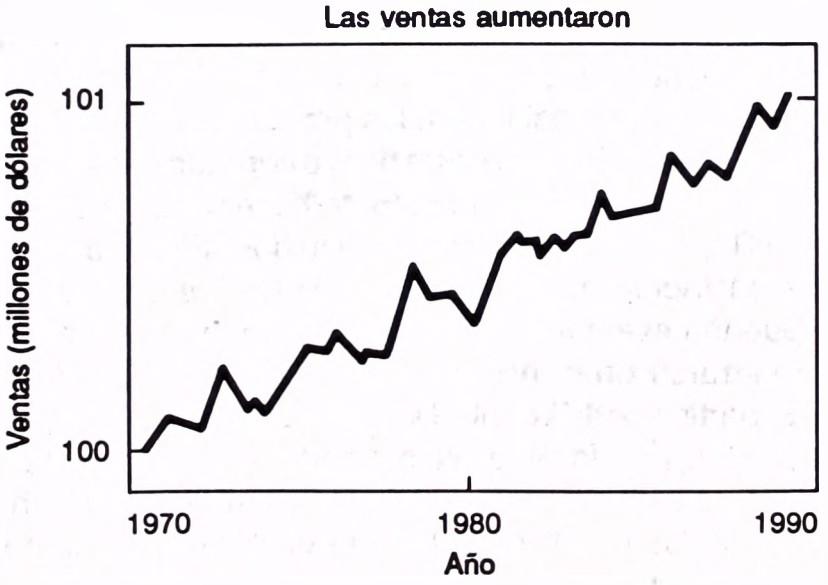
Estadística Ciencia que trata de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos numéricos (estadística) con el fin de realizar una toma de decisiones más efectiva.

Así como los abogados tienen "reglas de evidencia" y los contadores "prácticas de uso común", las personas que trabajan con datos numéricos siguen ciertos lineamientos estándares. En los capítulos que siguen se presentan algunas de las técnicas estadísticas básicas que se aplican en los problemas de decisión.

Muchas personas se enfrentan por primera vez con cierto temor a la aplicación de datos numéricos para resolver un problema. Esto se debe a que han escuchado con frecuencia frases como "las estadísticas mienten", y tal vez hayan mirado en las librerías un libro titulado *Cómo mentir con las estadísticas*. Las estadísticas "mienten" sólo si no se interpretan en forma correcta. Como ejemplo considérese que las ventas de "Productos de Precisión" durante los últimos 20 años se repre-

DIAGRAMA 1-1

Ventas de productos de precisión desde 1970



*(N. del R.) En esta versión se corrige y adapta la nomenclatura. En inglés se origina una confusión por la terminación igual de los términos *statistics*, plural de *statistic*, y *statistics*, la denominación de la ciencia. En español a ésta se le distingue en general, escribiendo su nombre con mayúscula inicial: Estadística.

sentan como se ve en el diagrama 1-1 de la página anterior. En primer lugar se podría llegar a la conclusión de que las ventas aumentaron con mucha rapidez desde 1970 (esta es la mentira).

Sin embargo, en un estudio más minucioso se observa que las ventas aumentaron aproximadamente 1%; de $100 millones a $101 millones (de dólares) (esta es la verdad). El que creó la gráfica, con intención o sin ella, aplicó una escala incorrecta al eje vertical (ventas), dando una impresión errónea con respecto a la tendencia de las ventas desde 1970. El capítulo 2 se dedica a la representación gráfica.

Los objetivos de este libro son muchos. Desde luego, uno de ellos es poner sobre aviso al lector acerca del posible uso incorrecto de gráficas, promedios, técnicas de correlación y regresión, y de otras técnicas estadísticas. Otro consiste en presentar al lector la utilidad de dichas técnicas en investigación de mercados, contabilidad, finanzas, comercio internacional, economía, aplicación de las leyes y otros campos. En forma específica, ¿quién utiliza la Estadística?

¿QUIEN UTILIZA LA ESTADISTICA?

Según se indicó, las técnicas estadísticas se aplican de manera amplia en mercadotecnia, contabilidad, control de calidad y en otras actividades; estudios de consumidores; análisis de resultados en deportes; administradores de instituciones; en la educación; organismos políticos; médicos; y por otras personas que intervienen en la toma de decisiones. Los ejemplos que siguen sugieren el amplio uso de la Estadística en los problemas de decisión.

1. Los analistas de investigación para empresas como Merrill Lynch evalúan muchos aspectos de una acción o valor antes de hacer una recomendación de "compra" o "venta". Recopilan los datos de venta anteriores de la empresa y estiman las ganancias futuras. Factores tales como la demanda proyectada a nivel mundial para los productos de la empresa, la fuerza de los competidores y el efecto de un nuevo contrato entre empresa y sindicato, también se toman en cuenta antes de hacer una recomendación.
2. El Partido Republicano (de Estados Unidos) desea determinar sus probabilidades de triunfo al menos cinco de los siete escaños en el Senado, ¿cómo pueden evaluarse las posibilidades de A. J. Farley en Oklahoma? Podría realizarse una encuesta de muestreo de posibles votantes en el estado. El partido podría contratar especialistas en encuestas, como Gallup o Harris; o bien, podría ser el mismo partido el que la realizara. Por ejemplo, la selección científica de 2 000 votantes registrados en Oklahoma y la evaluación de los resultados requiere un conocimiento de las técnicas de probabilidad y muestreo (que se presentan en los capítulos 5 a 8).
3. Los directivos deben tomar decisiones acerca de la calidad de la producción actual. Por ejemplo, las taladradoras automáticas no producen una perforación perfecta de 1.3000 pulgadas de diámetro cada vez que se efectúa un taladrado (debido al desgaste de la broca, vibración de la máquina y a

otros factores). Se permiten ciertas tolerancias, pero cuando la perforación es muy pequeña o demasiado grande, se considera que la producción es defectuosa (no utilizable). El departamento de control de calidad se encarga de vigilar la producción en forma continua, aplicando el muestreo y otras técnicas estadísticas comunes (que se describen en el capítulo 21).

4. Los consumidores que compran comestibles como carne de cerdo enlatada, con frecuencia utilizan los precios unitarios para decidir qué tamaño adquirir. ¿Será mejor comprar el tamaño de 21 onzas de carne que cuesta 69 c. (centavos de dólar), el tamaño de 31 onzas de 98 c. o el de 53 onzas de $1.55? Si el precio es lo único que se toma en consideración, el convertir cada precio al costo por onza dará la respuesta.
5. Los equipos profesionales de futbol computarizan los datos sobre los prospectos universitarios, para decidir a cuáles contratar. Por ejemplo, el registro de Clint Sawyer de Texas Tech podría incluir: 4.3 segundos en carreras de 40 yardas, peso de 230 libras y otros datos. ¿Los Vaqueros de Dallas deberán contratarlo a él o a Keith Dresser del estado de Idaho?
6. El director de un hospital debe tomar la decisión acerca de una propuesta para agregar una nueva sección al edificio a fin de mejorar las condiciones de admisión. Para determinar si en realidad es necesaria o no una nueva sección, el director debe recopilar y evaluar datos como tasas de ocupación de camas. Después deben reunir datos sobre costo de la construcción, fuentes de financiamiento e ingresos proyectados, para justificar la nueva edificación ante la junta directiva.
7. El contralor y el departamento de contabilidad de una empresa se encargan de la exactitud de los cálculos financieros. Ya que resulta físicamente imposible verificar cada documento y determinar su exactitud, se realiza un muestreo de las facturas y se toman decisiones con base en los resultados de las muestras (en el capítulo 8 se presentan técnicas de muestreo).
8. El departamento de mercadotecnia de una empresa fabricante de jabón está encargado de hacer recomendaciones acerca de la posible rentabilidad de un grupo de jabones faciales recientemente producidos que tienen aromas de frutas. En forma semejante, el departamento de mercadotecnia de una embotelladora de bebidas gaseosas de distribución nacional debe tomar una decisión similar en lo que se refiere a un grupo de bebidas de reciente elaboración que tienen sabores tan especiales como aguacate y ciruela. Ambos departamentos realizarán pruebas con consumidores y proyectarán las ganancias con base en resultados de las muestras.
9. El gobierno de un país está interesado especialmente en la condición actual de la economía y en la predicción de las tendencias económicas futuras. El gobierno realiza un gran número de encuestas para determinar la confianza de los consumidores y las perspectivas de los directores de empresas en lo que se refiere a ventas y producción para los próximos 12 meses. Cada mes se elaboran índices, como el índice de precios al consumidor Consumer Price Index (que se presenta en el capítulo 18), con

objeto de evaluar la tendencia inflacionaria. Las ventas en almacenes de departamentos, los inicios de construcciones habitacionales, el movimiento monetario, y las estadísticas de producción industrial son unos cuantos de los cientos de indicadores económicos que se evalúan cada mes. Estas evaluaciones se utilizan para tomar decisiones en lo que se refiere a las tasas preferenciales (prime rate) aplicadas por los bancos y las utiliza un banco central a fin de decidir el nivel de control sobre la oferta de dinero.

10. En los siguientes casos se necesita aplicar técnicas estadísticas: una gerencia debe decidir si construye o no una nueva planta en Carolina del Sur, Arkansas o Wyoming; deben considerarse los impuestos, costos de transporte y construcción y la anuencia del personal clave para trasladarse a esos lugares. Una televisora debe decidir si agrega o no otra telenovela en su horario principal. En una universidad se debe decidir si se admite o no a un aspirante proveniente de Skipton, Inglaterra, que obtuvo un promedio D+ en una escuela privada. Un médico debe decidir qué análisis debe practicar a un paciente que presenta ciertos síntomas; con base en los resultados de pruebas sanguíneas, electrocardiogramas y otros análisis. Por último, uno puede pensar en establecer un comercio. Antes de tomar una decisión, deben reunirse y evaluarse datos sobre elementos tales como costo inicial, competidores y posibles ganancias.
11. Los resultados de varios sondeos de opinión realizados por Gallup y Harris se publican en los diarios y revistas y se presentan en la radio y la televisión. Estos sondeos abarcan muchos temas, como evaluación del desempeño del presidente de Estados Unidos, el sentir de los estadounidenses acerca de problemas de salud como el de sida y el tabaquismo, si debe continuar el programa espacial, la importancia de la religión y si las líneas aéreas comerciales son tan seguras como lo eran hace cinco años. Como ejemplo específico, un estudio realizado por Gallup en marzo de 1987 (número 258) indicó que cerca de 3 de cada 10 adultos estadounidenses fumaban. Esto era menos de 38% en 1983 y de 45% en 1945. Además se informó que el porcentaje de mujeres que fuman es ahora aproximadamente igual al de hombres. En 1987 33% de los hombres lo hacían y de las mujeres el 28%. Resulta interesante saber que 77% de los fumadores indicaron que les gustaría dejar de hacerlo.

DIVISIONES DE LA ESTADISTICA

Estadística descriptiva

La definición de Estadística presentada en la introducción se refiere a la "organización, presentación y análisis de datos numéricos". A este aspecto de la Estadística por lo común se le denomina **Estadística descriptiva.**

Estadística descriptiva Procedimientos empleados para organizar y resumir conjuntos de datos numéricos.

Los conjuntos de datos numéricos no organizados (como un censo de población, las retribuciones por hora de miles de programadores de computadora y las respuestas individuales de 2 340 votantes registrados en lo referente a la elección del Presidente de Estados Unidos) resultan de poco valor. Sin embargo, se dispone de técnicas estadísticas para organizar este tipo de datos en forma significativa. Algunos datos pueden organizarse en una **distribución de frecuencias.** (El procedimiento para hacerlo se expone en el capítulo 2.) Pueden utilizarse diversos tipos de **gráficas** para describir datos; en el capítulo 2 también se presentan varias formas básicas de gráficas.

Los promedios especializados, como la *mediana*, pueden calcularse para describir el valor central de un grupo de datos numéricos. Estos promedios se presentan en el capítulo 3. Puede utilizarse un cierto número de medidas estadísticas para describir cómo se agrupan estrechamente los datos con respecto a un promedio. Estas medidas se analizan en el capítulo 4.

Estadística inferencial

Otra división de la estadística es la llamada **Estadística inferencial**, también denominada **inferencia Estadística** y **Estadística inductiva**. Lo más importante con respecto a la Estadística inferencial es determinar algo acerca de una **población**. Una población puede estar formada por personas como todos los estudiantes inscritos en una universidad, todos los alumnos de una clase de contabilidad, o todos los reclusos de una prisión. Una población también puede estar formada por objetos, como las llantas producidas durante una semana en una fábrica, o todas las truchas que habitan en una presa. Una población también puede estar formada por un grupo de *medidas*, como podrían ser los pesos de los jugadores de un equipo de futbol, o las estaturas de todos los jugadores de basquetbol de una liga. Obsérvese que una población en sentido estadístico no necesariamente se refiere a personas.

Población Conjunto de todos los posibles individuos; personas, objetos o mediciones de interés.

Para deducir algo acerca de una población, por lo general se toma una muestra de dicha población.

Muestra Una parte, o parte de una población de interés.

Con mucha frecuencia se toma una muestra para determinar algo referente a una población en administración, agricultura, política y gobierno, según se indica en los ejemplos que siguen:

1. Antes de una elección, las empresas de sondeo de opinión, como Gallup & Harris, muestrean sólo aproximadamente 2 000 votantes registrados de los millones elegibles para votar. Con base en los resultados de muestreo, se realizan ciertas inferencias en lo referente a la forma en que todos los votantes llenarán sus boletas el día de la elección. Sería interesante comparar las estimaciones finales de Gallup con los resultados reales de las elecciones.

Año	*Presidente*	*Estimación financiera Gallup (%)*	*Resultado de la elección (%)*
1944	Roosevelt	51.5	53.3
1956	Eisenhower	59.5	57.8
1960	Kennedy	51.0	50.1
1972	Nixon	62.0	61.8
1984	Reagan	59.0	59.2

2. Un fabricante de automóviles toma una muestra de cinco engranes (usados en la transmisión) cada hora. Con base en los resultados del muestreo, se toma una decisión acerca de la calidad de todos los engranes producidos durante esa hora.
3. Mientras un camión espera para descargar en un almacén de granos se toma un poco de trigo. Con base en los resultados de esta muestra, se establece el precio de toda la carga del camión.
4. El Departamento del Trabajo de Estados Unidos vigila constantemente las cifras sobre empleo, desempleo, salarios, movimiento laboral, etc. Con base en encuestas, el departamento presenta las estadísticas. Las de un mes podrían incluir: 1.5 de cada 100 empleados cambiaron de trabajo el último mes; el sueldo mensual promedio en las manufacturas fue de $485 (dólares); el número promedio de horas de trabajo fue de 40.2.
5. Las cadenas de televisión constantemente vigilan la popularidad de sus programas contratando a organizaciones de encuestas para muestrear las preferencias del auditorio. Estas apreciaciones de la audiencia de un programa se utilizan para fijar precios a la publicidad y para cancelar programas.
6. Los biólogos marinos marcan unas cuantas focas para graficar sus patrones migratorios.
7. Los catadores de vino degustan unas cuantas gotas de vino para tomar una decisión en lo que se refiere a todo el vino preparado para la venta.

8. El departamento de contabilidad verifica sólo unas cuantas facturas para determinar la exactitud de todas ellas.
9. Los consumidores prueban muestras de pizzas y otros productos en un establecimiento. Si les gusta la muestra, pueden comprar una pizza completa.

¿Por qué tomar una muestra en vez de estudiar todos los elementos de la población? Debido al costo prohibitivo de tener contacto con los millones de votantes antes de una elección, es necesaria una muestra de los votantes registrados. Al probar trigo para determinar el contenido de humedad se destruyen los granos, lo que hace forzoso utilizar una muestra. Si los catadores de vino probaran todo el vino, no quedaría nada qué vender. Para unos cuantos geólogos marinos sería físicamente imposible capturar y marcar todas las focas del océano. (Estas y otras razones para muestrear se analizan en el capítulo 8.)

Existen ciertos riesgos relacionados con el empleo de resultados de las muestras para deducir algo acerca de una población desconocida. Cinco engranes seleccionados al azar por el departamento de control de calidad, entre todos los engranes fabricados durante una hora podrían ser perfectos. Podría concluirse a partir de esta muestra que todos los engranes producidos fueron satisfactorios. Pero ya que esta inferencia se basó en una muestra, existe cierta probabilidad de que no todos los engranes producidos sean satisfactorios. Cuando se realiza un sondeo de opinión o se investiga el mercado para un nuevo cereal, jabón o dentífrico con base en una muestra, es necesario considerar que existe un riesgo al realizar inferencias con respecto al comportamiento de la población. El sondeo de opinión o la prueba de mercado podrían indicar que el candidato X ganará por mayoría, o que, si se pone a la venta, una gran proporción de la población adquirirá un nuevo cereal. Sin embargo, existe cierta probabilidad de que gane el candidato Y y el cereal podrían rechazarlo los consumidores, dando como resultado una pérdida importante para el fabricante. El análisis de las técnicas de muestreo (que empieza en el capítulo 5) servirá para evaluar los riesgos de tomar una decisión incorrecta.

Con base en el análisis anterior, la Estadística inferencial puede definirse como sigue:

Estadística inferencial Métodos empleados para determinar algo acerca de una población, con base en una muestra.

A continuación se presenta un problema para autoexamen. En cada capítulo se expone un cierto número de estos problemas. Sirven para poner a prueba la comprensión del lector acerca del material precedente. Al final del capítulo se presentan la respuesta y el método de solución. Se recomienda al lector que resuelva cada uno de estos problemas y después verifique su respuesta.

AUTOEXAMEN 1-1

Una compañía comercial de Chicago pidió a una muestra de 1 960 consumidores que probaran un platillo de pescado congelado de elaboración reciente por un fabricante, denominado Fish Delight. De los 1 960 consumidores consultados 1 176 dijeron que comprarían el platillo si se pusiera a la venta.

1. ¿Qué informará la compañía al fabricante respecto a la aceptación del Fish Delight?
2. ¿Es éste un ejemplo de Estadística descriptiva o inferencial? Justifique su respuesta.

NIVELES DE MEDICION

"El nivel de medición" se mencionará con frecuencia en los capítulos que siguen. Los cuatro tipos generales, o niveles de medición son: nominal, ordinal, de intervalo y de razón.

Nivel nominal

La información presentada en las tablas 1-1 y 1-2 representa medición nominal. A este nivel se le considera el más "primitivo", el "más bajo", o el tipo más limitado de medición.

TABLA 1-1

Religión indicada por la población de Estados Unidos por personas con edades de 14 años o mayores

Religión	*Total*
Protestante	78 952 000
Católica	30 669 000
Judía	3 868 000
Otra religión	1 545 000
Ninguna religión	3 195 000
Religión no indicada	1 104 000
Total	119 333 000

Fuente: Departamento de Comercio (Estados Unidos), Oficina del Censo, Current Population Reports, serie P-20, No. 79.

TABLA 1-2

Población de las siete mayores reservaciones para indios

Reservación	*Total*
Navajo (Ariz., N.M.,Utah)	173 018
Cherokee (Okla.)	58 232
Creek (Okla.)	54 606
Choctaw (Okla.)	21 858
Pine Ridge (S.D.)	19 246
Southern Pueblos (N.M.)	17 079
Chicksaw (Okla.)	11 780

Fuente: Departamento del Interior (Estados Unidos), Oficina de Asuntos Indígenas.

Por lo común los términos **nivel nominal de medición y escala nominal** se emplean para hacer referencia a los datos que *sólo pueden clasificarse en categorías*. Sin embargo, en el sentido exacto de las palabras, no intervienen mediciones ni escalas. En vez de esto sólo hay cuentas o conteos.

La disposición de las religiones de la tabla 1-1 podría haberse modificado. Se podría haber enlistado la católica romana en primer lugar, la judía en segundo, y así sucesivamente. Esto indica fundamentalmente que para el nivel nominal de medición *no existe orden particular para los grupos.* Además, las categorías se consideran como **mutuamente excluyentes,** lo cual significa por ejemplo, que una persona no podría ser protestante y al mismo tiempo no tener religión. En el caso de la tabla 1-2 un indígena no podría ser navajo y choctaw al mismo tiempo.

Mutuamente excluyente Una persona, objeto o medición se incluye solamente en una categoría.

Debe observarse que en las tablas 1-1 y 1-2 las categorías son **exhaustivas,** lo cual significa que los miembros de la población, o muestra, deben aparecer en una de las categorías. Si una persona se negara a indicar cuál es su religión, se le incluiría en la categoría de "religión no indicada". Si se convirtiera al budismo su religión se incluiría en la categoría de "otra religión".

Exhaustiva Cada individuo, objeto, o medición debe aparecer en una categoría.

A fin de procesar datos sobre preferencia religiosa, sexo, empleo por industria, etc., con frecuencia las categorías se codifican como 1, 2, 3, ..., en donde (por ejemplo) 1 representa protestante, 2 católico, y así sucesivamente. Esto facilita el conteo cuando se utiliza una computadora u otro dispositivo. Sin embargo, no se permite utilizar estos números algebraicamente. Por ejemplo, 1 + 2 no es igual a 3; esto es, un protestante + un católico no es igual a una persona de religión judía. Asimismo, si un navajo se codifica como 1, un cherokee como 2, y así sucesivamente, un navajo + un cherokee no es igual a un indígena creek.

Las pruebas aplicadas a los datos de escala nominal no implican ninguna consideración en lo que se refiere a la distribución básica de la población a partir de la cual se seleccionó la muestra. Por tanto, a estas pruebas se les denomina pruebas libres de distribución, o pruebas no paramétricas. Algunas de tales pruebas se analizarán al empezar el capítulo 16.

Nivel ordinal

La tabla 1-3, en la siguiente página, es un ejemplo de **medición de nivel ordinal.** Una categoría es mayor que la siguiente, esto es, "superior" es una calificación mayor que "bueno", y "bueno" es mayor que "promedio", y así sucesivamente.

Si se sustituye superior por 1, bueno por 2, etc., es obvio que una categoría 1 es mayor que una categoría 2, y que una categoría 2 es mayor que una categoría 3. Sin embargo, no puede decirse (como ejemplo) que un instructor clasificado como bueno es dos veces más competente que uno clasificado como promedio, o que uno con clasificación de superior es dos veces más competente que uno conside-

rado como bueno. Sólo puede decirse que una clasificación de superior es mayor que una de bueno, y que una clasificación de bueno está por encima de una puntuación promedio.

TABLA 1-3

Calificaciones de estudiantes, semestre de otoño

Calificaciones	*Número de calificaciones*
Excelente	6
Muy bien	18
Bien	15
Suficiente	7
Deficiente	0

En resumen, la principal diferencia entre un nivel de medición nominal y uno ordinal es la relación "mayor que" entre las categorías de nivel ordinal. Por otra parte, la escala ordinal de medición tiene las mismas características que la escala nominal, es decir, las categorías son mutuamente excluyentes y exhaustivas.

Nivel de intervalo

La **escala de medición de intervalo** es el siguiente nivel más alto. Incluye todas las características de la escala ordinal, pero además la distancia entre valores es constante. Un ejemplo de esto es la temperatura en la escala Fahrenheit. Supóngase que las temperaturas máximas durante tres días consecutivos en enero en un lugar de Nebraska, son de 28, 31 y 20 grados Fahrenheit. Estas temperaturas pueden clasificarse por categoría con facilidad, pero también es posible determinar la diferencia entre cada par de temperaturas. Esto es posible debido a que 1 grado Fahrenheit representa una unidad constante de medición. Es importante observar que el punto cero es arbitrario: tan sólo otro punto en la escala Fahrenheit. 0 °F no representa la ausencia de temperatura, sino sólo un estado de frío. Supóngase que la temperatura en agosto de 96 °F va a compararse con las tres temperaturas de enero de dicho lugar (North Platte, Nebraska) aproximadamente de 30 °F. Puede decirse que en un día de agosto se tiene una temperatura 60 grados más cálida que en un día de enero, pero no es posible afirmar que haya tres veces más calor. Las puntuaciones en un cierto examen y las calificaciones en uno de historia o de matemáticas también son ejemplos de la escala de medición de intervalo.

La escala de medición de intervalo tiene las propiedades de ser mutuamente exclusiva y exhaustiva. Por ejemplo, una temperatura máxima de agosto no puede ser al mismo tiempo 88 y 76. Por tanto, se cumple la característica de mutua exclusividad. Podemos enlistar todas las temperaturas máximas para todos los días de agosto. De esta forma, se cumple la característica exhaustiva.

Nivel de razón (o cociente)

El **nivel de razón** (o cociente) es el nivel de medición "más alto". Este nivel tiene todas las características del de intervalo: las distancias entre números son de un tamaño conocido y constante; las categorías son mutuamente excluyentes; y así sucesivamente. Las principales diferencias entre los niveles de intervalo y de razón son: 1) Los datos de nivel de razón tienen un punto cero *significativo*, y 2) la razón o cociente de dos números es significativa. El dinero es un buen ejemplo. Tener cero pesos (o dólares) tiene significado: ¡No se tiene ningún dinero! Una unidad monetaria es otra medición de nivel de razón. Si el indicador de una báscula marca cero, existe una ausencia completa de peso. Asimismo, si usted gana unos $40 000 (dólares) al año y otra persona (Pablo) gana $10 000, usted gana cuatro veces más que él. De manera semejante, si usted pesa 90 kilogramos y su hija sólo 30, usted pesará tres veces más que ella. Puede decirse que usted gana $30 000 al año más que Pablo y pesa 60 kilogramos más que su hija. Otros ejemplos de medición del nivel de razón son el número de años que los médicos dedican a la práctica y el número de motocicletas vendidas el último mes por los promotores de una marca japonesa.

AUTOEXAMEN 1-2

Las respuestas se dan al final del capítulo

1. La organización Canadian Statistics informó acerca de las poblaciones en las siguientes provincias:

Provincia o territorio	*Número de personas*
Terranova	567 681
Nueva Escocia	847 442
Nuevo Brunswick	691 403
Territorios del Noroeste	45 741
Yukon	23 153

¿Qué nivel de medición reflejan estos datos? ¿Por qué?

2. La calificación de un examen especial aplicado al personal reclutado por el ejército y que está interesado en asistir a la Escuela para Promoción a Oficiales son:

Puntuaciones	*Número de solicitantes*
90-99	42
80-89	19
70-79	7
60-69	4
Menos de 60	3

¿Qué nivel de medición representan estos datos? Explique su respuesta.

ALGUNAS AYUDAS PARA EL APRENDIZAJE

A medida que se estudia cada capítulo, se observará un cierto número de auxiliares para el aprendizaje diseñados para ayudarle a determinar de inmediato si ha comprendido o no el material del capítulo anterior. Entre ellos se encuentran los **problemas de autoexamen** repartidos en cada capítulo. Se sugiere que resuelva cada uno de dichos problemas de repaso y compruebe sus respuestas con las que se presentan al final del capítulo; además, hay **ejercicios** intercalados a través del

mismo. Las respuestas y el método de solución para los ejercicios de número impar se dan al final del libro. También hay una sección titulada "Aplicación de conceptos" al final de la mayoría de los capítulos. Contiene también problemas más complicados y conjuntos mayores de datos. Es posible que se necesite una computadora para resolver algunos de ellos, y se tiene al final de cada capítulo un **examen**. Se incluyen preguntas de tipo objetivo y problemas que abarcan todo el capítulo. Esta prueba permite integrar las ideas principales presentadas en el capítulo. Las respuestas se dan al final del mismo. Por último, después de un grupo de capítulos hay una **sección de repaso** en la que se consideran los puntos principales de los capítulos precedentes, un glosario y un amplio examen.

En este texto se utilizan símbolos como: χ^2, Σ, σ, y ρ. También hay fórmulas como:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{n}}{n-1}} \qquad z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}}$$

¡Esto no debe intimidar ni desanimar a nadie! Dichos símbolos y fórmulas son simplemente un medio para resumir el tema. Sin embargo, ya que muchos de los símbolos, fórmulas y términos *(desviación estándar, coeficiente de correlación, ji cuadrada* y *regla de decisión)* pueden resultar poco conocidos, la lectura de este material le resultará más difícil. Si necesita conocer el significado de ciertos símbolos, al final del texto se presenta una lista de éstos.

APLICACIONES PARA COMPUTADORA

El uso de la computadora en administración y economía se ha incrementado mucho en los últimos años. Esto es especialmente cierto en el área de la Estadística. Antes de 1940, la mayoría de los cálculos relacionados con la aplicación de la Estadística en problemas de administración se realizaban a mano o mediante las máquinas sumadoras. Cálculos amplios como los del capítulo 15 acerca de Regresión múltiple y correlación, tomaban mucho tiempo y la exactitud de los cientos de sumas y multiplicaciones necesarias era cuestionable.

La creación de las calculadoras rotatorias por empresas como Friden, Marchant y Monroe fue el siguiente paso en la solución de problemas. Estas calculadoras las sustituyeron por calculadoras electrónicas de mano y computadoras. Actualmente, en la mayor parte de los colegios y universidades hay computadoras para uso de los estudiantes, así como sistemas programáticos o de software, como MINITAB, SAS, y el Statistical Package for the Social Sciences (SPSS^x). Se ha elegido MINITAB para la mayor parte de las aplicaciones estadísticas en este libro, por ser más propicio para el usuario, lo que significa que es fácil de operar y no requiere aprendizaje de un lenguaje especial de programación. Para ayudarle, se proporcionan los comandos MINITAB en la parte superior de cada listado de computadora.

El sistema MINITAB puede instalarse en una amplia variedad de macrocomputadoras y de mini y microcomputadoras.

Se emplea un paquete muy eficiente de Computerized Business Statistics (CBS), por Owen P. Hall y Harvey M. Adelman (publicado en Estados Unidos por Richard D. Irwin, Inc.) en el capítulo de series de tiempos, para resolver problemas de variación estacional. Se maneja por menús y es muy fácil de operar.

Según lo decida el instructor y dependiendo del sistema operativo y del equipo disponible, se recomienda al lector que aplique un paquete estadístico de computación a los ejercicios que tienen conjuntos de datos grandes. Esto lo liberará de operaciones tediosas y le permitirá concentrarse en el análisis de datos.

RESUMEN

La noción de *estadísticas*, en su acepción cotidiana, se refiere a conjuntos de hechos o datos. Los datos pueden ser, por ejemplo, registros de pérdidas y ganancias de todos los equipos de beisbol de una liga, los precios al cierre de acciones comunes seleccionadas, o los activos de los 10 bancos más grandes en Estados Unidos.

Sin embargo, en un sentido más amplio, el término Estadística se refiere al grupo de valiosos medios analíticos utilizados para recopilar, organizar, analizar e interpretar información numérica para tomar decisiones eficaces y adecuadas.

A una faceta de la Estadística se la denomina Estadística descriptiva. Esta rama incluye las técnicas que se aplican para organizar los datos no procesados (en bruto) en una distribución de frecuencias, representarlos en una gráfica y resumirlos para calcular un promedio o una medida de dispersión.

A otra faceta se le conoce como Estadística inferencial. Sus técnicas tratan de sacar conclusiones acerca de una población con base en muestreos.

Se analizaron los cuatro niveles de medición: nominal, ordinal, de intervalo y de razón. Es necesario conocer el nivel de medición si se va a aplicar la técnica estadística correcta. Por ejemplo, en el capítulo 3 se verá que para calcular la media aritmética, los datos deben ser por lo menos de nivel de intervalo.

Recapitulación

I. Definición de estadística.
   A. Una *estadística* puede considerarse como un conjunto de datos numéricos.
   B. En sentido más amplio, se llama Estadística a la ciencia que trate de los métodos y medios para recolectar, presentar, analizar e interpretar datos, con el objeto de tomar decisiones más eficaces.
II. Subdivisiones de la Estadística.
   A. La *Estadística descriptiva* trata de la presentación de datos en gráficas o en distribuciones de frecuencias, y de aplicar diversos promedios y medidas de dispersión.
   B. La *Estadística inferencial* funciona tomando una muestra de una población y efectuando estimaciones acerca de una característica de esa población con base en los resultados de muestreo.

III. Niveles de medición
   A. El *nivel nominal de medición* se refiere a los datos que sólo pueden contarse y colocarse en categorías. No existe un orden específico para éstas.
   B. El *nivel ordinal de medición* implica que una categoría es mayor que otra. Al clasificar estudiantes en principiantes, intermedios y avanzados, se está utilizando este tipo de medición por categoría.
   C. El *nivel de medición de intervalo* incluye las características de clasificación por categoría de mediciones ordinales, y especifica que la distancia entre números es la misma.
   D. El *nivel de medición de razón* (o cociente) tiene todas las características del nivel de intervalo, pero además posee un punto cero significativo, y la razón, relación por cociente, entre dos números también es significativa.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Un concepto común de una estadística es que se trata de un conjunto de cifras y datos. En administración y otros campos, se considera la Estadística, que es una ciencia matemática. Analice la diferencia entre los dos conceptos.
2. Explique la diferencia entre *Estadística descriptiva* y *Estadística inferencial.*
3. Una muestra de 200 ejecutivos reveló que 60 de ellos tenían algún grado de hipertensión arterial debido, en parte, a su trabajo. ¿Qué podría inferirse acerca de todos los ejecutivos? ¿Por qué?
4. El gerente de la planta procesadora de alimentos en la que se supone que el lector trabaja medio tiempo, ha recibido numerosas quejas. Se afirma que hay una cantidad excesiva de líquido en algunas latas de cerezas. La planta no tiene programa sistemático de control de calidad. Si lo nombraran gerente de control y certificación de calidad, ¿qué acciones tomaría para comprobar la producción?
5. Supóngase que lo acaban de nombrar ejecutivo principal de mercadotecnia para Fun Enterprise (F.E.), compañía que se especializa en diseñar y construir parques de diversiones cerca de grandes ciudades. F.E. se interesa principalmente en un sitio en el sureste de una región. Una vez seleccionado éste, se debe considerar si el parque habrá de orientarse hacia personas de todas las edades, sólo para niños o sólo para jubilados. ¿Cómo procedería para formular recomendaciones acerca de 1) la ubicación del parque y 2) la orientación grupal ¿para todas las edades, jóvenes, personas mayores?

EXAMEN CAPITULO 1

Las respuestas se dan al final del capítulo

Indique si la expresión es verdadera o falsa. Si es falsa, anote la respuesta correcta.

1. Otro nombre para la Estadística inferencial es Estadística descriptiva.
2. Una muestra de consumidores probó una nueva hojuela de queso y la clasificó de excelente, muy buena, regular o mala. El nivel de medición para esta investigación de mercado es ordinal.

3. Un sindicato de plomeros y colocadores de tubería tiene 5 020 agremiados. Se seleccionó e interrogó a un grupo representativo de 248 integrantes. Se considera que 248 es la población.
4. Un total de 9 386 madres solteras menores de 15 años tuvieron un hijo el año pasado, hubo 6 950 muertes accidentales en enero, y la mayor trucha pescada en un lago pesó 25 kilogramos. A este conjunto de cifras y datos se le denomina estadística.
5. Los métodos empleados para saber algo acerca de la población de truchas en el Parque Nacional Yellowstone, con base en una muestra de 40 truchas se denomina Estadística inferencial.
6. Gallup y otras empresas de sondeos de opinión rara vez emplean métodos de muestreo porque las poblaciones con las que trabajan son muy grandes.
7. La Cámara de Comercio preguntó a una muestra de personas que se asoleaban en Siesta Beach, Sarasota, Florida, si vivían en Sarasota o en una zona a menos de 30 millas de la playa, si vivían fuera del estado, o en un país extranjero. Este proyecto de investigación se relaciona con datos de nivel nominal.
8. La Oficina del Censo informó que hay 12 955 000 trabajadores de producción en la industria manufacturera. A esta cifra se le denomina valor estadístico.
9. El nivel nominal se considera como el "más bajo" nivel de datos y éstos deben ser mutuamente excluyentes.
10. Se seleccionó una muestra de 3 014 trabajadores en la industria del acero para determinar si irían a la huelga el lunes. Más de 50% de las personas de la muestra indicaron que lo harían. Puesto que el número muestreado es grande y los que están a favor de la huelga constituyen más de 50%, puede suponerse que la mayoría de los trabajadores de la industria del acero están a favor de una huelga.

Autoexámenes

1-1 1. Con base en la muestra de 1 960 consumidores, se estima que si se pone a la venta, 60% de todos los consumidores comprará Fish Delight (1 176/1 960 x 100 = 60%).

2. Estadística inferencial, porque se utilizó una muestra para realizar una inferencia acerca de la forma como todos los consumidores de la población reaccionarían si Fish Delight se pusiera a la venta.

1-2 1. Nivel nominal. No hay un orden específico para las provincias y territorios. Por ejemplo, Yukon podría haberse enlistado primero. Las categorías son mutuamente excluyentes, lo cual significa que una persona no podría ser residente en Yukon y en Nueva Escocia al mismo tiempo.

2. Las puntuaciones pueden clasificarse por categorías, pero además se puede determinar la diferencia entre esas puntuaciones. Tales diferencias son de un tamaño constante y conocido. La puntuación 95 está 10 puntos por encima de una de 85, una puntuación de 85 está 10 puntos por encima de una de 75, y así sucesivamente. Por lo tanto, el nivel de medición es de intervalo.

Examen capítulo 1

1. Falso. Estadística inductiva.
2. Verdadero.
3. Falso. Una muestra.
4. Verdadero.
5. Verdadero.
6. Falso. La mayoría de los sondeos de opinión y encuestas implican el manejo de una muestra seleccionada a partir de la población de interés.
7. Verdadero.
8. Verdadero.
9. Verdadero.
10. Falso. Siempre existe la probabilidad de que una muestra no sea un reflejo exacto de las características de la población.

2

Resumen de datos: distribuciones de frecuencias y representaciones gráficas

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Organizar datos originales (en bruto) en una distribución de frecuencias.
2. Representar la distribución de frecuencias en un histograma, un polígono de frecuencias o un polígono de frecuencias acumuladas.
3. Desarrollar una representación de "tallo y hoja".
4. Presentar datos utilizando representaciones usuales como las gráficas de líneas, de barras y de sectores (circulares).

En el capítulo 1 se observó que la rama de la Estadística denominada Estadística descriptiva implica las técnicas empleadas para organizar y resumir un conjunto de datos originales, en bruto, en forma significativa. Este capítulo se inicia con el estudio de dos de estas valiosas técnicas. Primero se analizará la forma de organizar un conjunto de datos sin procesar en una distribución de frecuencias y cómo representar esa distribución de manera gráfica en un *histograma,* un *polígono de frecuencias* y un *polígono de frecuencias acumuladas.* Luego se resumirán y presentarán otros tipos de información numérica en forma de gráfica de línea, de barras, o de algún otro tipo.

ELABORACION DE UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Una **distribución de frecuencias** es un método estadístico muy útil para organizar un conjunto de observaciones en forma significativa.

Distribución de frecuencias Agrupamiento de datos en categorías que muestren el número de observaciones de cada categoría.

Una distribución de frecuencias indica el número de veces que ocurre cada valor o dato. Los pasos para elaborar una distribución de frecuencias se explican mejor utilizando un ejemplo.

✱ Ejemplo

La gerencia de ventas de una gran empresa de construcción y renta especializada en condominios vacacionales en el área de Sarasota y Bradenton, Florida, desea los lineamientos disponibles en lo que se refiere a rentas mensuales para enviarlos a posibles vacacionistas. Como primer paso, seleccionó una muestra de 120 ofertas de arrendamiento. Estas se muestran en la tabla 2-1. Por lo general a tales cifras se les denomina **datos originales** (o sin procesar). Es posible localizar las rentas mensuales más baja y más alta, pero eso es casi todo lo que se puede obtener de tal conjunto desorganizado de datos "en bruto". ¿Cómo pueden reorganizarse las rentas para describir mejor la información?

✔ Solución

Existen dos métodos para organizar los datos originales (o sin procesar) de la tabla 2-1 en una distribución de frecuencias. El primero necesita establecer una **ordenación.**

Ordenación Disposición ordenada de observaciones, desde la menor hasta la mayor, o viceversa.

TABLA 2-1

Rentas mensuales (en dólares) de condominios

$1 170	$1 207	$1 581	$1 277	$1 305	$1 472	$1 077	$1 319	$1 537	$1 849
1 332	1 418	1 949	1 403	1 744	1 532	1 219	896	1 500	1 671
1 471	1 399	1 041	1 379	821	1 558	1 118	1 533	1 510	1 760
1 826	1 309	1 426	1 288	1 394	1 545	1 032	1 289	695	803
1 440	1 421	1 329	1 407	718	1 457	1 449	1 455	2 051	1 677
1 119	1 020	1 400	1 442	1 593	1 962	1 263	1 788	1 501	1 668
1 352	1 340	1 459	1 823	1 451	1 138	1 592	982	1 981	1 091
1 428	1 603	1 699	1 237	1 325	1 590	1 142	1 425	1 550	913
1 470	1 783	1 618	1 431	1 557	896	1 662	1 591	1 551	1 612
1 249	1 419	2 162	1 373	1 542	1 631	1 567	1 221	1 972	1 714
949	1 539	1 634	1 637	1 649	1 607	1 640	1 739	1 540	2 187
1 752	1 648	1 978	640	1 736	1 222	1 790	1 188	2 091	1 829

Más baja

Más alta

A partir de la tabla 2-1, las rentas (en dólares) se revisan para encontrar la más baja ($640) y la más alta ($2 187). Luego se disponen los valores desde el menor hasta el mayor. (Véase la tabla 2-2.)

TABLA 2-2

Arreglo ordenado de las 120 rentas

$ 640	$1 041	$1 222	$1 332	$1 421	$1.470	$1.545	$1.607	$1.677	$1 826
695	1,077	1 237	1,340	1 425	1,471	1 550	1 612	1,699	1 829
718	1,091	1 249	1 352	1 426	1,472	1 551	1 618	1,714	1 849
803	1,118	1 263	1 373	1 428	1,500	1 557	1 631	1,736	1 949
821	1,119	1 277	1 379	1 431	1,501	1 558	1 634	1,739	1 962
896	1,138	1 288	1 394	1 440	1,510	1 567	1 637	1,744	1 972
896	1,142	1 289	1 399	1 442	1,532	1 581	1 640	1,752	1 978
913	1 170	1 305	1,400	1 449	1,533	1 590	1 648	1,760	1 981
949	1 188	1 309	1,403	1 451	1,537	1 591	1 649	1,783	2 051
982	1 207	1 319	1 407	1 455	1,539	1,592	1 662	1,788	2 091
1 020	1 219	1 325	1 418	1 457	1,540	1,593	1 668	1,790	2 162
1 032	1 221	1 329	1 419	1 459	1,542	1,603	1 671	1,823	2 187

El arreglo ordenado tiene algunas ventajas. Los valores más bajo ($640) y más alto ($2 187) pueden apreciarse con facilidad, y parece haber un gran número de valores entre $1 400 y $1 700. Sin embargo, la ordenación es un proceso tedioso,

aunque sólo existan 120 valores. Una segunda y mejor forma de resumir las rentas consiste en organizarlas directamente en una distribución de frecuencias.

PASOS PARA ELABORAR UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Los pasos usuales para obtener una distribución de frecuencias son:

1. Establecer un conjunto de agrupamientos que se denominan **clases.** Una clase puede contener todas las rentas desde $600 hasta $799, inclusive. La siguiente clase podría ser desde $800 hasta $999 inclusive, y así sucesivamente.

$600–$799 ←	una clase
$800–$999 ←	una clase

Cada categoría (clase) tiene dos límites: un *límite inferior declarado* y un *límite superior declarado*. Es práctica común hacer que el límite inferior de la primera clase sea uno ligeramente menor que la primera o más baja observación, y hacer que todas las clases tengan el mismo ancho o amplitud. En este ejemplo se decidió que el límite inferior de la primera clase fuera $600 (un poco menor que $640) y que el límite superior de esta clase fuera $799. La siguiente clase se expresa como $800–$999, e incluye los valores de $800, $801, $802,..., $999. En otras palabras, en esa clase se incluyen tanto el límite superior como el inferior. Obsérvese que no se traslapan, es decir, no hay duda del sitio en que se encontrará la renta de $800, que está en la clase $800–$999.

Utilizando $200 como la distancia entre los límites inferiores las clases quedarían como:

Distancia entre los límites de clase inferiores declarados $200	$ 600–$ 799
	800– 999
	1 000– 1 199
	1 200– 1 399
	1 400– 1 599
	1 600– 1 799
	1 800– 1 999
	2 000– 2 199

2. *Llevar la cuenta* de los valores en las clases. La práctica común es utilizar una marca de cuenta (/) para señalar un valor. La renta de $1 170 de la esquina superior izquierda de la tabla que contiene los datos originales (tabla 2-1) se marca para la cuenta en la clase de $1 000–$1 199. El siguiente número de esa columna ($1 332) se marca en la clase $1 200–$1 399, y así sucesivamente.

   Al terminar, las marcas de conteo debe obtenerse:

$ 600–$ 799	///
800– 999	~~////~~ //
1 000– 1 199	~~////~~ ~~////~~ /
1 200– 1 399	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ //
1 400– 1 599	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~
1 600– 1 799	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////
1 800– 1 999	~~////~~ ////
2 000– 2 199	////

3. Contar el número de marcas en cada clase. Obsérvese que hay tres marcas, o **frecuencias de clase,** en la de $600–$799, siete de éstas en la de $800–$999, y así sucesivamente. En la tabla 2-3 se muestran las clases y las frecuencias de clase en forma de distribución de frecuencias.

TABLA 2-3

Distribución de las rentas de 120 condominios

Rentas mensuales	*Número de unidades*
$ 600–$ 799	3
800– 999	7
1 000– 1 199	11
1 200– 1 399	22
1 400– 1 599	40
1 600– 1 799	24
1 800– 1 999	9
2 000– 2 199	4
Total	120

¿Qué observaciones puede formular ahora el gerente de ventas con respecto a las rentas mensuales? 1) La menor es aproximadamente $600; la mayor se aproxima a $2 200. 2) La mayoría de las rentas está entre $1 000 y $1 800 mensuales. 3) La mayor concentración está entre $1 400 y $1 600.

Debe observarse que forzar las rentas a quedar en una distribución de frecuencias ha originado cierta pérdida de información. Es decir, al organizar los datos originales en clases, ya no es posible señalar con exactitud valores como $692 o $1 218. Sin embargo, las ventajas de resumir los datos en forma comprensible compensan en alto grado tal desventaja.

En resumen, organizar los datos originales o sin procesar en una distribución de frecuencias permite determinar con rapidez los valores más bajo y más alto aproximados, un valor cerca del centro de la distribución y la variabilidad (la forma en que los datos se concentran y dispersan) con respecto a ese valor.

De nuevo se desea llamar la atención del lector hacia los problemas de autoexamen. Estos aparecen en cada capítulo después del análisis de un tema principal. Al resolver cada uno de ellos es posible comprobar de inmediato la comprensión del material precedente en el texto. Las respuestas están al final del capítulo.

AUTOEXAMEN 2-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los ingresos mensuales (en dólares) de una pequeña muestra de nuevos operadores de computadora en el área metropolitana de Cleveland son: $1 650, $1 475, $1 760, $1 540, $1 495, $1 590, $1 625, y $1 510.

1. ¿Cómo se denominan los números no agrupados ($1 650, $1 275, etc.)?
2. Utilizando como primera clase, $1 400-$1 499, como segunda $1 500–$1 599, y así sucesivamente, organice los ingresos mensuales en una distribución de frecuencias.
3. ¿Cómo se llaman los números en la columna derecha de la distribución de frecuencias?
4. Describa la distribución de ingresos mensuales.

LIMITES DE CLASE DECLARADOS Y VERDADEROS

Las clases en la distribución de frecuencias de 120 rentas mensuales (en dólares) son $600–$799, $800–$999, y etc. A éstas se les denomina *clases declaradas*, y sus límites inferior y superior se conocen como *límites de clase declarados*.

Las rentas se redondearon. Por ejemplo, una renta de $799.50 se redondeó *"hacia arriba"* a $800 y se contó en la segunda clase. Cualquier cantidad superior a $799, pero inferior a $799.50 se redondeó *"hacia abajo"* a $799 y se incluyó en la primera clase. De esta forma, la clase $600–$799 en realidad abarca todas las rentas que van desde $599.50 inclusive hasta $799.50, pero sin incluir este valor. Asimismo la siguiente clase declarada, $800–$999, incluye las rentas entre $799.50 y $999.50. A estos límites de clase se les llama *límites de clase verdaderos*. Los límites verdaderos son tales que el límite superior verdadero de una clase es igual al límite inferior verdadero de la siguiente.

En la tabla 2-4 se presentan los límites de clase declarados y los límites de clase verdaderos para su comparación.

TABLA 2-4

Límites de clase declarados y verdaderos

Límites declarados	*Límites verdaderos*	*Números de unidades*
$ 600–$ 799	$ 599.50 hasta, pero sin incluir $ 799.50	3
800– 999	799.50 hasta, pero sin incluir 999.50	7
1 000– 1 199	999.50 hasta, pero sin incluir 1 199.50	11
1 200– 1 399	1 199.50 hasta, pero sin incluir 1 399.50	22
1 400– 1 599	1 399.50 hasta, pero sin incluir 1 599.50	40
1 600– 1 799	1 599.50 hasta, pero sin incluir 1 799.50	24
1 800– 1 999	1 799.50 hasta, pero sin incluir 1 999.50	9
2 000– 2 199	1 999.50 hasta, pero sin incluir 2 199.50	4

Puntos medios

El **punto medio** de una clase, denominado a menudo **marca de clase,** se determina *localizando la mitad entre los límites de clase declarados o los límites de clase verdaderos.* Se evalúa sumando los límites inferior y superior, y dividiendo el total entre dos. El punto medio entre los límites declarados de $600 y $799 es $699.50, que se obtiene con ($600 + $799)/2. El punto medio representa mejor, o es característico de los valores de esa clase. Los puntos medios de clase se utilizarán para elaborar un polígono de frecuencias en la sección que sigue.

Intervalo de clase

Un *intervalo de clase* se determina restando el límite declarado inferior del límite declarado inferior de la clase mayor siguiente. Para el ejemplo de rentas mensuales, las dos primeras clases son:

	Límite inferior
Intervalo de clase $200	$600– $799
	$800– $999

Si todas las clases de una distribución tienen el mismo ancho o tamaño, el intervalo de clase también puede obtenerse determinando la distancia entre dos puntos medios sucesivos cualesquiera. En el ejemplo de rentas, los primeros dos puntos medios son $699.50 y $899.50 (calculados a partir de los límites verdaderos de la tabla 2-4). Al restar $699.50 de $899.50 se obtiene $200.00, el intervalo de clase de la distribución.

SUGERENCIAS PARA ELABORAR UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

1. Siempre que sea posible, los intervalos de clase utilizados en una distribución de frecuencias deben ser iguales. Los intervalos de clase desiguales ofrecen problemas al representarse en forma gráfica. Sin embargo, en algunos casos pueden ser necesarios intervalos desiguales de clase para evitar un gran número de clases vacías, o casi vacías. Esto sucede en el ejemplo que sigue. El Internal Revenue Service utilizó intervalos de clase de tamaño desigual para asignar la distribución de ingresos brutos ajustados personales (véase la tabla 2-5). Si el IRS utilizara un intervalo de clase de igual tamaño de $1 000, se habrían necesitado más de 1 000 clases para abarcar todos los ingresos. Desde luego, resultaría casi imposible analizar una distribución de frecuencias tan grande.

TABLA 2-5

Ingreso bruto ajustado para declaraciones de impuestos

Clase de ingreso bruto ajustado	*Número de declaraciones (en miles de dólares)*
Menos de $2 000	135
$ 2 000–$ 2 999	3 399
3 000– 4 999	8 175
5 000– 9 999	19 740
10 000– 14 999	15 539
15 000– 24 999	14 944
25 000– 49 999	4 451
50 000– 99 999	699
100 000– 499 999	162
500 000– 999 999	3
$1 000 000 y más	1

2. Supóngase que se tiene un grupo de datos originales que se van a organizar en una distribución de frecuencias y desea utilizarse el mismo intervalo para cada clase. ¿Qué intervalo debe usarse? La siguiente fórmula presenta un intervalo común sugerido.

$$\text{Intervalo de clase sugerido} = \frac{\text{Mayor valor} - \text{Menor valor}}{\text{Número de clase}}$$

Considere que se desea resumir los datos originales de las rentas de la tabla 2-1 en 8 clases. La menor es $640 y la mayor es $2 187. ¿Cuál es el intervalo de clase sugerido?

$$\text{Intervalo de clase sugerido} = \frac{\$2\,187 - \$640}{8} = \frac{\$1\,547}{8} = \$193.375$$

Resultaría muy incómodo trabajar con un intervalo de clase de $193.375. En vez de esto, sería mucho más fácil colocar las rentas en una distribución de frecuencias si el intervalo se redondeara a un valor de, por ejemplo, $200.[1]

3. En general, el juicio personal puede influir en el número de clases. Sin embargo, demasiadas o muy pocas clases podrían no revelar la forma básica de la distribución. Por ejemplo, en el problema de las rentas un intervalo de clase de $900 no revela mucho acerca del patrón de las rentas (véase la tabla 2-6). Casi todo lo que se podría decir es que aproximadamente la mitad de las rentas son inferiores a $1 499.50, y la mitad son superiores a $1 499.50. Como regla general, no deben utilizarse menos de 5 ni más de 15 clases en la elaboración de una distribución de frecuencias.

TABLA 2-6

Ejemplo de muy pocas clases

Rentas mensuales	*Número de unidades*
$ 600–$1 499	63
1 500– 2 399	57
Total	120

4. Como guía, el límite inferior de la primera clase debe ser un múltiplo par del intervalo de clase. En el problema de las rentas se seleccionó un intervalo de clase de $200. Multiplicando esta cantidad por 3.0 (múltiplo par) se obtiene $600, límite inferior de la primera clase. Como otro ejemplo, supóngase que ciertos datos sobre precios varían de $23 (bajo) a $69 (alto) y se desea que el intervalo de clase sea de $10. El límite inferior de la primera clase sería de $20, que se obtiene multiplicando 2.0 (múltiplo par) por $10, el intervalo de clase.

5. Evite que se superpongan los límites de clase declarados como $1 300–$1 400, $1 400–$1 500, y $1 500–$1 600, pues no estaría claro en dónde marcar $1 400.

---

[1] Si no se está seguro acerca del número de clases que deban utilizarse, la fórmula que sigue dará un intervalo de clase sugerido.

$$\text{Intervalo de clase sugerido} = \frac{\text{Máximo valor observado} - \text{Mínimo valor observado}}{1 + 3.322\ (\text{logaritmo del total de frecuencias})}$$

Para los valores de las rentas:

$$\frac{\$2\,187 - \$640}{1 + 3.322(\log \text{de } 120)} = \frac{\$1\,547}{1 + 3.322(2.0792)} = \frac{\$1\,547}{7.9071024} = \$195.65$$

Para obtener el logaritmo de 120 utilizando una calculadora científica, se oprime 120 después $\boxed{\log}$. En pantalla aparecerá 2.079181246.

¿Pertenece a la clase $1 300–$1 400, o a la $1 400–$1 500? Establezca las clases como $1 300–$1 399, $1 400–$1 499, y $1 500–$1 599 y evite este problema. Se podría establecer una clase como "$1 300 o mayor, pero sin incluir $1 400".

6. No trate de tener *clases de extremo abierto.* Las clases "menor que $2 000" y "$1 000 000 y mayor" empleadas por el IRS en la tabla 2-5 son ejemplos de clases de extremo abierto, que causan problemas al graficar, según se describe en la sección siguiente.

AUTOEXAMEN 2-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Los salarios mensuales (en dólares) de una muestra de 87 empleados de una empresa se tienen en valor redondeado. Van desde $1 041 hasta $2 548.

a. Supóngase que se desea resumir los datos en siete clases. Utilizando el mismo intervalo para cada clase, determine el intervalo de clase sugerido.
b. ¿Con qué intervalo de clase sería más fácil trabajar?
c. ¿Cuáles son los límites de clase declarados para la primera clase? ¿Y para la siguiente?

2. Supóngase que las clases se expresan como:

40–60
60–90
90–150
150 y mayores

Estas clases ilustran tres prácticas que deben evitarse. ¿Cuáles son?

DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS RELATIVAS

Puede resultar conveniente convertir las frecuencias de clase a *frecuencias de clase relativas* para mostrar el porcentaje del número total de observaciones en cada clase. En el ejemplo de las rentas se podría desear saber qué porcentaje de las rentas están en la clase $600–$799. En otro estudio se desearía determinar qué porcentaje de empleados están ausentes por enfermedad entre uno y tres días al año.

Para convertir una distribución de frecuencias a una *distribución de frecuencias relativas,* cada una de las frecuencias de clase se divide entre el número total de frecuencias. Utilizando de nuevo la distribución de las rentas mensuales, la frecuencia relativa para la clase $ 600–$799 se calcula como: 3 ÷ 120 = 0.025. Esto es, 2.5% de las unidades arrendadas rentan entre $600 y $799. De manera semejante, 3.3% de las unidades se rentan en $2 000 o más, lo que se obtiene de 4 ÷ 120. Las frecuencias relativas deben dar un total de 1.000 o 100%. (Véase la tabla 2-7.)

TABLA 2-7

Clases (rentas), frecuencias de clase y frecuencias relativas

Rentas mensuales	*Frecuencias de clase*	*Frecuencias relativas*	*Obtenidas por medio de*
$ 600–$ 799	3	0.025	3 ÷ 120
800– 999	7	0.058	7 ÷ 120
1 000– 1 199	11	0.092	11 ÷ 120
1 200– 1 399	22	0.183	22 ÷ 120
1 400– 1 599	40	0.333	40 ÷ 120
1 600– 1 799	24	0.200	24 ÷ 120
1 800– 1 999	9	0.075	9 ÷ 120
2 000– 2 199	4	0.033	4 ÷ 120
	120	0.999*	

* Ligera discrepancia debida al redondeo. Debe ser 1.000

AUTOEXAMEN 2-3

Las respuestas dan al final del capítulo.

Consulte la tabla 2-7.

1. ¿Cuántas rentas están entre $1 600 y $1 799?
2. ¿Qué porcentaje de las unidades se rentan con un costo entre $1 600 y $1 799?
3. ¿Aproximadamente cuál es el porcentaje de las unidades de condominio que se rentan en $1 800 o más?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. El gerente regional de ventas de una compañía está considerando varias promociones para lograr que los compradores en tiendas de abarrotes acudan con más frecuencia a las tiendas. Una idea es que al cliente que gaste por lo menos $10 (dólares) se le obsequie con una barra de jabón de tocador la primera vez que efectúe una compra durante el mes. La segunda, el cliente puede elegir cualquier caja de cereal de 371 gramos, y así sucesivamente. Para examinar más la idea, el gerente realizó una encuesta a 50 clientes con esta pregunta: "¿Cuántas veces ha realizado compras en esta empresa durante los últimos 30 días?" El número de visitas fue:

5	3	3	1	4
4	5	6	4	2
6	6	6	7	1
14	1	2	4	4
4	5	6	3	5
3	4	5	6	8
4	7	6	5	9
11	3	12	4	7
6	5	15	1	10
1	8	9	2	12

a. Empezando con 1 como número inicial para la primera clase y utilizando un intervalo de clase de 3, organice los datos en una distribución de frecuencias.
b. Describa la distribución.
c. Sugiera las acciones que debería considerar el gerente de ventas.

2. Moore Travel, una agencia de viajes, ofrece precios especiales en ciertas travesías por el Caribe. Planea ofrecer varios de estos paseos durante la próxima temporada invernal y desea enviar folletos a posibles clientes. A fin de obtener el mayor provecho por cada dólar gastado en publicidad, necesita la distribución de las edades de los pasajeros de travesías anteriores. Se consideró que si participaban pocas personas de un grupo de edad en los paseos no sería económico enviar un gran número de folletos a personas de ese grupo de edad. La agencia seleccionó una muestra de 40 clientes anteriores de sus archivos y registró sus edades:

77	18	63	84	38	54	50	59
54	56	36	26	50	34	44	41
58	58	53	51	62	43	52	53
63	62	62	65	61	52	60	60
45	66	83	71	63	58	61	71

a. Obtenga un intervalo de clase sugerido. Utilice siete clases y haga que 15 sea el limite inferior de la primera clase.
b. ¿Cuál sería un mejor intervalo de clase?
c. Organice los datos de las edades en una distribución de frecuencias.
d. Saque conclusiones que puedan ayudar a la agencia a planear una campaña de publicidad para los paseos invernales.

3. Adventure Shops, cadena de tiendas deportivas para esquiadores principiantes, planea realizar un estudio sobre la cantidad que gasta un esquiador principiante en la adquisición inicial de equipo y suministros. Con base en estas cifras, desea averiguar la posibilidad de ofrecer combinaciones, tales como un par de botas y un par de esquíes, a fin de inducir a los clientes a comprar más. Una muestra de sus notas de caja registradora revelaron estas compras iniciales:

$140	$ 82	$265	$168	$ 90	$114	$172	$230	$142
86	125	235	212	171	149	156	162	118
139	149	132	105	162	126	216	195	127
161	135	172	220	229	129	87	128	126
175	127	149	126	121	118	172	126	

a. Obtenga un intervalo de clase sugerido. Utilice cinco clases y haga que el límite inferior de la primera clase sea $80.
b. ¿Cuál sería un mejor intervalo de clase?
c. Organice los datos en una distribución de frecuencias.
d. Interprete sus hallazgos.

4. a. Calcule una distribución de frecuencias relativas para el agrupamiento de edades que se desarrolló en el ejercicio 2.
b. ¿Qué porcentaje de las edades está entre 55 y 64?
c. ¿Qué porcentaje de las edades es inferior a 35?
d. ¿Un poco más de la mitad de las personas de la muestra son mayores de qué edad?

REPRESENTACIONES DE TALLO Y HOJA

En las secciones anteriores, se mostró cómo organizar datos en una distribución de frecuencias a fin de resumir los datos originales en forma significativa. Una desventaja de ese enfoque hacia la investigación de datos, es la pérdida de información al efectuar los conteos. Por ejemplo, no está clara, a partir de la siguiente distribución de las edades de los nuevos empleados de una empresa la forma en que se distribuyen dichas edades en el grupo 20–29. ¿Están agrupadas muy cerca de los 20 años o se distribuyen de manera más o menos uniforme a través de toda la clase?

Edades de los empleados nuevos	*Marcas de conteo*	*Frecuencias*
20–29	卌 //	7
30–39	卌 卌 卌 卌 /	21
40–49	////	4
50–59	//	2
60–69	/	1

En años recientes ha adquirido extenso uso una técnica que compensa la pérdida de información que ocurre al resumir datos originales. Se denomina *representación de tallo y hoja.* Para elaborar tal representación se utilizan las edades de los nuevos empleados de la Young Foundry, se reemplaza una marca por el último dígito de la edad de un empleado. Las edades de los siete empleados de la primera clase, aparecen entonces como:

2 | 3 4 5 5 7 8 9

Por tanto, puede verse que las edades se presentan de manera más o menos uniforme a lo largo de la clase de edad 20–29.

El siguiente ejemplo muestra los pasos necesarios para elaborar una representación de tallo y hoja.

✱ Ejemplo

Los precios de venta de 45 casas unifamiliares de 2 alcobas en Siesta Key, Florida, se presentan en la tabla 2-8. ¿En qué forma se organizan los datos de precios en una representación de tallo y hoja?

✔ Solución

El *tallo* es el *dígito (o dígitos) que encabeza(n)* la fila (a la izquierda). La *hoja* es el *dígito que termina* la fila (a la derecha). El tallo se coloca a la izquierda de una línea vertical y la hoja (último dígito) a la derecha de la misma. Por ejemplo, obsérvese

que en la tabla 2-8 el primer precio de venta en la esquina superior izquierda es $96 000. El tallo es 9 y la hoja 6. La linea vertical simplemente separa las dos partes de cada número.

TABLA 2-8

Precios de venta de casas unifamiliares de dos dormitorios en Siesta Key, Florida (miles de dólares)

$ 96	$ 93	$ 88	$117	$127
95	113	96	108	94
148	156	139	142	94
107	125	155	155	103
112	127	117	120	112
135	132	111	125	104
106	139	134	119	97
89	118	136	125	143
120	103	113	124	138

Tallo (dígito inicial)		*Hoja (dígito final)*
9	|	6

Los dígitos encabezadores o iniciales para los datos de la tabla 2-8 son 9, 10, 11, . . . , 15. El dígito final para cada precio de venta se registra en la misma línea o renglón que su dígito inicial (tallo). Los tres primeros precios en la columna de la izquierda de la tabla 2-8 se presentarían como:

Tallo	*Hoja*
9	6 5
.	
.	
.	
14	8

Organizando todos los precios de venta se tiene:

Tallo	*Hoja*
8	9 8
9	6 5 3 6 4 4 7
10	7 6 3 8 3 4
11	2 3 8 7 1 3 7 9 2
12	0 5 7 0 5 5 4 7
13	5 2 9 9 4 6 8
14	8 2 3
15	6 5 5

Los dígitos finales de cada renglón están en categoría para formar una representación de tallo y hoja. El primer renglón quedaría:

Tallo	*Hoja*
8	8 9

Las hojas para cada renglón una vez clasificadas de menor a mayor son:

El tallo "9" y sus hojas

Tallo	*Hoja*								
8	8	9							
9	3	4	4	5	6	6	7		
10	3	3	4	6	7	8			
11	1	2	2	3	3	7	7	8	9
12	0	0	4	5	5	5	7	7	
13	2	4	5	6	8	9	9		
14	2	3	8						
15	5	5	6						

Cada renglón de esta representación tiene un tallo y una hoja. El tallo "9" tiene siete hojas y podría ilustrarse como se muestra en la figura.

El enfoque de tallo y hoja es muy flexible. Por ejemplo, supóngase que los números que siguen representan la cantidad de paquetes especiales de Kentucky Fried Chicken (comidas que incluyen piernas de pollo, puré de papas y ensalada) vendidas durante un periodo de cuatro semanas: 2 463, 2 412, 2 543, y 2 488. La representación de tallo y hoja sería entonces:

Tallo	*Hoja*
24	1 6 8
25	4

El tallo tiene los dígitos de las centenas y los millares. El dígito de las unidades se elimina. Por tanto, la hoja es el dígito de las decenas.

En la actualidad se dispone de muchos paquetes de programas (software) de computadora. Estos programas ahorran tiempo, reducen el esfuerzo de cálculo e incrementan la exactitud. Uno de dichos paquetes se denomina MINITAB. Los

resultados del sistema MINITAB para el procedimiento designado "stem" (tallo) se muestran a continuación. Los datos son los de la tabla 2-8. Líneas en gris, como:

```
MTB > stem c1 ;
SUBC > increment = 10
```

indican los comandos MINITAB. Se seguirá esta práctica durante todo el libro.

```
MTB > stem c1 ;
SUBC > increment = 10

Stem - and - leaf of C1                                N = 45
Leaf Unit = 1 . 0

                                                       Valores
                                                       de tallo
   2     8     89
   9     9     3445667
  15    10     334678
  (9)   11     122337789
  21    12     00455577
  13    13     2456899
   6    14     238
   3    15     556
```

Valores de hoja

Obsérvese que la solución MINITAB proporciona cierta información adicional en la columna ubicada a la izquierda de los valores de tallo. Los valores 2, 9, 15, etc. son los totales acumulados. Por ejemplo, el número 15 indica que ha ocurrido un total de 15 observaciones antes del valor 110. Aproximadamente en la mitad hacia abajo de esa columna, aparece el número 9 entre paréntesis. Los paréntesis indican la ubicación de la observación central. Esto es, el valor por abajo del cual ocurren la mitad de las observaciones, se encuentra en ese renglón. Hay un total de 45 observaciones, de manera que el valor medio, si los datos se colocaran en un arreglo ordenado, sería el valor 23º. En este ejemplo, 15 observaciones quedan por abajo de 110. El valor 9 entre paréntesis indica que hay nueve observaciones en el renglón con un tallo de 110. El valor medio sería la observación 23º, o el 8º valor de este renglón. Por tanto, el valor de en medio, o *mediana,* como se denomina, es 118. *Después del renglón de la mediana, los valores disminuyen.* Estos valores representan los totales acumulados "más de". Esto es, existen 21 observaciones de 120 o más, 13 de 130 o más, etc.

El siguiente resultado del MINITAB también utiliza los datos de la tabla 2-8 con respecto a los precios de venta de las casas de dos recámaras en Siesta Key, Florida. Sin embargo, obsérvese que los incrementos son de 5 en vez de 10 que se utilizaron antes. La mediana, o valor medio, sigue siendo 118, determinada considerando que 20 observaciones son de 114 o menos y que hay 4 observaciones entre 115 y 119. Se busca la tercera observación, que es 118.

```
MTB > stem c1

Stem - and - leaf of C1                                N = 45
Leaf Unit = 1.0

     2     8    89
     5     9    344                                      indica
     9     9    5667                              100 - 104    10
    12    10    334                               105 - 109    10
    15    10    678
    20    11    12233
   (4)    11    7789
    21    12    004
    18    12    55577
    13    13    24
    11    13    56899
     6    14    23
     4    14    8
     3    15
     3    15    556
```

AUTOEXAMEN 2-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Las relaciones precio-ganancia para 20 acciones seleccionadas son:

8.3, 9.6, 9.5, 9.1, 8.8, 11.2, 7.7, 10.1, 9.9, 10.8, 10.2, 8.0, 8.4, 8.1, 11.6, 9.6, 8.8, 8.0, 10.4, 9.8.

1. Diseñe una representación de tallo y hoja
2. Explique tal representación.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Una muestra aleatoria del número de valores negociados durante la primera hora de operaciones en la bolsa de San Francisco Stock Exchange, en 1989, reveló estas cifras, redondeadas a decenas:

251 210	240 620	295 550	281 880	250 360	265 370
243 370	254 180	261 910	280 050	253 080	289 160
273 160	278 160	266 110	279 060	272 033	268 820
271 500	270 250	261 170	277 360		

   a. Elabore una representación de tallo y hoja.
   b. Interprete la representación.
6. Utilizando los datos originales del ejercicio 1, obtenga una representación de tallo y hoja e interprétela.

7. El gerente de ventas de un establecimiento de autos está estudiando las tasas de movimiento de varias de las existencias. Una revisión de las tasas de movimiento de las bandas o correas para motor reveló los valores que siguen. (La tasa de movimiento de 6.1 en la esquina superior izquierda significa que la banda de 22 pulgadas tuvo que surtirse 6.1 veces durante el año.)

6.1	5.8	7.2	9.0	8.6	7.6	5.3	6.7
7.0	7.6	6.0	8.1	6.2	6.8	6.3	6.9
7.8	6.1	6.6	6.2	6.9			

   a. Organice las tasas de movimiento en una representación de tallo y hoja.
   b. Interprete la representación.
8. Utilizando los datos originales del ejercicio 2, elabore una representación de tallo y hoja.

REPRESENTACION GRAFICA DE UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Los gerentes de ventas, analistas de valores, directores de hospital y otros ejecutivos con frecuencia necesitan tener una noción rápida de la tendencia en ventas, precios de acciones o costos de administración. Estas tendencias pueden mostrarse utilizando *diagramas o gráficas*. Tres diagramas que representan de manera adecuada, una distribución de frecuencias son el *histograma,* el *polígono de frecuencias* y el *polígono de frecuencias acumuladas.*

HISTOGRAMA

El *histograma* es uno de los medios gráficos de más fácil interpretación. Su elaboración se ilustra en seguida utilizando de nuevo el ejemplo de las rentas mensuales de condominios para vacacionar en el área Sarasota-Bradenton.

* Ejemplo

Rentas mensuales	*Número de unidades*
$ 600-$ 799	3
800- 999	7
1 000- 1 199	11
1 200- 1 399	22
1 400- 1 599	40
1 600- 1 799	24
1 800- 1 999	9
2 000- 2 199	4

¿Cómo se elabora el histograma para esta distribución de frecuencias?

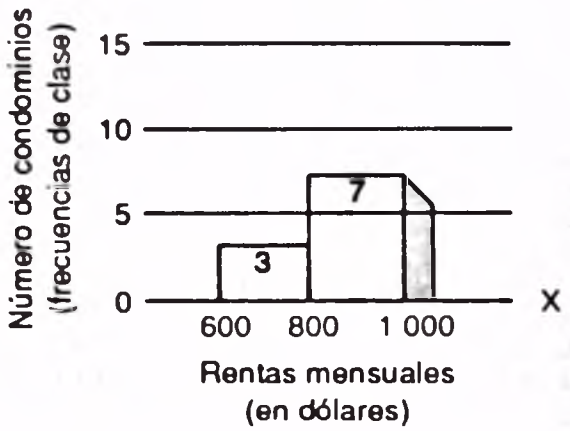
✔ Solución

Para elaborar un histograma, las frecuencias de clase se marcan en la escala de un eje vertical (eje *Y*), y uno horizontal (eje *X*) que marcan los límites declarados, los límites verdaderos o los puntos medios. Se utilizarán los límites declarados y se mostrará sólo el límite inferior de cada clase en el eje *X*.

Obsérvese a partir de la distribución de frecuencias que hay tres unidades en renta en la clase de $600-$799. Por tanto, la altura de la columna para esa clase es 3. Existen siete unidades en la siguiente clase ($800-$999), y lógicamente la altura de la columna es 7. (Véase el diagrama 2-1.) Por tanto, la altura de cada barra representa el número de observaciones en dicha clase.

DIAGRAMA 2-1

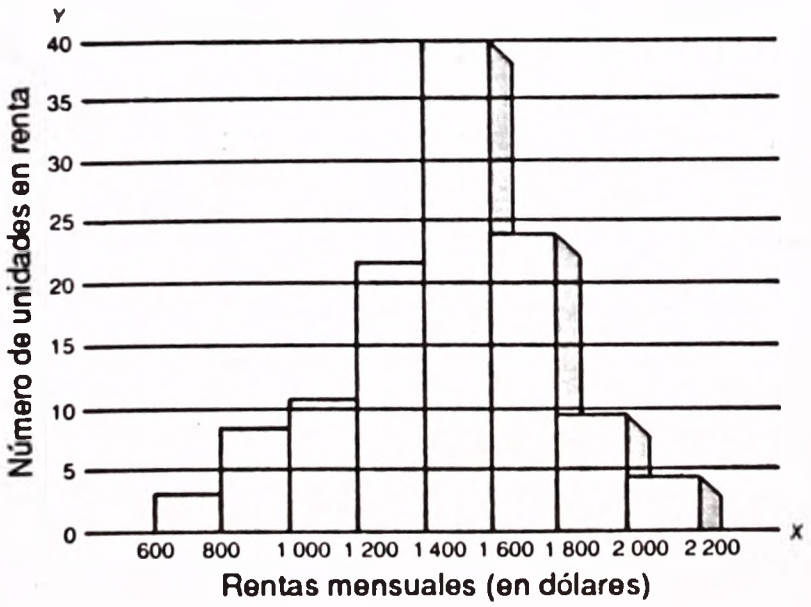
Elaboración de un histograma



Este procedimiento continúa para todas las clases hasta terminar el histograma, según se muestra en el diagrama 2-2.

DIAGRAMA 2-2

Histograma que muestra las rentas de 120 condominios



Las características que siguen son evidentes en el histograma: 1) la renta mensual más baja es aproximadamente $600. 2) la más elevada es aproximadamente $2 200. 3) la mayoría de las rentas están entre $1 200 y $1 800. 4) la mayor concentración está entre $1 400 y $1 600. De esta forma, el histograma proporciona una imagen o noción visual de fácil interpretación de las rentas. Si se hubieran graficado las frecuencias relativas (en vez de las frecuencias de clase), la forma general de la distribución sería muy parecida.

El MINITAB tiene un procedimiento que generará una gráfica de puntos (que no se indica) y un histograma. Utilizando los datos originales de la tabla 2-1 referentes a las rentas de 120 unidades de condominio en el área de Sarasota-Bradenton, Florida, y los puntos medios de clase, el histograma queda como sigue:

```
MTB > hist c1 ;
SUBC> increment = 200 ;
SUBC> start = 700

Histogram of C1 N = 120

Midpoint   Count
    700        3  ***
    900        7  *******
   1100       11  ***********
   1300       22  **********************
   1500       40  ****************************************
   1700       24  ************************
   1900        9  *********
   2100        4  ****
```

POLIGONO DE FRECUENCIAS

El trazo o elaboración de un *polígono de frecuencias* se ilustra utilizando de nuevo las rentas mensuales de condominios. Se necesitan los puntos medios de clase que están en la escala del eje *X*, y las frecuencias de clase, que están en el eje *Y*. (Recuerde que un punto medio de clase es un valor que representa a la clase, y que puede determinarse situando la mitad entre los límites declarados.)

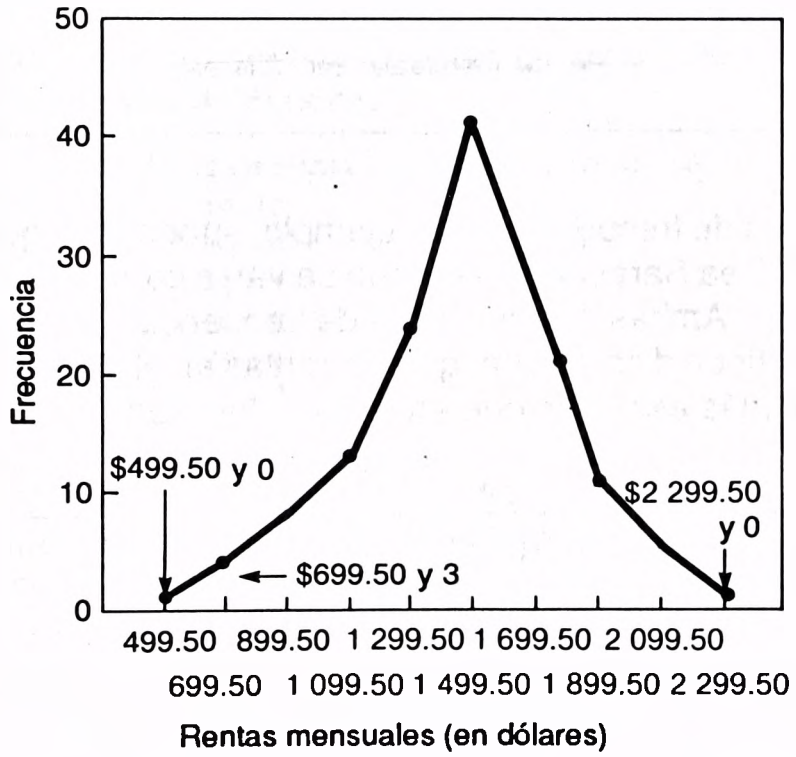
Límites establecidos	*Puntos medios*	*Frecuencias de clase*
$ 600–$ 799	$ 699.50	3
800– 999	899.50	7
1 000– 1 199	1 099.50	11
1 200– 1 399	1 299.50	22
1 400– 1 599	1 499.50	40
1 600– 1 799	1 699.50	24
1 800– 1 999	1 899.50	9
2 000– 2 199	2 099.50	4

Según se observó, la clase $600–$799 está representada por su punto medio, $699.50. Para localizar el primer punto, es necesario trasladarse horizontalmente a $699.50, punto medio, y después verticalmente hasta 3, la frecuencia de clase, y colocar un punto. Los valores X y Y que determinan la ubicación del punto se conocen como *coordenadas*. Las coordenadas del siguiente punto son X = $899.50, Y = 7. Este proceso continúa hasta considerar todas las clases. Después los puntos se unen con segmentos *en orden*. El punto que representa la primera clase se une con el que representa la segunda, y así sucesivamente.

Obsérvese en el diagrama 2-3 que para completar el polígono de frecuencia, se agregaron puntos medios de $499.50 y $2 299.50 a los dos extremos, y el polígono se "ancló" al eje horizontal en la frecuencia cero. Estos dos valores, $499.50 y $2 299.50, se obtuvieron restando el intervalo de clase de $200 a partir del punto medio menor de la distribución ($699.50) y sumando $200 al punto medio mayor ($2 099.50). Al anclar los dos extremos del polígono de frecuencias al eje X, el área total bajo el polígono es ahora igual al total de las frecuencias (120).

DIAGRAMA 2-3

Polígono de frecuencias que muestra las rentas mensuales de 120 condominios

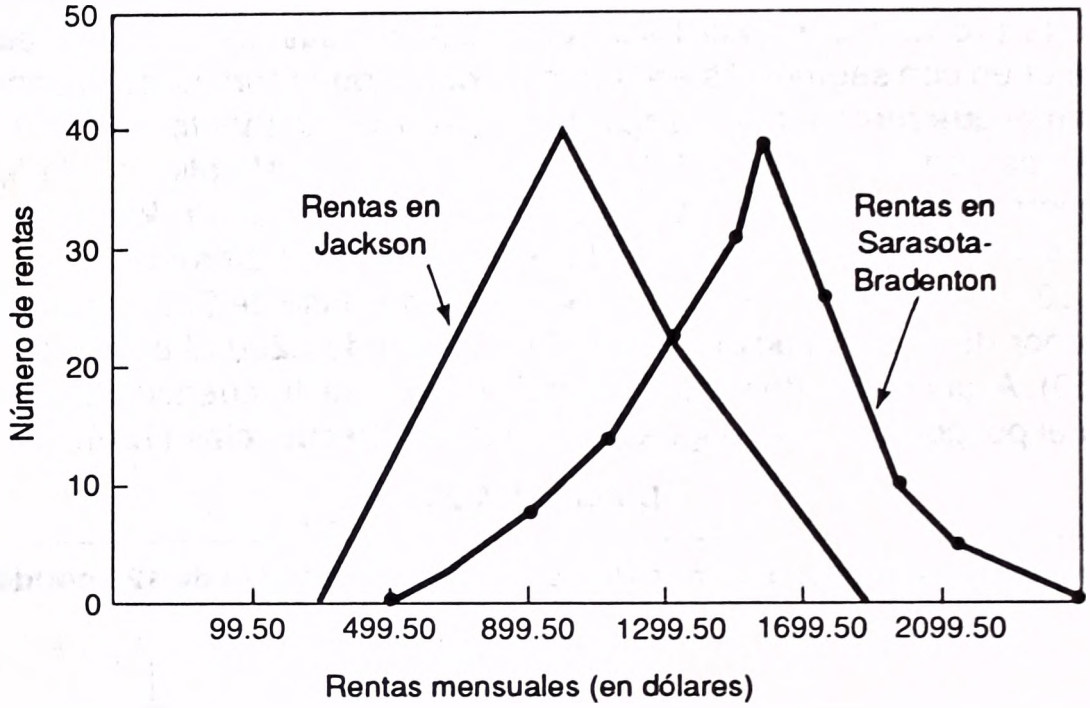


Tanto el histograma como el polígono de frecuencias permiten obtener una imagen rápida de las principales características de los datos (máximos, mínimos, concentración de puntos, etc.).

Aunque el objetivo de las dos representaciones es similar, el histograma tiene la ventaja de indicar cada clase como un rectángulo, expresando el área de cada barra rectangular, el número total de frecuencias en la clase. El polígono de frecuencias tiene una ventaja notable con respecto al histograma para comparar dos

DIAGRAMA 2-4

Distribución de rentas mensuales en las áreas de Sarasota-Bradenton y Jackson



o más distribuciones de frecuencias. Por ejemplo, supóngase que las rentas de los condominios en el área Sarasota-Bradenton se van a comparar con las del área de Jackson, Mississippi. Ambas distribuciones de frecuencias se tienen en el diagrama 2-4. Es obvio, a partir de dicha figura, que las rentas en el área Sarasota-Bradenton por lo general son más elevadas que en el área Jackson.

AUTOEXAMEN 2-5

Las respuestas dan al final del capítulo.

Las exportaciones anuales de un grupo de pequeñas empresas farmacéuticas son:

Exportaciones (millones de dólares)	*Número de empresas*
$ 2–$ 4	6
5– 7	13
8– 10	20
11– 13	10
14– 16	3

1. Represente las exportaciones en un histograma.
2. ¿Cuáles son los puntos medios?
3. Represente las exportaciones en un polígono de frecuencias.
4. Interprete las gráficas.

El número de frecuencias de clase en el diagrama 2-4 es aproximadamente igual entre las dos áreas. Si la diferencia en el número de frecuencias de clase fuera muy grande, por ejemplo, 40 unidades en Sarasota-Bradenton y 500 en Jackson, permitiría una mejor comparación, cambiar las frecuencias de clase a frecuencias relativas y graficar después los datos. Esta situación ocurre en los ejercicios 11 y 12.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Las puntuaciones obtenidas en una prueba de aptitud mecánica se organizaron en la siguiente distribución.

Puntuaciones de pruebas	*Número de puntuaciones*
100–119	6
120–139	17
140–159	38
160–179	15
180–199	4

   a. Represente la distribución en un histograma
   b. Represente la distribución en un polígono de frecuencias.
   c. Utilizando los dos diagramas, interprete la distribución.

10. Los pesos de 75 mazorcas de una variedad de maíz (Growfast), se registraron y resumieron en la siguiente distribución:

Pesos en onzas	*Número de mazorcas*
16–17	12
18–19	36
20–21	14
22–23	8
24–25	4
26–27	1

   a. Represente los valores en un histograma
   b. Represente los valores en un polígono de frecuencias.
   c. Con base en los diagramas, interprete la distribución.

11. Se está realizando un estudio acerca del tiempo que se necesita para ensamblar un aparato eléctrico de enchufe utilizando el método Quaz en comparación con el método Gonnert. Los tiempos donde se utilizó el método Quaz se almacenaron en la computadora y fue un trabajo sencillo organizarlos en una distribución de frecuencias. Sin embargo, se hizo un gran esfuerzo para determinar los tiempos de ensamble utilizando el método Gonnert, de manera que sólo se eligieron 50. Las dos distribuciones son:

	Número estudiado	
Tiempos en minutos	*Método Quaz*	*Método Gonnert*
5– 7	120	4
8–10	426	11
11–13	1 060	25
14–16	286	7
17–19	108	3

A fin de comparar los dos métodos que utilizan polígonos de frecuencias, primero es necesario convertir las frecuencias de clase a frecuencias relativas (debido a que el número estudiado para el método Quaz es mucho mayor que para el método Gonnert).

a. Convierta a frecuencias relativas las frecuencias de clase para ambas distribuciones.
b. En un mismo diagrama trace los dos polígonos que representan los tiempos de ensamble.
c. Obtenga conclusiones en lo referente a los tiempos de ensamble.

12. La Great Eastern Insurance Company está estudiando las reclamaciones por daños a automóviles de cinco años de antigüedad o más, y para automóviles con menos de cinco años. Los datos originales se tabularon en las siguientes distribuciones de frecuencias:

	Número de reclamaciones	
Monto de la reclamación	*Autos de cinco años o más*	*Autos de menos de cinco años*
$ 200–$ 499	30	86
500– 799	129	212
800– 1 099	20	368
1 100– 1 399	10	480
1 400– 1 699	6	1 806
1 700– 1 999	2	898
2 000– 2 299	3	150

Las distribuciones se van a representar en una misma gráfica para facilitar la comparación.

a. Convierta a frecuencias relativas las frecuencias de clase para cada distribución.
b. Represente en una gráfica las frecuencias relativas para ambas distribuciones.
c. Interprete la gráfica.

POLIGONOS DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

Regresaremos al ejemplo anterior de las rentas de condominios. ¿Cuántos se rentan en más de $950 mensuales? ¿Qué porcentaje se renta en menos de $1 900 mensuales? Las respuestas a estas preguntas pueden aproximarse desarrollando una *distribución de frecuencias acumuladas* y trazando un *polígono de frecuencias acumuladas,* a veces denominado *ojiva.* Un polígono de frecuencias acumuladas se utiliza *cuando se desea determinar cuántas observaciones se encuentran por encima o por abajo de ciertos valores.*

Un *polígono de frecuencias acumuladas "menos de"* puede utilizarse para responder preguntas como, "¿qué porcentaje de las rentas es menor que $1 700?" y "¿cuántas de las rentas son menores que $1 900 mensuales?" Una distribución de frecuencias acumuladas "menos de " indica cuántos elementos de la distribución tienen un valor menor que el límite superior de la primera clase, menor que el límite superior de la segunda, menor que el límite superior de la tercera clase, etc.

De manera semejante, *un polígono de frecuencias acumuladas "más de"* puede contestar preguntas como éstas: "¿qué porcentaje de las rentas es más de $1 000 mensuales?" y "¿cuántas rentas mensuales del estudio son superiores a $2 000?".

Una distribución de frecuencias acumuladas "más de" indica cuántos elementos de la distribución tienen un valor mayor que o igual al valor del límite inferior de la primera clase, mayor que o igual al valor del límite inferior de la segunda clase, mayor que o igual al valor del límite inferior de la tercera clase, etc.

Polígono de frecuencias acumuladas menor que

* Ejemplo

Se repite la distribución de frecuencias para las rentas en el área Sarasota-Bradenton.

Rentas mensuales	*Número de rentas (frecuencias de clase)*
$ 600–$ 799	3
800– 999	7
1 000– 1 199	11
1 200– 1 399	22
1 400– 1 599	40
1 600– 1 799	24
1 800– 1 999	9
2 000– 2 199	4
Total	120

¿Cómo se elabora una distribución de frecuencias acumuladas "menor que" y un polígono acumulado "menos de"?

✔ Solución

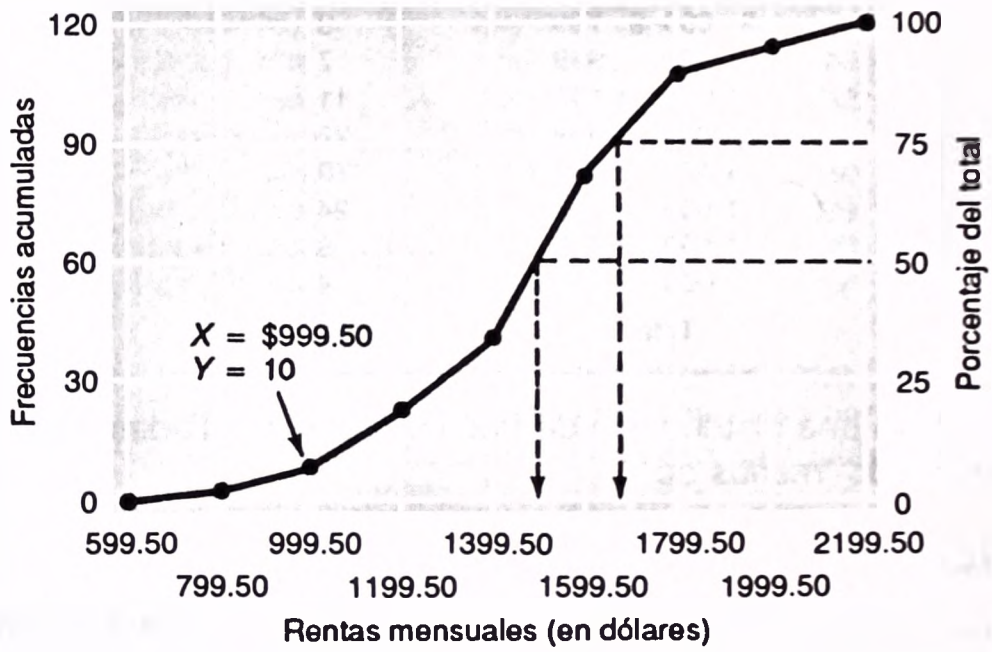
Recurriendo a la tabla anterior, obsérvese que tres de las rentas están en la clase $600–$799. Sin embargo, se sabe que el verdadero límite superior de esa clase es en realidad $799.50, ya que incluye todas las rentas hasta $799.50. Esas tres rentas además de las 7 en la siguiente clase más baja, un total de 10 rentas, son menores que $999.50. El número acumulado de frecuencias para la siguiente clase es 21, que se obtiene de 3 + 7 + 11. Este proceso para determinar las frecuencias acumuladas continúa para todas las clases.

Rentas mensuales	*Frecuencias de clase*		*Frecuencias acumuladas*	*Obtenido por*
Menos de $ 599.50	0	Sumar	0	
Menos de 799.50	3	hacia	3	
Menos de 999.50	7	abajo	10	← 3 + 7
Menos de 1 199.50	11		21	← 3 + 7 + 11
Menos de 1 399.50	22	↓	43	← 3 + 7 + 11 + 22
Menos de 1 599.50	40		83	
Menos de 1 799.50	24		107	
Menos de 1 999.50	9		116	
Menos de 2 199.50	4		120	

Los límites superiores verdaderos y las frecuencias acumuladas se grafican para obtener polígonos de frecuencias acumuladas "menos de" (véase el diagrama 2-5). El primer punto es X = \$599.50, Y = 0. Las coordenadas del siguiente punto son \$799.50 y 3; las siguientes son \$999.50 y 10; y así sucesivamente. (Observación técnica: si no se sabe cómo se redondearon los datos, o si los valores fueran números enteros, como un número de niños, por ejemplo 0, 1, 2, 3, . . . , en este problema se podrían utilizar \$600, \$800, \$1 000, etc., para el eje X.)

DIAGRAMA 2-5

Polígono de frecuencias acumuladas "menos de" para las rentas



A continuación se mencionan algunas cifras aproximadas a partir de la gráfica. Se tiene que 50% de las rentas son menores que \$1 500 mensuales. A esta conclusión se llega trazando una línea punteada desde 50% hasta la curva de distribución, y bajando verticalmente al eje X. Tres de cada cuatro rentas (75%) son menores que, aproximadamente, \$1 675 mensuales.

Polígono de frecuencias acumuladas mayor que

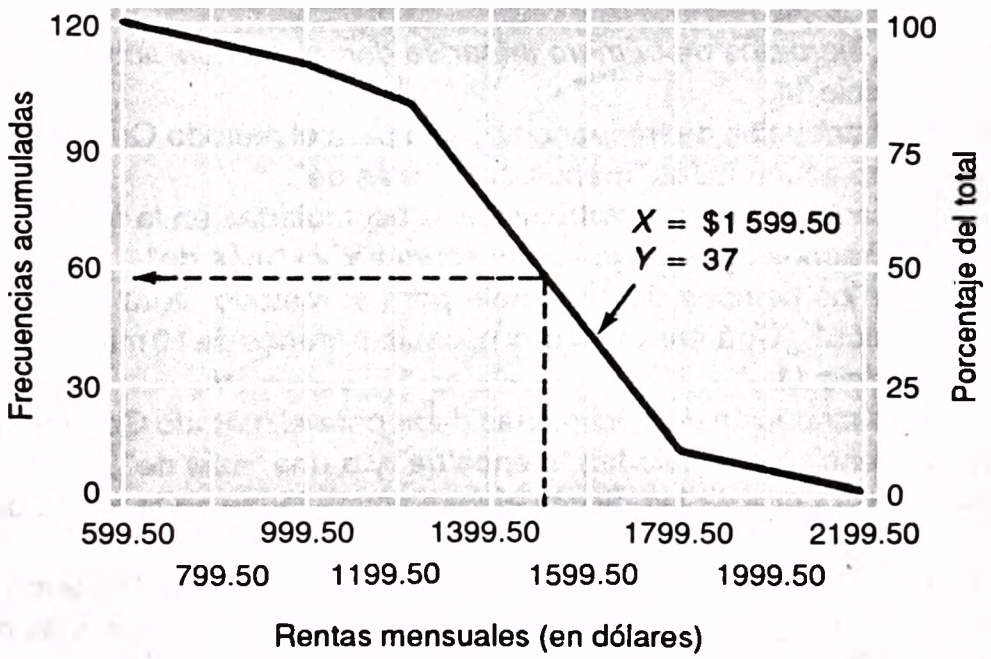
Una distribución de frecuencias acumuladas mayor que, "mas de", se traza iniciando con la clase mayor y "laborando" hacia atrás, sumando las frecuencias hasta llegar a la clase más baja. Para trazar un polígono de frecuencias acumuladas "mayor que", se utilizan los límites verdaderos inferiores y sus frecuencias acumuladas correspondientes. De nuevo se utiliza el límite verdadero. Se sabe que el

límite inferior de la clase $800–$999 en realidad no es $800 porque incluye todas las rentas desde $799.50. Por tanto, $799.50 y 117 son las coordenadas del punto para esa clase (véase el diagrama 2-6).

Rentas	*Frecuencias de clase*		*Frecuencias acumuladas*	*Obtenido con*
Más de $ 599.50	3		120	
Más de 799.50	7		117	
Más de 999.50	11		110	
Más de 1 199.50	22	↑	99	
Más de 1 399.50	40		77	
Más de 1 599.50	24	Sumar	37	← 4 + 9 + 24
Más de 1 799.50	9	hacia	13	← 4 + 9
Más de 1 999.50	4	arriba	4	
Más de 2 199.50	0		0	

DIAGRAMA 2-6

Polígono de frecuencias acumuladas "más de" para las rentas



Si se desea determinar cuántas rentas son mayores que $1 500, se trazaría una línea verticalmente desde $1 500, según se muestra, hacia el polígono y después hacia la izquierda al eje *Y*. El número correspondiente en el eje *Y* es aproximadamente 57, lo cual significa que 57 rentas son de más de $1 500 mensuales.

AUTOEXAMEN 2-6

Las respuestas dan al final del capítulo

Una empresa comercial organizó en una tabla los salarios (por hora) de 80 empleados de medio tiempo y de tiempo completo. Por ejemplo, incluyó un salario de $4.49 en la clase $2–$4 pero uno de $4.50, en la siguiente clase superior ($5–$7). He aquí la tabla.

Sueldos por hora	*Número de sueldos*
$2–$4	18
5– 7	36
8–10	20
11–13	6

1. ¿Cómo se denomina la tabla?
2. Desarrolle una distribución de frecuencias acumuladas "menos de" y represéntela en un polígono de frecuencias acumuladas "menos de".
3. Desarrolle una distribución acumulada "más de" y trace el polígono con acumulación adecuada.
4. Con base en los dos polígonos de acumulación, ¿cuántos empleados ganan $6 o menos la hora? ¿La mitad de los empleados ganan un salario de, o más? ¿Cuántos empleados ganan $10 o más? ¿Veinte empleados ganan, o más?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. Consulte el ejercicio 11.
    a. Convierta la distribución de frecuencias dada para el método Quaz a una distribución de frecuencias acumuladas "menos de" y "más de".
    b. Represente cada una de las distribuciones acumuladas en la forma de un polígono acumulativo "menos de" y un polígono acumulativo "más de".
    c. ¿La mitad de los tiempos de ensamble para el método Quaz fueron superiores a cuántos minutos? ¿Cuántas unidades necesitan menos de 10 minutos para armarse?
14. Consulte el ejercicio 11.
    a. Convierta la distribución de frecuencias dada para el método Gonnert a una distribución de frecuencias acumuladas "menos de" y a una "más de".
    b. Represente cada una de las distribuciones acumuladas en la forma de un polígono acumulativo "menos de" y uno "más de".
    c. Para el método Gonnert, ¿la mitad de los tiempos de ensamble fueron de menos de cuántos minutos? ¿Cuántas unidades de ensamble necesitaron más de 15 minutos para armarse?
15. Consulte el ejercicio 12.
    a. Convierta la distribución de frecuencias dada para el número de reclamaciones para automóviles de cinco años o más a una distribución de frecuencias acumuladas "menos de" y a una "más de".
    b. Muestre las distribuciones acumuladas en la forma de un polígono acumulado "menos de" y uno "más de".
    c. Aproximadamente, ¿cuántas reclamaciones fueron menores de $1 200? ¿y de más de $1 200? ¿Qué porcentaje de las reclamaciones fueron de menos de $900?

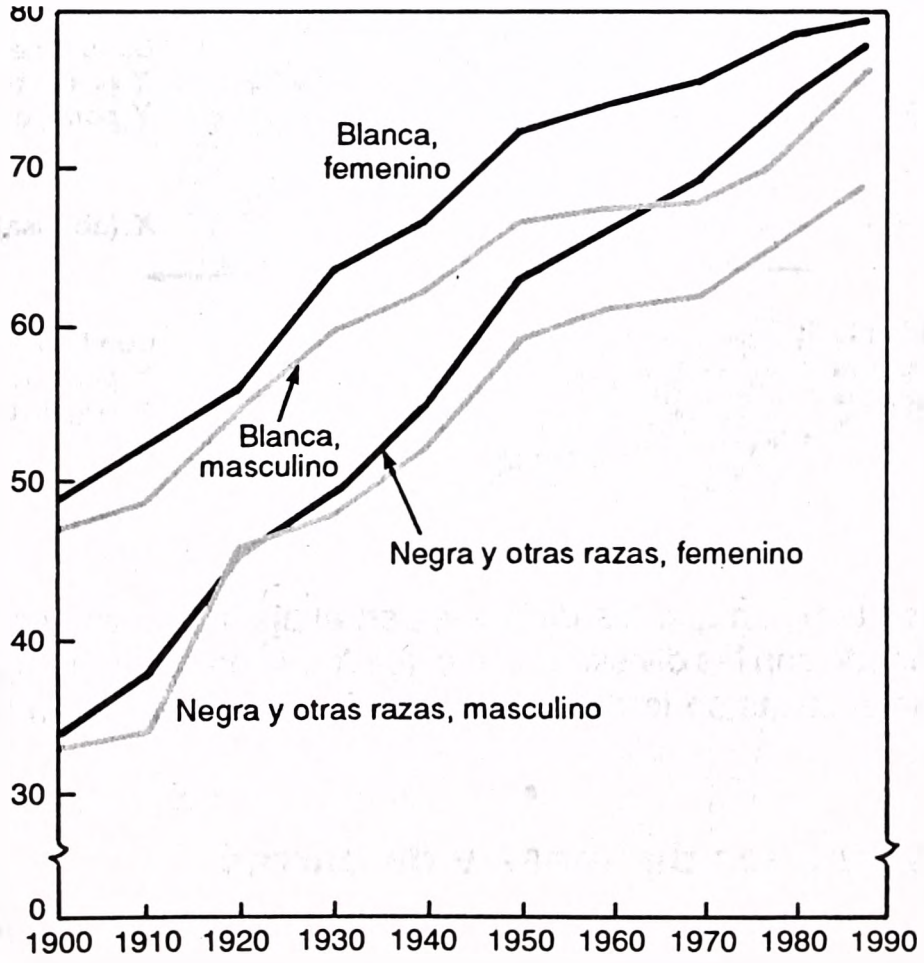
16. Consulte el ejercicio 12.
    a. Convierta la distribución de frecuencias dada para el número de reclamaciones para automóviles con menos de cinco años una distribución de frecuencias acumuladas "menos de" y a una distribución acumulativa "más de".
    b. Represente las distribuciones acumulativas en la forma de un polígono "menos de" y de un polígono "más de".
    c. Aproximadamente, ¿cuántas reclamaciones fueron de menos de $1 500? ¿Y de más de $1 500? ¿Qué porcentaje de las reclamaciones fue de más de $1 500?

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS DATOS

Para condensar algunos datos sobre renta de condominios, se les organizó en una tabla denominada de distribución de frecuencias. Después se representaron los datos en diagramas: un histograma, un polígono de frecuencias y un polígono de frecuencias acumuladas. El diagrama 2-7 muestra otra forma de representar en forma gráfica.

DIAGRAMA 2-7

Esperanza de vida al nacer por raza y sexo: 1900 - 1989

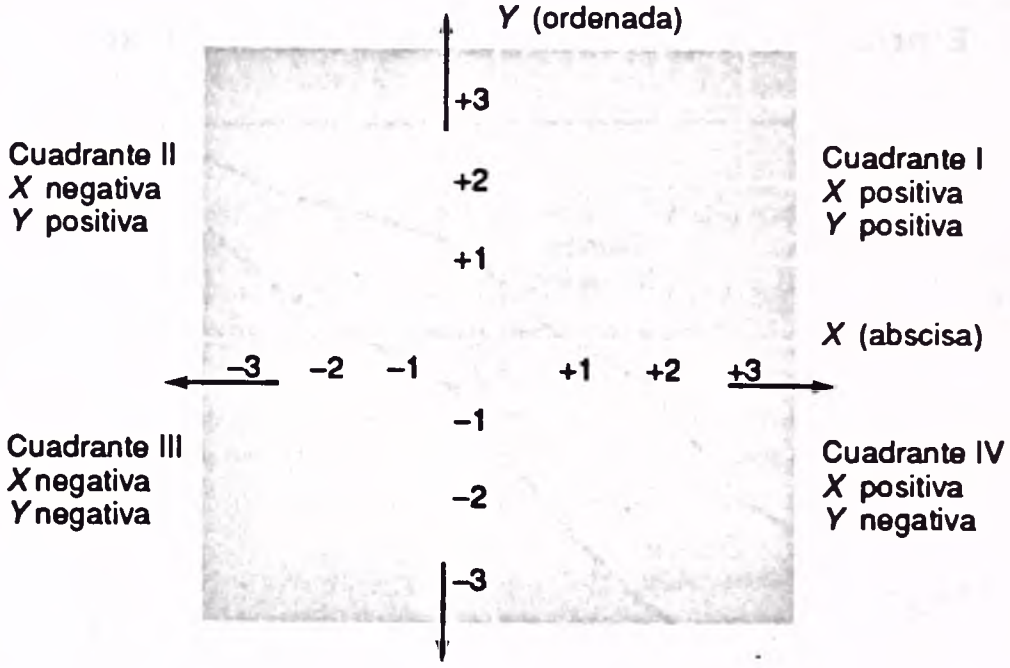


Fuente: National Center for Health Statistics, U.S. Department of Health and Human Services.

En el diagrama 2-7 se muestra el firme incremento continuo en la esperanza de vida de negros y blancos desde 1900. Se interpreta la línea marcada "Negros y otras razas, varones" indicando que sólo la mitad de un gran grupo de estas personas nacidas en 1900 vivieron hasta la edad de 33. Actualmente la mitad de hombres pueden esperar vivir hasta la edad de 70 años. También, obsérvese que desde 1900 la esperanza de vida de las mujeres de raza negra se ha incrementado con más rapidez que para las blancas. Por el contrario, datos como las ventas de la compañía NCR desde 1970 y las importaciones de Honda Civics desde 1984, pueden representarse gráficamente en un diagrama. Una gráfica bien trazada tiene la ventaja de atraer la atención del lector y mostrar con prontitud tendencias y otras características importantes de los datos.

Ahora se indicará cómo representar datos en forma de gráficas de líneas, de barras y de sectores.

Recuérdese que en álgebra se considera un plano coordenado con cuatro cuadrantes que forman una cuadrilla. Obsérvese en la ilustración siguiente que tanto los valores *X* como los *Y* son positivos en el cuadrante I. Puesto que la mayoría de los datos de administración o negocios son positivos, es el que se usa con más frecuencia.



Considérese también que las divisiones en el eje *Y* (eje vertical) son equidistantes. Igual sucede con las divisiones en el eje *X* (eje horizontal). Al papel impreso con estas características se le denomina *papel cuadriculado* para trazar gráficas coordenadas.

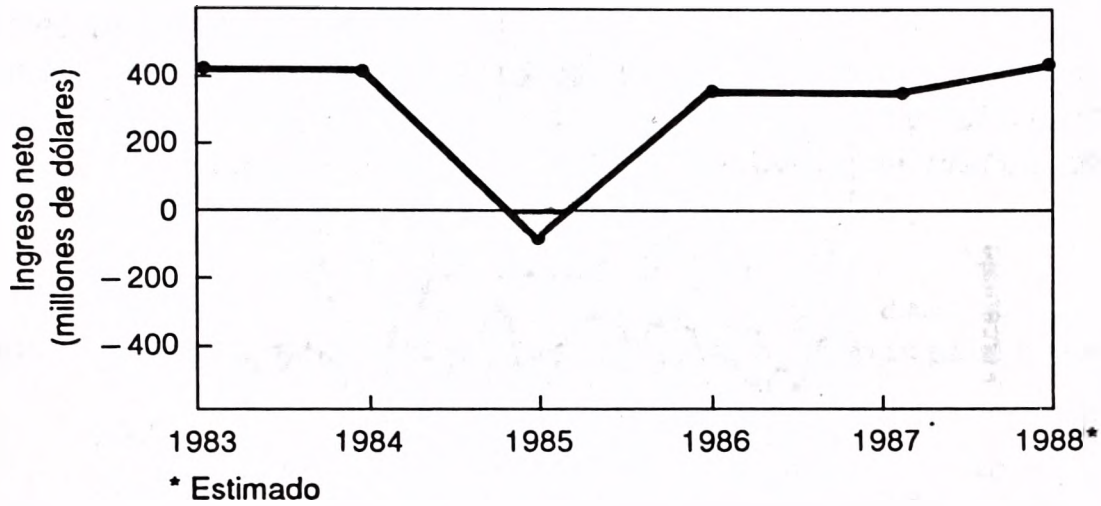
Gráficas simples de líneas y de barras

Las *gráficas simples de líneas* son ideales para representar tendencias de ventas, importaciones y otras series de valores durante un cierto periodo. Por ejemplo, en el diagrama 2-8 se muestra el ingreso neto de la compañía Monsanto

desde 1983. Obsérvese que en 1985 sufrió una pérdida. En este caso se necesitan los cuadrantes I y IV.

DIAGRAMA 2-8

Ingreso neto en la compañía Monsanto

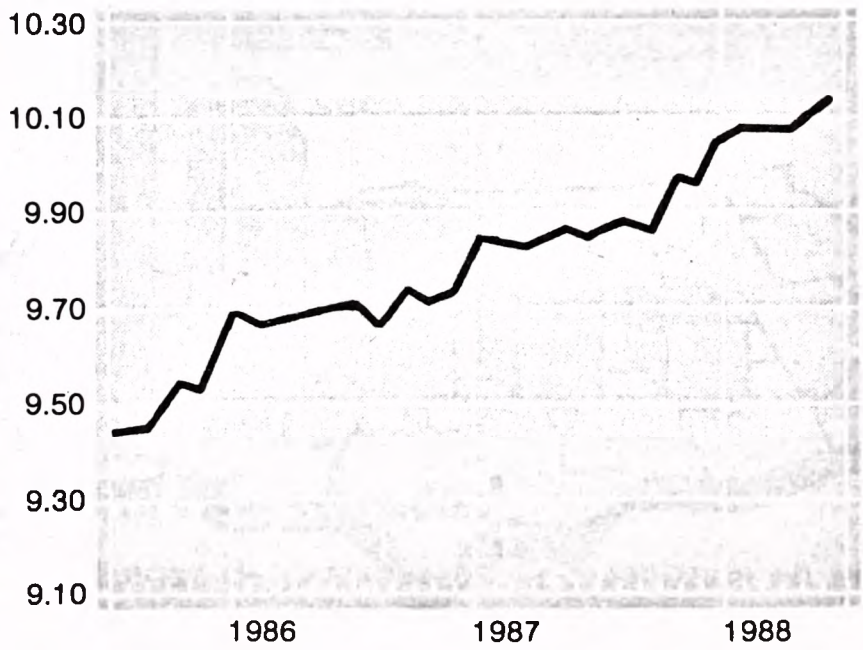


Fuente: Monsanto, *Informe Anual*, 1987, pág. 41

A continuación se dan otros dos ejemplos de gráficas de líneas. El diagrama 2-9 muestra que las retribuciones promedio por hora de trabajadores fabriles aumentaron desde aproximadamente $9.45 (dólares) a mediados de 1985 hasta aproximadamente $10.14, tres años más tarde. El diagrama 2-10 representa el

DIAGRAMA 2-9

Retribución por hora*

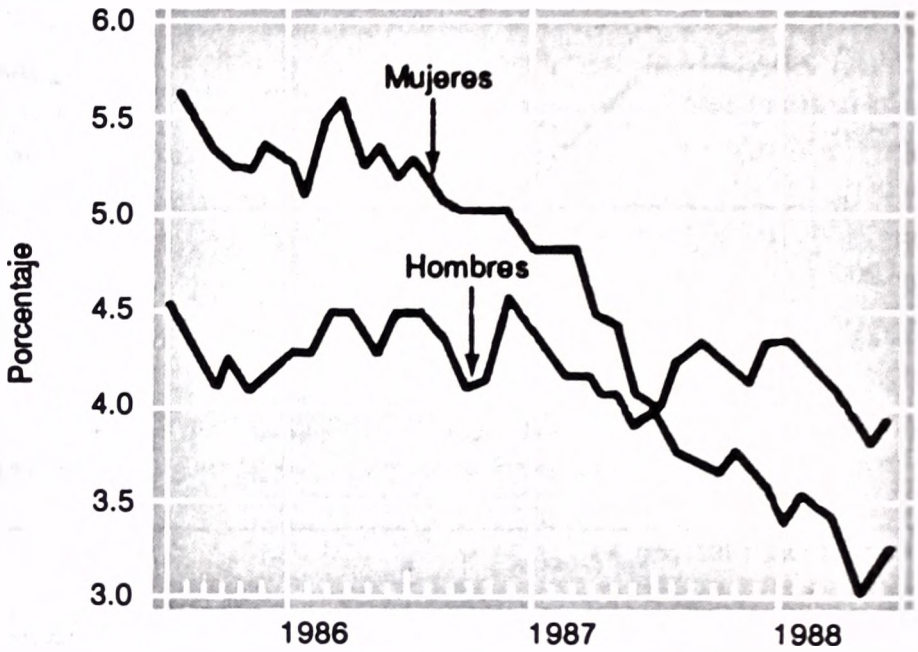


* El salario promedio por hora de los trabajadores de fábricas aumentó en mayo a $10.14, después de una revisión a $10.11 en el mes precedente (Departamento del Trabajo, E.U.).

porcentaje de desempleo tanto para mujeres como para hombres casados. Aunque ambas tasas de desempleo disminuyeron durante ese periodo, la tasa de desem-

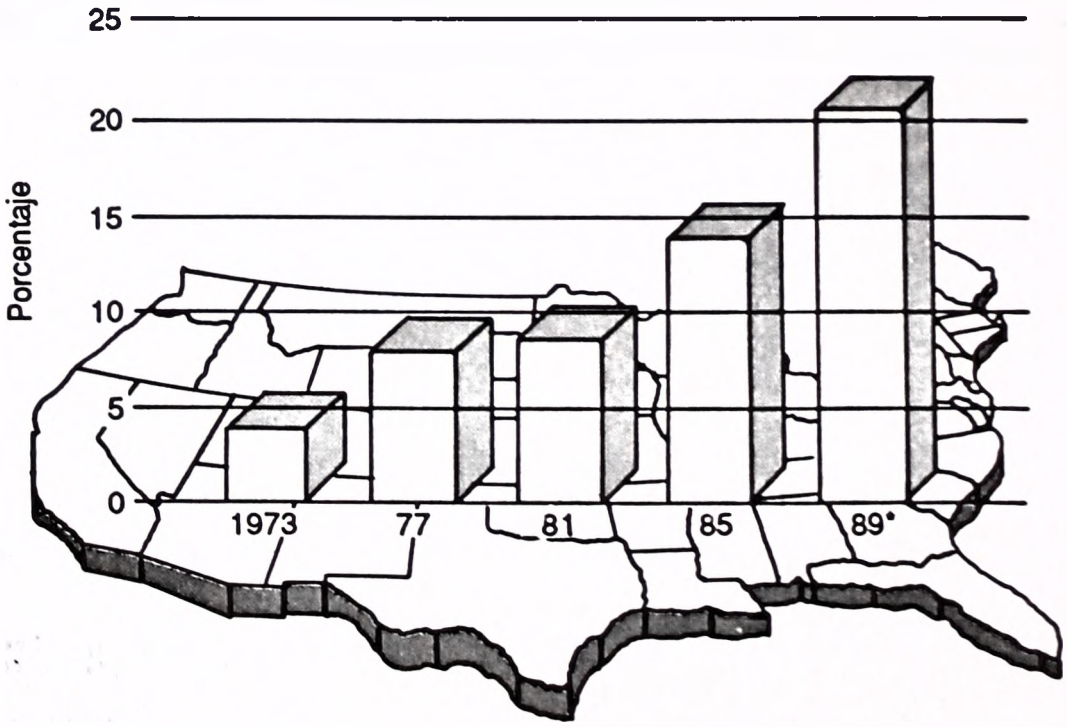
DIAGRAMA 2-10

Personas casadas y sin empleo



DIAGRAMAS 2-11

Energía nuclear como un porcentaje del total



* Estimado
Fuente: Energy Information Administration (de E.U.).

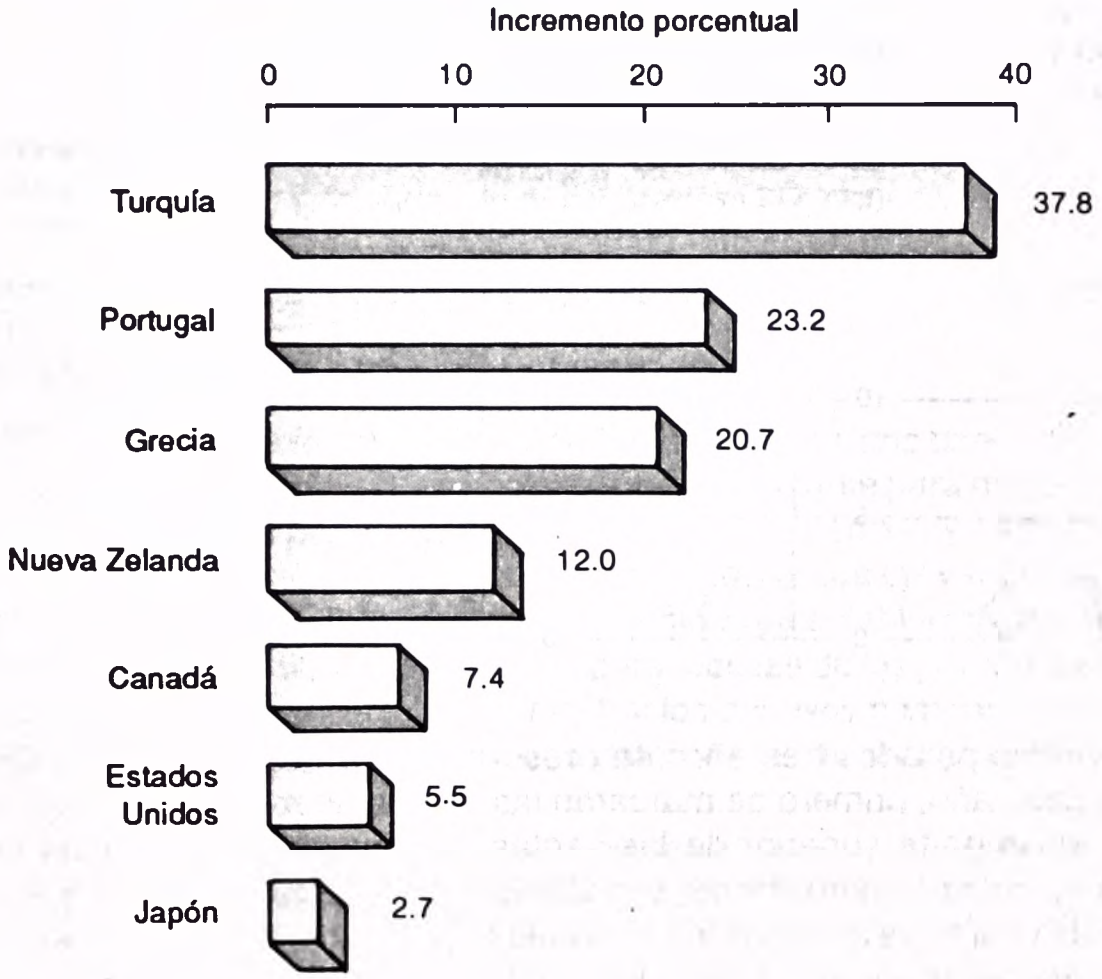
pleo para mujeres casadas estuvo, de manera consistente, por encima de la correspondiente a hombres casados.

El diagrama 2-11 (página anterior) muestra otro tipo de representación, la *gráfica simple de barras*. Esta gráfica es adecuada para mostrar una sola serie a través de un intervalo de tiempo. El diagrama 2-11 denominado *gráfica de barras verticales*, representa la parte de la energía producida en Estados Unidos por plantas nucleares desde 1973.

La Organization for Economic Cooperation and Development informó de los incrementos porcentuales en precios al consumidor entre 1987 y 1988 para países seleccionados. Las modificaciones se muestran en forma de *gráfica de barras horizontales* en el diagrama 2-12 para facilitar la comparación.

DIAGRAMA 2-12

Incrementos porcentuales en precios al consumidor en algunos países, 1987–88



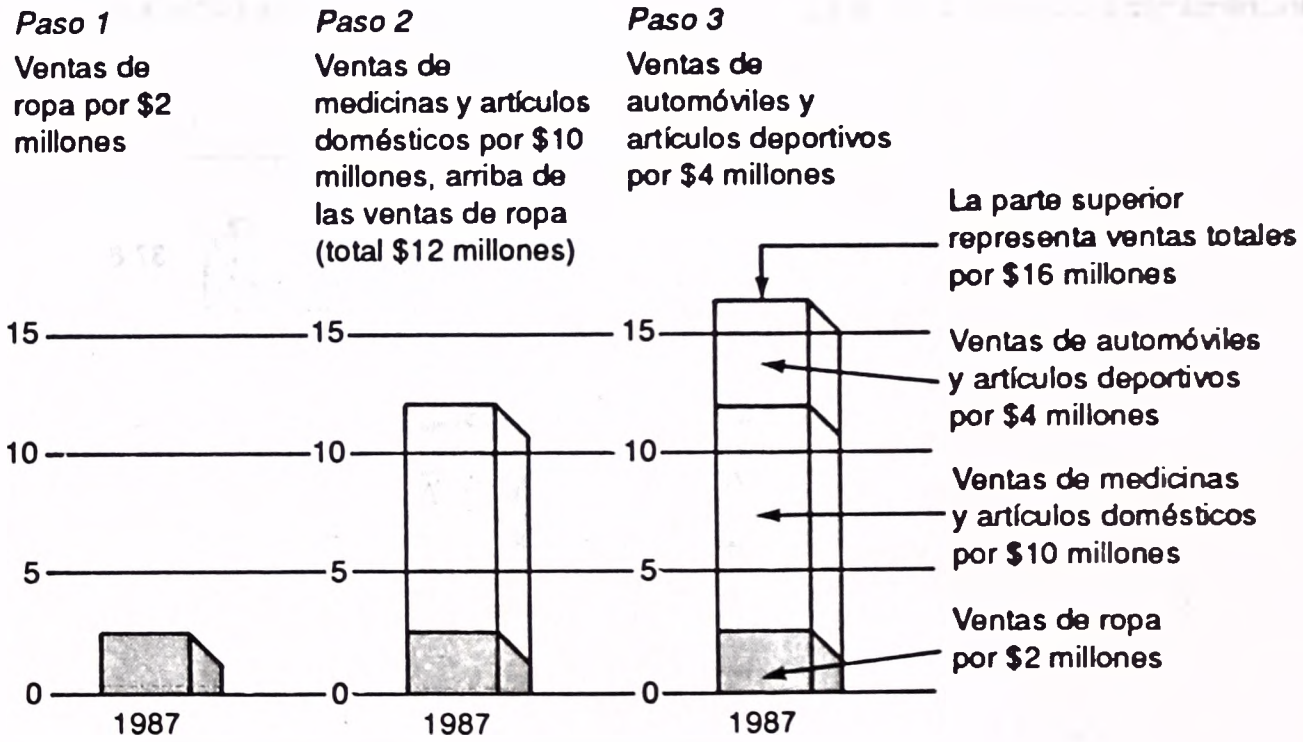
Gráfica de barras seccionadas

Una cadena de tiendas de descuento está organizada en tres grupos para ventas y compras. Cada grupo está dirigido por un gerente general. El cambio en ventas totales para los años de 1987, 1988 y 1989, y el cambio para cada grupo en relación con el total se ha de representar con una *gráfica de barras seccionadas*.

Las ventas de cada grupo son:

Grupo	Ventas (en millones de dólares) 1987	1988	1989
Ropa	$ 2	3	$ 2
Medicinas y artículos domésticos	10	8	3
Automóviles y artículos deportivos	4	8	18
Total	$16	$19	$23

Para elaborar una gráfica de barras seccionadas, primero se grafican las ventas de ropa por $2 millones (dólares) del año 1987 (paso 1).



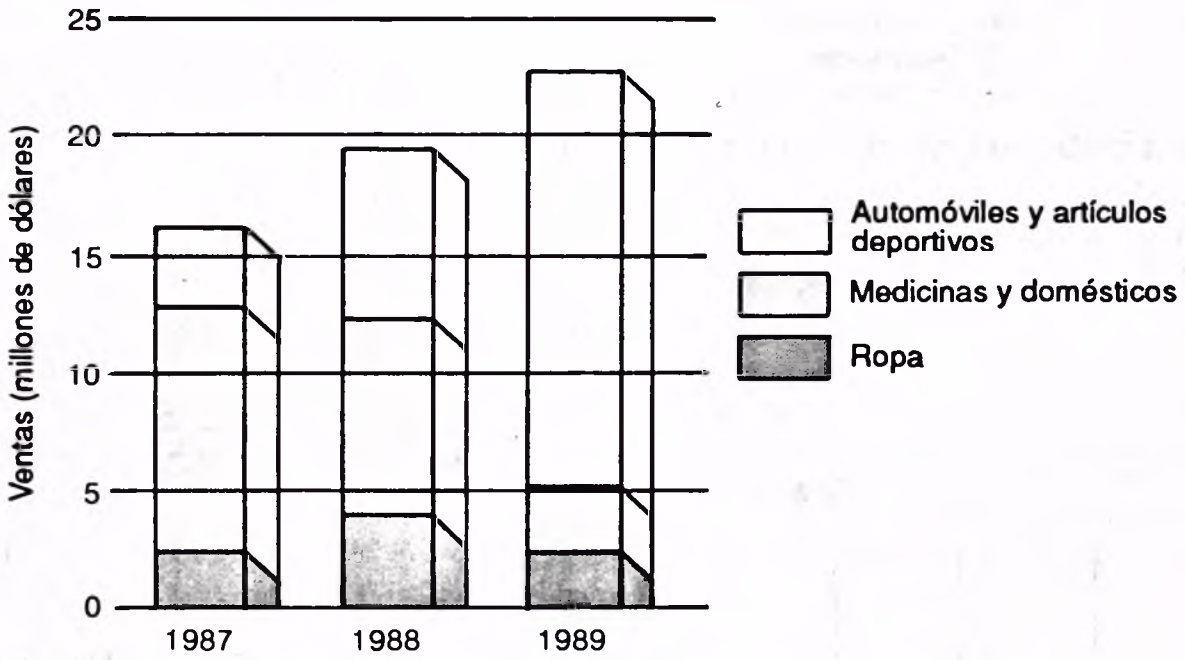
Las ventas para los tres años se presentan en el diagrama 2-13. Obsérvese que para cada año, primero se marcaron las ventas de ropa en la parte inferior de la barra, en la parte superior de las ventas de ropa se marcaron las ventas de medicinas y artículos domésticos, y el último componente o sección que se marcó fue el de las ventas de automóviles y artículos deportivos. La parte superior de cada barra representa las ventas totales del año. La interpretación de la gráfica de barras seccionada es:

1. Las ventas totales aumentaron durante los tres años.
2. Las ventas de ropa permanecieron relativamente constantes durante el periodo de tres años.
3. Las ventas de medicinas y artículos domésticos disminuyeron como un componente del total.

4. Las ventas de automóviles y artículos deportivos aumentaron con rapidez como un componente del total.

DIAGRAMA 2-13

Gráfica de barras seccionadas



Gráficas de barras bidireccionales

A una *gráfica bidireccional,* se le denomina también de *dos direcciones,* de *dos sentidos o bilateral.* Una gráfica bidireccional puede utilizarse para mostrar pérdidas y ganancias, actividades por encima y por debajo de lo normal, y cambios porcentuales de un periodo a otro. Para ilustrar esto, supóngase que las ventas de aparatos electrónicos de casete toca discos compactos, etc., en un establecimiento durante los primeros seis meses de 1988 se han de comparar con las de los primeros seis meses de 1989. En este problema el objetivo es mostrar los *cambios porcentuales* en ventas, no el cambio en cantidades de dinero. Los datos de las ventas (en dólares) son:

	Ventas los primeros seis meses		*Cambio porcentual de 1988 a 1989*
	1988	*1989*	
Aparatos electrónicos de casetes	$ 4 000	$ 3 000	–25
Tocadiscos compactos	1 000	1 500	50
Radios	10 000	5 000	–50
Televisores	100 000	110 000	10
Videocaseteras	25 000	50 000	100

Obsérvese que las ventas de aparatos electrónicos disminuyeron 25% de 1988 a 1989: [($3 000 – $4 000)/$4 000](100). Las ventas de tocadiscos compactos aumentaron 50% durante el mismo periodo: [($1 500 – $1 000)/$1 000](100).

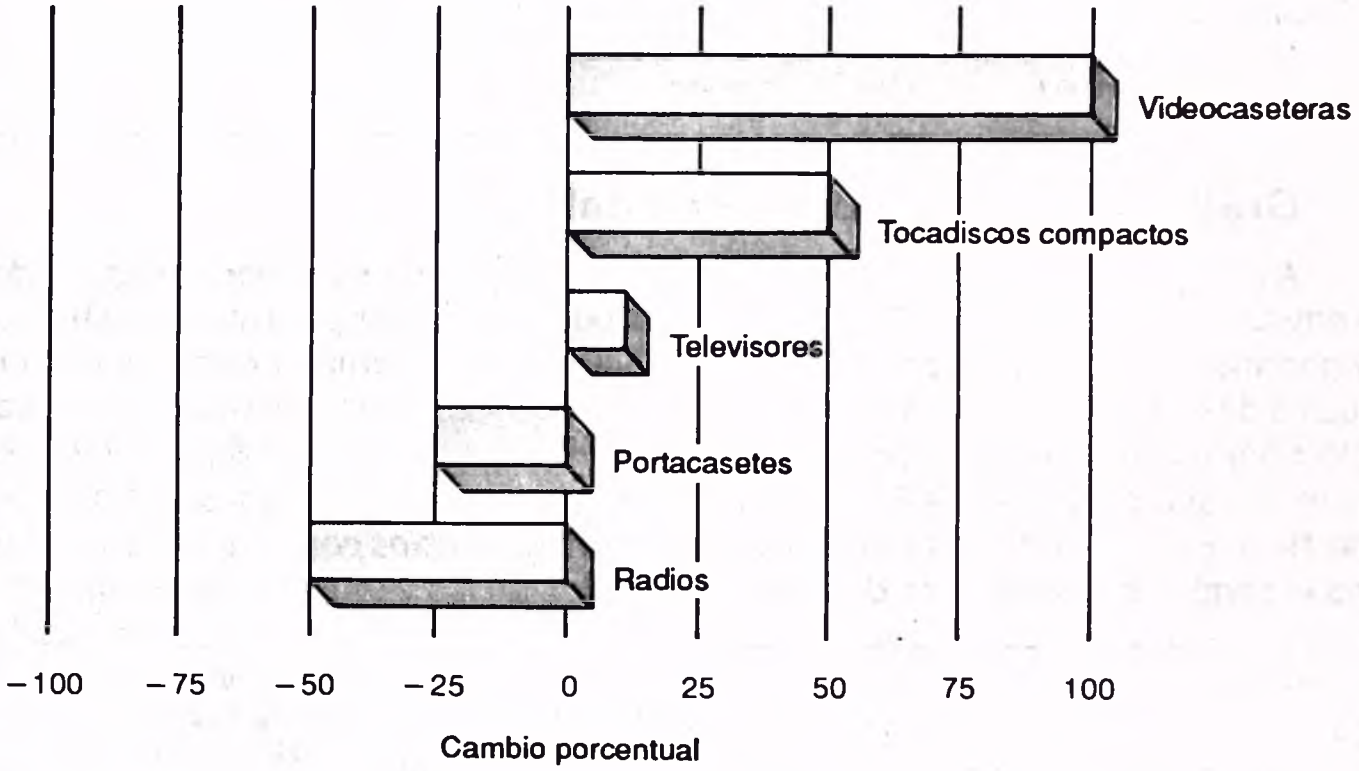
Los cambios porcentuales se dividen en dos grupos. Por lo general los incrementos porcentuales se disponen en orden descendente, y por lo común los decrementos porcentuales se disponen en orden ascendente.

Incrementos porcentuales	*Decrementos porcentuales*
100 Videocaseteras	–25 Portacasetes
50 Tocadiscos compactos	–50 Radios
10 Televisores	

Para elaborar una gráfica de barras bidireccional, los cambios porcentuales por lo general se grafican en el mismo orden ascendente o descendente (diagrama 2-14). La línea central es el origen de cada barra. El método más común consiste en graficar los incrementos porcentuales a la derecha del origen y los decrementos porcentuales a la izquierda, según se ilustra.

DIAGRAMA 2-14

Gráfica de barras bidireccional



Gráficas de sectores (o circulares)

Una *gráfica de sectores*, también denominada *gráfica circular*, resulta muy útil para representar una distribución de frecuencias relativas. El procedimiento que se sigue al elaborar una gráfica de sectores se describirá utilizando los datos de la tabla 2-9, proporcionados por el FBI.

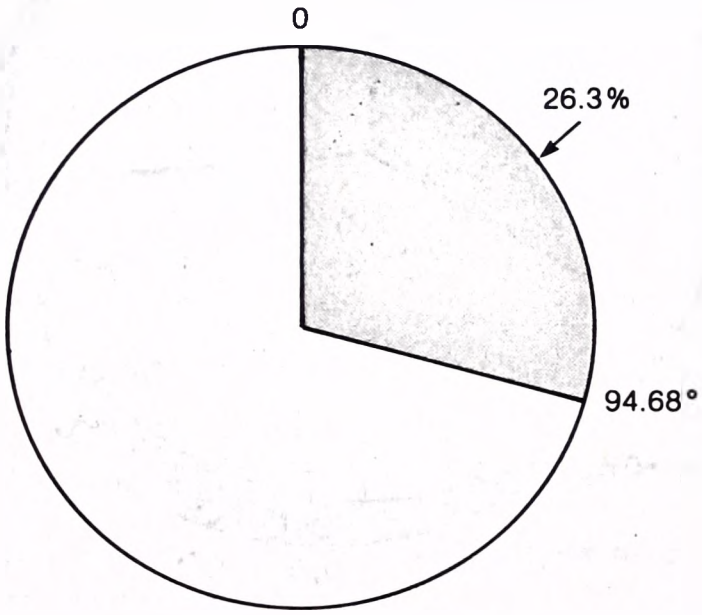
TABLA 2-9

Arrestos, por edad

Edad	*Número de arrestos*	*Frecuencias relativas*	
19 y menos	2 734 756	26.3%	← (2 734 756/10 392 177)(100)
20–19	4 201 950	40.4	
30–39	2 122 973	20.4	
40–49	790 535	7.6	
50 y más	541 963	5.3	
Total	10 392 177	100.0	

Fuente: Federal Bureau of Investigation, *Uniform Crime Reports for the United States.*

Para trazar una gráfica de sectores, el primer paso consiste obviamente en trazar un círculo, y hay 360 grados en el mismo. Para graficar el 26.3% para el grupo de edad "19 y menos" en la distribución de frecuencias relativas, este porcentaje se convierte a grados. La respuesta es 94.68 grados, que se obtiene por 26.3% × 360. Después, utilizando un transportador, se localiza el punto de 94.68 grados en la circunferencia. Las líneas trazadas desde las marcas de 0 y 94.68 grados hacia el centro del círculo abarcan el porcentaje de arrestos totales (26.3%) atribuidos al grupo de edad "19 y menos", según se muestra a continuación.

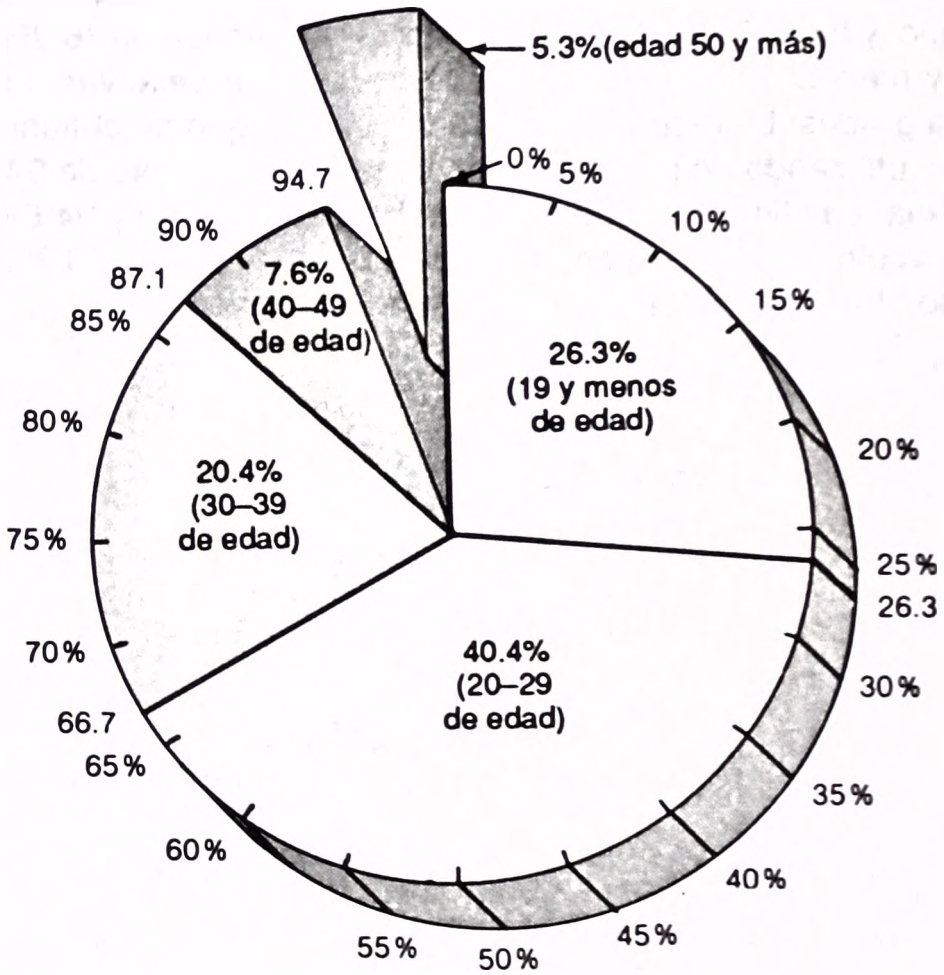


Una forma más fácil y comprensible de representar las frecuencias relativas en una gráfica de sectores consiste en considerar sólo los porcentajes. Según se muestra en el diagrama 2-15, los porcentajes 0, 5, 10, 15, etc., se marcan con una escala uniforme sobre la circunferencia del círculo. Para ubicar el 26.3% para el grupo de edad "19 y menos", se traza una línea desde 0 hasta el centro del círculo, y otra línea similar desde 26.3%. Después, si se suma 26.3% a 40.4% para el grupo de edad 20–29, se obtiene 66.7%. Se traza así una línea (radio) desde el centro del círculo hasta el punto 66.7% . De esta forma el área del círculo entre 26.3% y 66.7%

representa el porcentaje del número total de arrestos atribuidos al grupo de 20-29. Continuando, se suma 20.4% a 66.7%, lo cual da 87.1%. Se traza una línea desde el centro hasta 87.1. El área entre 66.7 y 87.1, o sea 20.4%, muestra el porcentaje del número total de arrestos atribuidos al grupo de 30–39. Este procedimiento continúa hasta terminar con todos los grupos de edad. (Véase el diagrama 2-15.)

DIAGRAMA 2-15

Arrestos por grupos de edad



En el diagrama 2-15 se ilustra una ventaja notable de la gráfica de sectores. Puesto que las áreas en el círculo corresponden directamente a las frecuencias relativas, es muy fácil apreciar qué área es la mayor (en este caso, 40.4%, que representa el grupo de 20–29), y qué sector es el más pequeño (5.3% para el grupo de "50 y más").

AUTOEXAMEN 2-7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una autoridad urbana desea diseñar una gráfica que muestre a los causantes que asistan a una próxima reunión, lo que sucede con el dinero que pagan por impuestos. El monto total recolectado es $2 millones (de dólares). Los gastos fueron: $440 000 para escuelas, $1 160 000 para caminos, $320 000 para administración y $80 000 para suministros. Una gráfica de sectores parece ideal para mostrar la fracción de cada dólar de impuestos que se dedica a escuelas, caminos, administración y suministros. Convierta las cantidades totales a porcentajes del total general y represente los porcentajes en una gráfica de sectores.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

17. El precio al cierre de las acciones comunes de NCR, por trimestre, desde 1985 de acuerdo con el informe anual de NCR y con el *Wall Street Journal* es:

	Al cierre		*Al cierre*
1985		1987	
Primer trimestre	$28\frac{1}{2}$	Primer trimestre	$66\frac{1}{8}$
Segundo trimestre	$30\frac{5}{8}$	Segundo trimestre	$74\frac{1}{2}$
Tercer trimestre	$33\frac{1}{8}$	Tercer trimestre	$82\frac{3}{8}$
Cuarto trimestre	$40\frac{1}{4}$	Cuarto trimestre	$63\frac{1}{4}$
1986		1988	
Primer trimestre	$43\frac{3}{4}$	Primer trimestre	$66\frac{1}{2}$
Segundo trimestre	$51\frac{3}{8}$		
Tercer trimestre	$47\frac{1}{8}$		
Cuarto trimestre	$44\frac{1}{8}$		

Represente la tendencia de los precios al cierre de las acciones en una gráfica simple de líneas o en una gráfica de barras.

18. El Departamento del Ejército (de Estados Unidos) informó estas cifras sobre el personal en servicio activo en 1970 y 1987:

	Oficiales en servicio		*Oficiales no asignados*		*Personal alistado*	
Año	*Masc.*	*Fem.*	*Masc.*	*Fem.*	*Masc.*	*Fem.*
1970	136 469	5 235	23 005	13	1 141 537	11 476
1987	93 973	11 087	15 225	322	660 847	71 058

Represente los cambios porcentuales, por sexo, para cada uno de los tres grupos entre 1970 y 1987 en forma de gráfica de barras bidireccional.

19. De acuerdo con el Bureau of Justice (de Estados Unidos) el número de reclusos con sentencia de muerte, por grupo de edad, es:

Edad	*Número*
Menos de 20 años	13
20–24 años	212
25–34 años	804
35–54 años	531
55 años y más	31

a. Dependiendo de su objetivo, seleccione una forma de gráfica y represente los datos.
b. ¿Cuál es el objetivo de su gráfica?

20. Una empresa petrolera en su informe anual mencionó las siguientes ventas netas y el costo de ventas desde 1983 (en millones de dólares):

	1983	*1984*	*1985*	*1986*	1987
Ventas netas	$19 116	$15 586	$14 534	$15 344	$17 096
Costo de ventas	15 776	12 895	12 287	13 486	14 698

Represente en una gráfica la tendencia de estos dos conceptos desde 1983.

RESUMEN

Una parte de este capítulo estuvo dedicada a la organización de datos originales en *distribuciones de frecuencias*. Para elaborar una distribución de frecuencias, los datos se marcan por clases y las marcas se cuentan. A tales cuentas se les denomina *frecuencias de clase*. Una distribución de frecuencias revela características de los datos como su diseminación y la región en la que se concentran las observaciones. Los datos pueden describirse además en forma gráfica construyendo un *histograma*, un *polígono de frecuencias* o un *polígono de frecuencias acumuladas*.

Se examinó otra forma de describir datos, que es por medio de una gráfica o un diagrama. La mayoría de los datos de administración y económicos se grafican utilizando *papel cuadriculado*, pues por lo general se pretende mostrar los cambios en la cantidad de ganancia y la de producción de un periodo a otro. Se mostraron *gráficas de líneas*, de *barras*, bidireccionales, de barras seccionadas y de sectores. Existen otros tipos de representaciones como los pictogramas, que no se consideraron.

Recapitulación

I. Distribuciones de frecuencias.
   A. El objetivo de una distribución de frecuencias es organizar datos no agrupados (originales) en alguna forma significativa.
   B. Una distribución de frecuencias es un agrupamiento de datos en clases que muestran el número de valores que contiene cada uno.
   C. El procedimiento es:
      1. Se elabora una ordenación, que es una lista de los valores ordenados de menor a mayor, o viceversa.

2. Se decide el tamaño del intervalo de clase. Si se ha establecido el número de clases, el intervalo de clase sugerido puede determinarse por medio de

$$\frac{\text{Mayor valor} - \text{Menor valor}}{\text{Número de clases}}$$

Si no se tiene la seguridad del número de clases que se van a utilizar, el intervalo de clase sugerido puede determinarse utilizando esta fórmula:

$$\frac{\text{Mayor valor} - \text{Menor valor}}{1 + 3.322\ (\text{logaritmo de frecs. totales})}$$

3. Se marcan los datos originales en las clases adecuadas para elaborar la distribución de frecuencias.

D. Otros criterios para elaborar una distribución de frecuencias.
   1. Evite tener muy pocas o demasiadas clases.
   2. El ancho de los intervalos de clase debe ser igual, si es posible.
   3. Deben evitarse las clases de extremos abiertos, si fuera posible.

II. Presentaciones de tallo y hoja.
   A. El objetivo de una representación de "tallo y hoja" es organizar datos no agrupados (originales) en forma significativa.
   B. Los datos se separan en la disposición de tallo y hoja. El primer dígito (o dígitos) a la izquierda de un número (serie de guarismos) es el tallo. El dígito (o dígitos) final es la hoja (u hojas).

III. Polígonos de frecuencias acumuladas.
   A. Un polígono de frecuencias acumuladas "menos de" permite determinar cuántas o qué porcentaje de las observaciones son menores que cierto valor.
   B. Un polígono de frecuencias acumuladas "más de" se elabora acumulando las frecuencias de clase empezando con la más elevada. Se grafican luego los límites verdaderos inferiores y las frecuencias acumuladas. A partir del polígono es posible determinar cuántos o qué porcentaje, de los valores son mayores que una cantidad seleccionada.

IV. Representación gráfica de una distribución de frecuencias.
   A. Un histograma representa el número de frecuencias de cada clase en forma de barras.
   B. Un polígono de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas tienen las clases colocadas en el eje X y las frecuencias de clase en el eje Y. El punto medio de una clase y su frecuencia correspondiente se ubican en un punto representativo. Los puntos se unen para formar el polígono. El área bajo el polígono, como en el histograma, es igual al número total de frecuencias.

V. Otras gráficas.
   A. Las gráficas de líneas son ideales para representar la tendencia de datos durante un intervalo de tiempo.
   B. Las gráficas de barras también se emplean para mostrar la tendencia a largo plazo de ventas, producción y otras series de datos en administración y economía.
   C. Las gráficas bidireccionales son ideales para representar las ganancias o pérdidas en un grupo de empresas, el incremento o decremento en el precio de un número seleccionado de acciones comunes, etc.
   D. Las gráficas de sectores y las de barras seccionadas pueden utilizarse de manera efectiva para representar los componentes de un total.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

21. Un hospital de 100 camas en Rome, Georgia (Estados Unidos) tuvo 1 820 pacientes durante el año con una tasa anual de movimiento de 18.2 pacientes por cama (1 820/100 = 18.2). El director del hospital considera que la tasa de movimiento es demasiado baja, es decir, que los pacientes ocupan las camas del hospital durante demasiado tiempo. Otros integrantes del personal consideran que la tasa de movimiento es aproximadamente igual al promedio en comparación con las de otros hospitales. Para comparar la tasa de movimiento de 18.2 pacientes por cama con la experiencia en otros casos, se deben utilizar los datos que siguen, proporcionados por la American Hospital Association.

Estado	*Tasa de movimiento*	*Estado*	*Tasa de movimiento*
Alabama	29	Maryland	26
Arizona	33	Mississippi	28
Arkansas	31	Missouri	29
Carolina del Norte	22	Nebraska	26
Carolina del Sur	29	Nuevo México	28
Distrito de Columbia	30	Oklahoma	29
Florida	34	Tennessee	29
Georgia	30	Texas	31
Kentucky	22	Virginia	24
Louisiana	27	Virginia Occidental	27

Considérese que las tasas de movimiento de pacientes por cama se han redondeado, utilizando las reglas usuales (31.5 se redondea a 32, pero 31.49 lo hace a 31).

a. Utilizando la fórmula sugerida en la nota de la página 31 determine el tamaño del intervalo de clase.
b. Realice el conteo para las tasas de movimiento a fin de obtener una distribución de frecuencias.
c. Trace un histograma y un polígono de frecuencias.
d. Construya un polígono de frecuencias acumuladas "menos de" y un polígono de frecuencias acumuladas "más de".
e. Resuma lo descubierto y obtenga conclusiones para el administrador del hospital.

22. El número de accionistas se incluyó en un estudio para un grupo selecto de grandes empresas (en miles).

Empresa	*Número de accionistas (miles)*	*Empresa*	*Número de accionistas (miles)*
Pan American World Airways	144	Northeast Utilities	200
General Public Utilities	177	Standard Oil (Indiana)	173
Occidental Petroleum	266	Atlantic Richfield	195
Middle South Utilities	133	Detroit Edison	220
Chrysler Corporation	209	Eastman Kodak	251
Standard Oil of California	264	Dow Chemical	137
Bethlehem Steel	160	Pennsylvania Power	150

Empresa	Número de accionistas (miles)	Empresa	Número de accionistas (miles)
Long Island Lighting	143	American Electric Power	282
RCA	246	Ohio Edison	158
Greyhound Corporation	151	Transamerica Corporation	162
Pacific Gas & Electric	239	Columbia Gas System	165
Niagara Mohawk Power	204	International Telephone & Telegraph	223
E. I. du Pont de Nemours	204	Union Electric	158
Westinghouse Electric	195	Virginia Electric and Power	162
Union Carbide	176	Public Service Electric & Gas	225
BankAmerica	175	Consumers Power	161

El número de accionistas debe organizarse en una distribución de frecuencias y trazar varias gráficas para representar esa distribución.

a. Utilizando siete clases, determine el intervalo de clase.
b. Haga que el límite inferior de la primera clase sea 130, para elaborar una distribución de frecuencia.
c. Represente la distribución en un histograma.
d. Represente la distribución en un polígono de frecuencias.
e. Represente la distribución en un polígono de frecuencias acumuladas "menos de".
f. Represente la distribución en un polígono de frecuencias acumuladas "más de".
g. Con base en los polígonos acumulativos, ¿tres de cada cuatro (75%) de las empresas tienen menos de qué cantidad de accionistas?
h. Realice un breve análisis sobre el número de accionistas, con base en la distribución de frecuencias y las gráficas.

23. De acuerdo con el Bureau of Economic Analysis (de Estados Unidos) los bienes raíces propiedad de japoneses en la Unión Americana desde 1981 son (en miles de millones de dólares):

    1981, $0.3; 1982, $0.5; 1983, $0.6; 1984, $0.8; 1985, $1.5; 1986, $2.4; 1987, $5.2; 1988, $6.1.

    Elija un tipo de gráfica para demostrar la tendencia de las propiedades de japoneses. Resuma lo que descubra.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

Esta es la primera de una serie de problemas que necesita un análisis de conjuntos, de datos mayores relacionados con los principales conceptos del capítulo. Puede utilizarse un paquete programático (software) como MINITAB, SPSS^x o SAS. Otra posibilidad consiste en estudiar el libro *Computerized Business Statistics* por Hall y Adelman, publicado por Richard D. Irwin, Inc. Se recomienda conservar los datos y su trabajo, ya que se utilizarán en capítulos posteriores.

1. Ha habido un incremento importante en las inscripciones en la Universidad de Toledo (Estados Unidos) durante los últimos 9 años. El presidente de la institución ha pedido a la directora de Investigación Institucional, que proporcione algunas cifras sobre las

inscripciones de estudiantes. En la tabla que sigue se muestran las inscripciones de tiempo completo y de medio tiempo. ¿Qué tendencias a largo plazo, si las hay, están indicadas? ¿De qué grupo depende el incremento? Trace las gráficas y diagramas adecuados para representar los datos de las inscripciones.

Año	*Tiempo completo*	*Medio tiempo*	*Total*
1979	10 127	8 112	18 239
1980	11 684	8 586	20 270
1981	12 173	8 944	21 117
1982	12 540	8 846	21 386
1983	12 748	8 841	21 589
1984	12 612	8 427	21 039
1985	12 725	8 513	21 238
1986	12 826	8 350	21 176
1987	13 341	8 399	21 740
1988	14 433	8 373	22 806

2. La Dra. Jean Oberg es profesora de estadística en la Universidad Owens. Cada semestre enseña una sección de Estadística básica. El curso se evalúa con tres exámenes que valen 60 puntos cada uno; dos trabajos en computación cada uno con un valor de 5 puntos; y cinco tareas para realizar en casa que valen 2 puntos cada una. De esta forma, hay un total posible de 200 puntos.

   La Dra. Oberg indicó que si un estudiante obtiene 90% o más de los posibles 200 puntos, recibirá una calificación A. Los estudiantes que obtengan más de 80% de los puntos totales recibirá una B, etc. Si las calificaciones son bajas, moverá la escala hacia abajo, pero no hacia arriba. Por último, no dará a un estudiante una calificación aprobatoria si no obtiene al menos 50% del total posible de puntos. A continuación se presentan las puntuaciones obtenidas en el último semestre.

112	149	162	153	145
162	170	121	128	151
167	143	165	159	187
126	154	120	167	175
135	179	193	155	90
170	95	163	139	170
114	189	131	163	143
177	147	142	132	184
122	156	153	167	156
131	184	129	165	134
152	109	136	175	134
142	147	146	139	113
118	184	73	160	188
158	143	170	162	168
185	106	169	158	162

   Organice los datos en una distribución de frecuencias adecuada. ¿Qué calificaciones (en letras) asignaría a las puntuaciones?

3. El Director de Investigación de una empresa comercial recientemente realizó un amplio estudio de sus clientes. El departamento de investigaciones deseaba saber cuánto gastaban los clientes durante una visita a la tienda. Se eligió una muestra aleatoria de 70 clientes. Las cantidades gastadas son:

$ 1.94	$ 2.46	$ 2.58	$ 4.38	$ 5.54
7.14	7.94	7.98	8.70	9.30
11.38	11.98	12.67	13.05	14.38
14.98	16.24	16.76	17.67	17.76
17.89	18.98	19.21	19.89	20.96
21.87	23.94	23.98	24.98	25.90
25.97	27.34	27.78	27.96	29.75
31.89	35.98	37.25	39.88	39.92
39.88	42.56	44.98	44.34	47.98
47.98	48.90	49.12	53.19	55.17
64.24	65.23	71.83	72.43	83.21
86.05	89.65	91.23	94.62	103.71
109.68	121.81	129.15	137.92	148.38
137.88	145.89	152.60	155.19	159.23

a. Organice los datos en una distribución de frecuencias.
b. Represente la distribución en varias gráficas.
c. Escriba un análisis del gasto de los clientes en ese establecimiento.

4. Los datos que siguen corresponden a las primeras 22 semanas de ventas para algunas de las principales empresas de venta al menudeo (en Estados Unidos) se presentaron en la edición de julio 8 de 1988, de *The Wall Street Journal.*

Compañía	*Ventas de 1988 (mills. de dóls.)*	*Ventas de 1987 (mills. de dóls.)*
Sears	$10 828.0	$10 456.0
K Mart	10 138.0	9 627.0
Wal-Mart	7 531.0	5 723.0
J.C. Penney	5 005.0	4 877.0
Dayton Hudson	4 350.0	3 730.0
May Stores	4 249.0	3 858.0
Melville	2 864.4	2 552.7
Zayre	2 575.7	2 332.0
Woolworth	1 777.0	1 585.0
Montgomery Ward	1 741.6	1 688.9
Limited	1 440.0	1 380.0
Payless	1 117.0	1 022.1
Carter	968.5	982.1
Ames	873.0	796.5
Mercantile	814.7	792.4
Best Products	706.5	721.2

a. ¿Qué compañía tuvo la mayor ganancia porcentual en 1988, en comparación con el mismo periodo en 1987?
b. Organice estos cambios porcentuales en una distribución adecuada de frecuencias.
c. Trace un diagrama que represente los cambios porcentuales para las cinco principales empresas en 1988.

EXAMEN CAPITULO 2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para las preguntas 1–10, indique si el enunciado es verdadero o falso.

1. Una ordenación o arreglo es un listado de todos los valores desde el menor hasta el mayor o viceversa.
2. El número de observaciones en cada clase de una distribución de frecuencias se denomina frecuencia de clase.
3. Es posible evaluar un intervalo de clase sugerido con esta fórmula:

$$\frac{\text{Mayor valor} - \text{Menor valor}}{\text{Número de clases}}$$

4. En general, debe elaborarse una distribución de frecuencias de manera que haya 4 o 24 clases.
5. Un polígono de frecuencias se obtiene al unir los puntos medios de las barras de un histograma por medio de segmentos de recta.
6. El área de una barra en un histograma representa el número de observaciones de esa clase.
7. Una distribución de frecuencias relativas muestra el número de frecuencias de clase en cada clase.
8. El punto medio de una clase puede determinarse por:

$$\frac{\text{Límite inferior declarado} + \text{Límite superior declarado}}{2}$$

9. Un polígono de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas, trazado, que utiliza la misma distribución de frecuencias tendrán la misma forma.
10. Un polígono de frecuencias y un polígono de frecuencias relativas son técnicas gráficas muy útiles al comparar dos o más distribuciones.

Para las preguntas 11–25 anote la letra que indique la respuesta correcta.

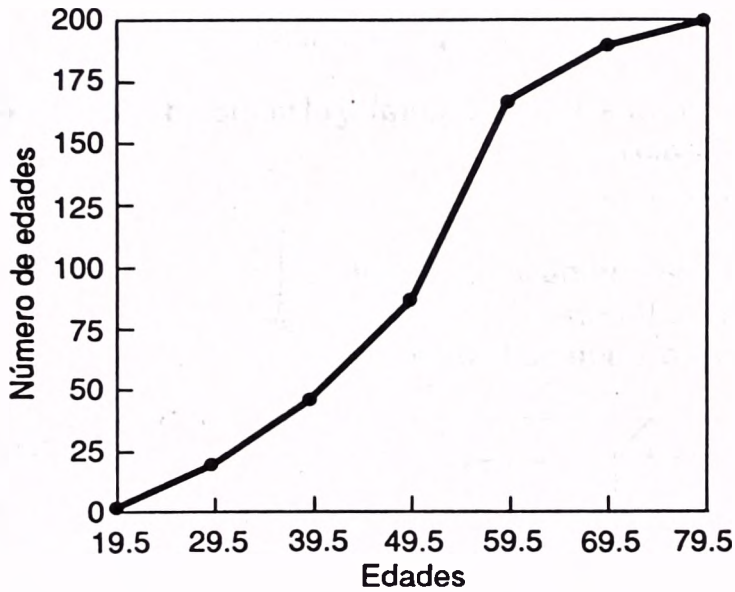
11. Se elaboró lo siguiente al efectuar el conteo de las edades de asistentes a clases.

Edades	*Número de edades*
20–29	16
30–39	25
40–49	51
50–59	80
60–69	20
70–79	8

A este arreglo se le denomina:
a. Histograma.
b. Polígono de frecuencias.
c. Ojiva.
d. Distribución de frecuencias.
e. Ninguno de los anteriores.

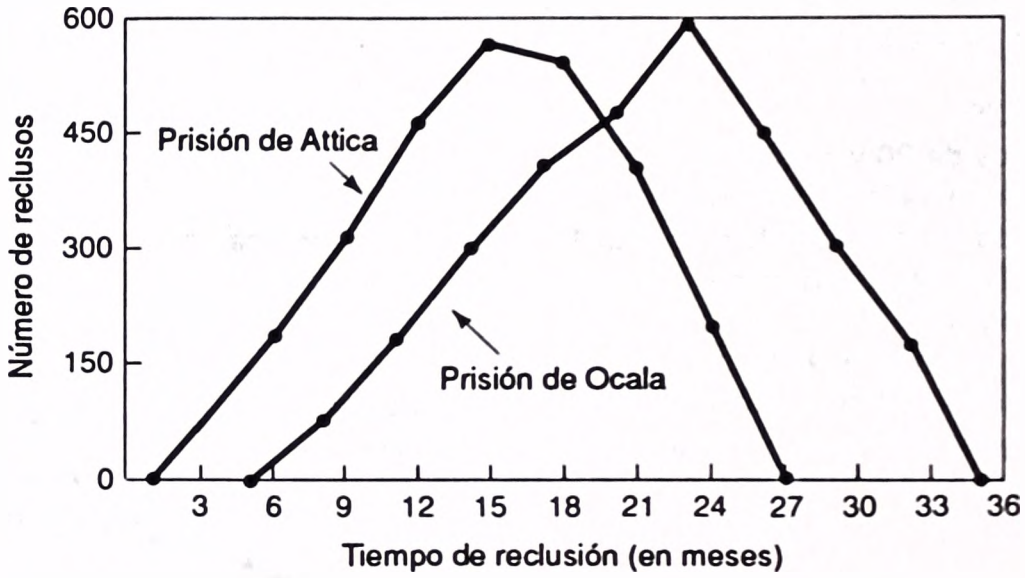
12. De acuerdo a la pregunta 11, ¿cuál es el intervalo de clase?
a. 50, obtenido por 70 – 20
b. 59, obtenido por 79 – 20
c. 10, obtenido por 30 – 20
d. 9, obtenido por 29 – 20
e. Ninguno de los anteriores.

13. De acuerdo a la pregunta 11, ¿cuáles son los límites inferiores declarados?
    a. 20, 30, 40, etc.
    b. 19.5, 29.5, 39.5, etc.
    c. 29, 39, 49, etc.
    d. 24.5, 34.5, 44.5, etc.
    e. Ninguno de los anteriores.
14. De acuerdo a la pregunta 11, ¿cuál es la frecuencia relativa de clase para la clase más baja (20-29)?
    a. 16.
    b. 0.08, u 8%
    c. 100%
    d. 200
    e. Ninguno de los anteriores.
15. De acuerdo a la pregunta 11, ¿cuál(es) son los verdaderos límites para la primera clase?
    a. 19.5 y 29.5.
    b. 16.
    c. 20 y 29
    d. Menos de 20 y más de 30.
    e. Ninguno de los anteriores.
16. Utilizando los datos de la pregunta 11, se trazó una gráfica.
    A la gráfica se le denomina:
    a. Histograma.
    b. Polígono de frecuencias.
    c. Polígono de frecuencias acumuladas "menos de"
    d. Polígono de frecuencias acumuladas "más de"
    e. Ninguna de las anteriores.

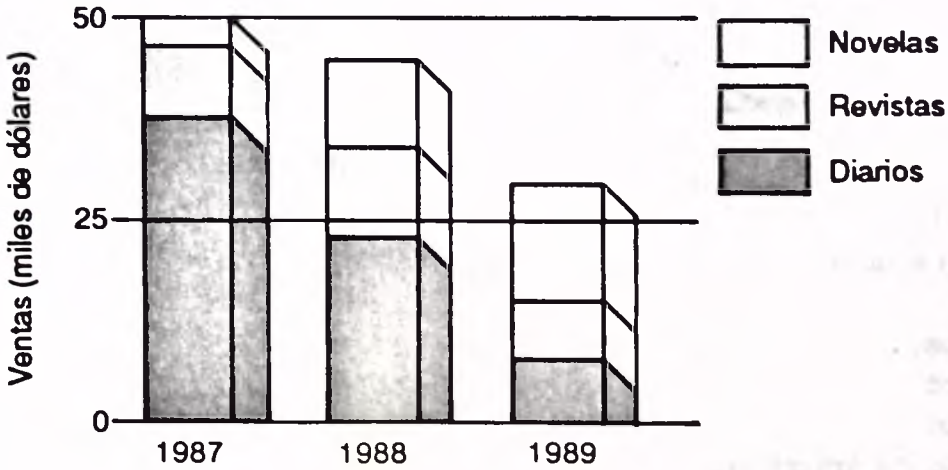


17. De acuerdo a la ilustración de la pregunta 16, aproximadamente la mitad de los empleados tienen las edades:
    a. 79 o más.
    b. 20 o menos.
    c. 51 o menos.
    d. 40 o menos.
    e. Ninguno de los anteriores.

18. De acuerdo a la gráfica de la pregunta 16, ¿aproximadamente 25% de las personas tienen menos de qué edad?
    a. 20
    b. 80
    c. 41
    d. 52
    e. Ninguna de las anteriores.
19. En la gráfica que sigue se representan dos distribuciones. ¿Cómo se les denomina?
    a. Polígonos de frecuencias.
    b. Polígonos de frecuencias relativas.
    c. Ojivas.
    d. Histogramas.
    e. Ninguna de las anteriores.



20. De acuerdo a la pregunta 19, en general, ¿el tiempo de reclusión es mayor en la prisión Attica o en la de Ocala?
    a. Prisión de Attica.
    b. Prisión de Ocala.
    c. No se puede decir con base en la gráfica.
    d. Ninguna de las anteriores.
21. Al tipo de gráfica que sigue se le denomina:



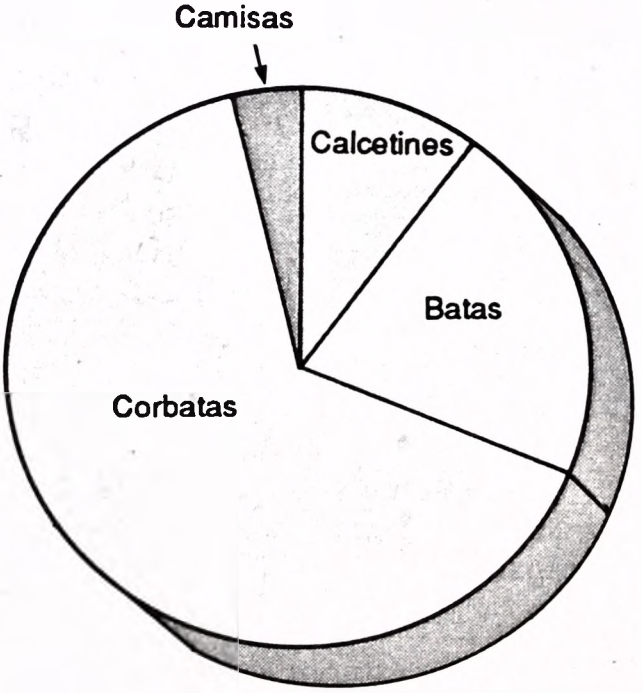
a. Gráfica de barras simples.
b. Gráfica de sectores.
c. Gráfica de barras bidireccional.
d. Gráfica de barras seccionadas.
e. Ninguna de las anteriores.

22. De acuerdo a la pregunta 21, con respecto a las ventas totales de 1987 a 1989:
a. El total de ventas aumentó.
b. El total de ventas disminuyó.
c. El total de ventas permaneció más o menos estable.
d. Ninguno de los anteriores.

23. De acuerdo a la pregunta 21. Con respecto a las ventas de diarios de 1987 a 1989:
a. Las ventas de diarios disminuyeron, pero en 1989 fueron una mayor proporción del total, en comparación con 1987.
b. Las ventas de diarios disminuyeron y en 1989 fueron una proporción menor del total, en comparación con 1987.
c. Las ventas de diarios aumentaron de 1987 a 1989.
d. Ningún caso de los anteriores.

24. De acuerdo a la pregunta 21, con respecto a las ventas de novelas:
a. Las ventas aumentaron como una proporción de las ventas totales de 1987 a 1989.
b. Las ventas disminuyeron como una proporción de las ventas totales de 1987 a 1989.
c. Las ventas permanecieron más o menos estables de 1987 a 1989.
d. Ningún caso de los anteriores.

25. Los porcentajes de las ventas totales anuales de las camisas, corbatas, calcetines y batas de cierta marca para 1990 se muestran en la gráfica de sectores que sigue. ¿Cuál de las prendas tiene una venta anual mayor?
a. Camisas.
b. Corbatas.
c. Calcetines.
d. Batas.
e. Ninguna de las anteriores.



Autoexámenes

2-1 1. Datos originales.

2.

Ingresos mensuales	*Conteo*	*Número*
$1 400–$1 499	//	2
1 500– 1 599	///	3
1 600– 1 699	//	2
1 700– 1 799	/	1
Total		8

3. Frecuencias de clase.
4. El menor ingreso mensual es aproximadamente $1 400; el mayor, $1 799. La mayor concentración del ingreso se encuentra en la clase $1 500–$1 599.

2-2 1. a. $215.29, obtenido por ($2 548 – $1 041)/7.
b. $200.
c. $1 000–$1 199.
$1 200–$1 399.
2. Intervalos de clase de tamaño desigual.
Clase de extremo abierto.
Clases que se traslapan.

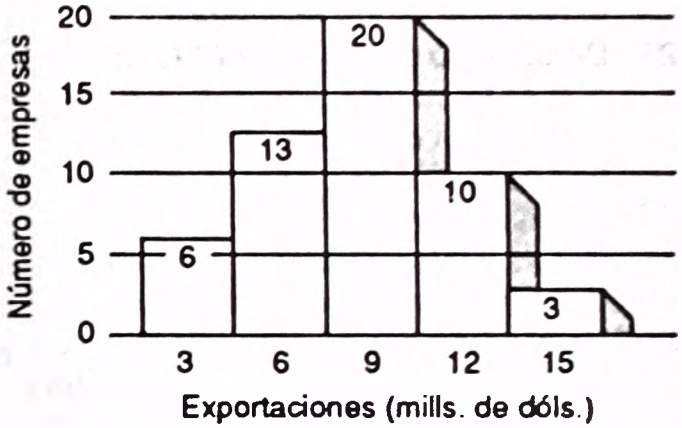
2-3 1. 24.
2. 20%
3. 10.8%

2-4 1.

Tallo	*Hoja*
7	7
8	0 0 1 3 4 8 8
9	1 5 6 6 8 9
10	1 2 4 8
11	2 6

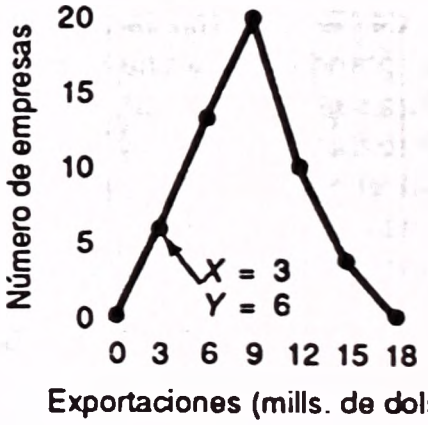
2. Las razones precio-ganancia se concentran en las clases de 8% y 9%. Para cada clase, las razones o relaciones citadas se distribuyen en forma más bien uniforme.

2-5 1.



2. $3, $6, $9, $12, $15 millones de dólares.

3.

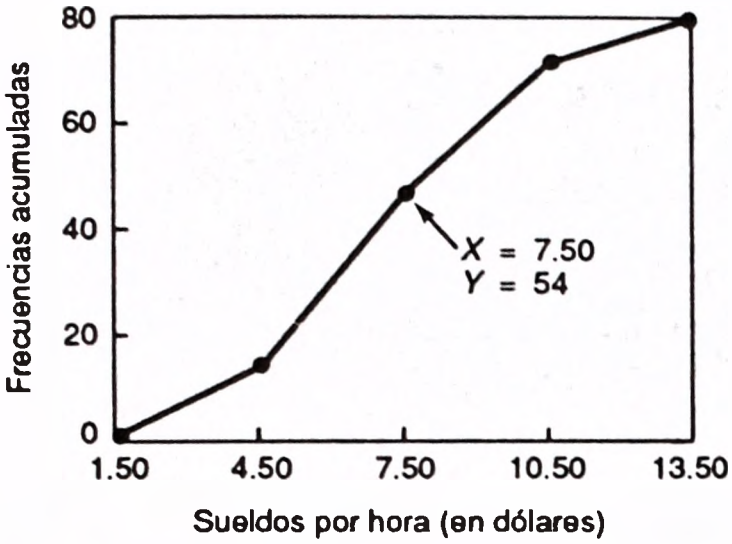


4. Ninguna de las empresas ha exportado menos de $2 millones o más de $17 millones. La mayor concentración (20) está entre $8 y $11 millones.

2-6 1. Una distribución de frecuencias.

2.

Salarios por hora	*Número acumulado*
Menos de $1.50	0
Menos de $4.50	18
Menos de $7.50	54
Menos de $10.50	74
Menos de $13.50	80



4. Aproximadamente 36, que se obtiene utilizando el polígono "menos de" y trazando una línea vertical desde $6 hasta la curva y luego ir horizontalmente hasta el eje *Y*.

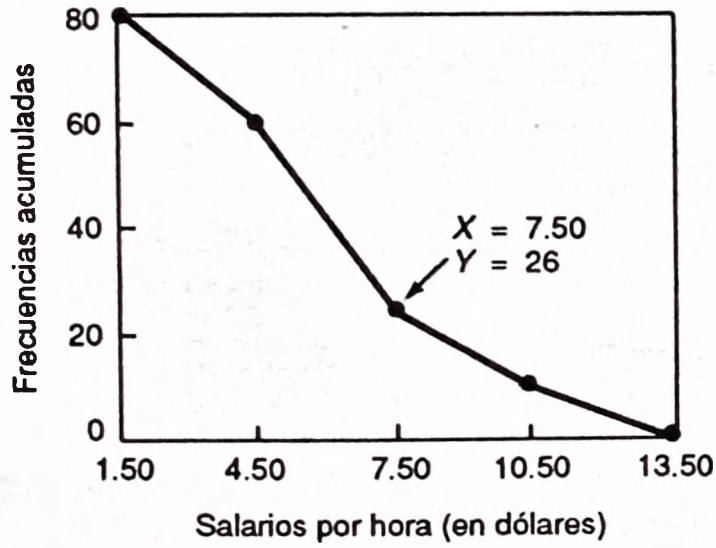
Aproximadamente $6.30, que se obtiene al ir horizontalmente desde 40 sobre el eje *Y* hasta la curva y luego verticalmente hacia abajo hasta el eje *X*.

Aproximadamente 9, que se obtiene al localizar $10 en el eje *X* del polígono "más de", ir luego verticalmente hasta la curva y después horizontalmente hasta el eje *Y*.

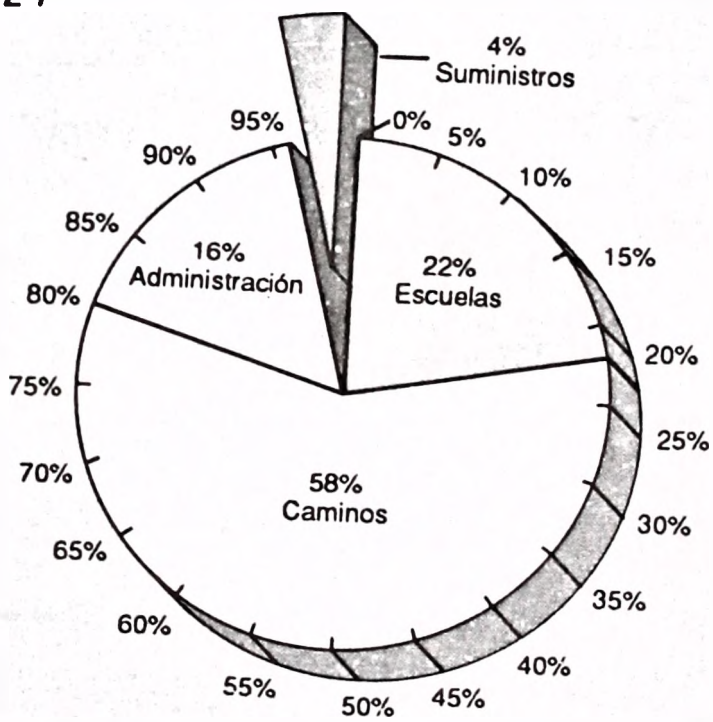
Aproximadamente $8, obtenido localizando 20 en el polígono "más de", y yendo luego horizontalmente hasta la curva; se va luego verticalmente hasta el eje *X*.

3.

Salarios por Hora	*Número acumulado*
Más de $1.50	80
Más de $4.50	62
Más de $7.50	26
Más de $10.50	6
Más de $13.50	0



2-7



Examen capítulo 2

1. Verdadero.
2. Verdadero.
3. Verdadero.
4. Falso.
5. Verdadero.
6. Verdadero.
7. Falso.
8. Verdadero.
9. Verdadero.
10. Verdadero.
11. d.
12. c.
13. a.
14. b.
15. a.
16. c
17. c.
18. c.
19. a.
20. b.
21. d.
22. b.
23. b.
24. a.
25. b.

3

Descripción de los datos: medidas de tendencia central

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Calcular la media aritmética, la mediana, la moda y la media geométrica.
2. Explicar las características, empleo, ventajas y desventajas de cada promedio.
3. Identificar la posición de la media aritmética, la mediana y la moda, tanto para distribuciones simétricas como asimétricas o sesgadas.

En el capítulo 2 se inició el estudio de la Estadística descriptiva. A fin de pasar un conjunto de datos originales a una forma significativa, se les organizó en una distribución de frecuencias y se les representó gráficamente en un histograma y en un polígono de frecuencias. También se examinaron otros de los medios empleados para describir datos, como las gráficas de líneas, de barras y de sectores.

Este capítulo se dedica a otra forma de describir datos numéricos, una *medida de tendencia central* la que por lo común se denomina **promedio** y cuyo objetivo es señalar el centro de un conjunto de observaciones. Ya se conocen los promedios. Si se lee lo que se publica sobre deportes, se verá que abundan (por ejemplo, "Larry Bird de los Célticos de Boston está obteniendo un promedio de 28.1 puntos por juego"). Otros ejemplos son: la esperanza promedio de vida para mujeres blancas en 1900 era de 49.2 años; en 1989 es de 78.5 años. Los 10 ejecutivos de mayor sueldo obtuvieron un promedio de $3 580 945 (dólares) el año pasado.

Cuatro medidas de tendencia central que, por lo común se emplean en administración y economía, se examinan en las secciones que siguen. Son la **media aritmética, la mediana, la moda** y la **media geométrica.**

¿QUE ES UN PROMEDIO?

Con frecuencia se necesita un solo número para representar un conjunto de datos. A este número, el "promedio", se le puede considerar como "representativo" de todos los datos. Un jugador representativo de futbol americano (tackle), pesa aproximadamente 230 libras. De esta forma, un jugador de 415 libras estaría muy por encima del promedio. De manera semejante, si el sueldo anual promedio de 966 ejecutivos de nivel superior es de $505 687 (dólares), uno de $506 000 estaría "aproximadamente en el promedio". ¿Qué es así el promedio?

Promedio	Valor que representa un conjunto de datos. Señala un centro de los valores.

MEDIA DE UNA MUESTRA

Según se explicó en el capítulo 1, con frecuencia un estadígrafo debe tomar una muestra de la población para determinar algo acerca de una característica específica de esa población. Por ejemplo, un departamento de control de calidad necesita tener la seguridad de que los cojinetes que se están produciendo tienen un diámetro exterior aceptable. Resultaría muy costoso y tardado verificar el diámetro exterior de todos los elementos que se estén produciendo en masa. Por tanto, podría seleccionarse una muestra de cinco y calcular el diámetro exterior promedio para estimar el diámetro de todos los cojinetes que se producen.

La medida de tendencia central (promedio) de uso más amplio es la llamada **media aritmética** que, por lo general, se designa sólo como **media.** Para datos originales, esto es, no agrupados, la *media es la suma de todos los valores dividida entre el número total de valores.* A fin de obtener la media de una muestra se usa la fórmula que sigue.

$$\text{Media muestral} = \frac{\text{Suma de todos los valores de la muestra}}{\text{Número de valores en la muestra}}$$

En vez de describir con palabras las instrucciones completas para evaluar la media (o cualquier otra medida), resulta más conveniente emplear la notación abreviada del álgebra. Algunas veces, interesará una *muestra* que es parte de una población, y otras, toda la *población.* La media de una muestra y la media de una población se calculan de la misma forma, pero la notación abreviada que se utiliza es distinta. La fórmula para la media de una *muestra* es:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

en donde:

$\overline{X}$ significa media muestral, y se lee "X con barra" o testada.
X indica un valor específico.
Σ es la letra griega sigma mayúscula e indica la operación de sumar un conjunto de datos (sumatoria).

De manera que

ΣX indica la suma de todas las X.
n es el número total de valores en la muestra.

La media de una muestra, o cualquier otra medida basada en datos muestrales, se denomina **estadístico**. Si el diámetro medio exterior de una muestra de cojinetes se calcula como 0.625 pulg, este valor muestral es un estadístico.

Estadístico	Característica medible significativa de una muestra

✱ Ejemplo

Los pesos netos en gramos del contenido de cinco envases de un perfume, seleccionados en forma aleatoria de la línea de producción son: 85.4, 85.3, 84.9, 85.4 y 85.0. ¿Cuál es la media (aritmética) de las observaciones muestrales (pesos de los envases)?

✔ Solución

$$\text{Media muestral} = \frac{\text{Suma de todos los valores de la muestra}}{\text{Número de valores en la muestra}}$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

$$= \frac{85.4 + 85.3 + 84.9 + 85.4 + 85.0}{5}$$

$$= \frac{426.0}{5}$$

$$= 85.2$$

La media (aritmética) del peso es 85.2 gramos

MEDIA DE UNA POBLACION

Muchos estudios utilizan todos los valores de la población. Para ilustrar esto, si un estudio se ocupara de todas las comisiones semanales devengadas por los vendedores de tiempo completo empleados por una firma comercial en Toronto, Canadá, el conjunto de todas las comisiones se consideraría como población. La media de la población en términos de símbolos, es:

$$\boxed{\mu = \frac{\Sigma X}{N}}$$

en donde:

μ indica la media poblacional. Es la letra griega mu minúscula.
N es el número total de observaciones en la población.

Como antes, ΣX corresponde a la suma de todas las X.

Según se observó, cualquier característica medible de una muestra se llama estadístico. Cualquier característica medible de una población, como la media, se denomina **parámetro.** Un estadístico muestral se utiliza para estimar un parámetro poblacional.

Parámetro	Característica medible de una población.

AUTOEXAMEN 3-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. El ingreso anual de una muestra de varios empleados de gerencia media en una industria son [redondeado a $100 (dólares)]: $42 900, $49 100, $38 300, y $56 800.

a. Dé la fórmula para la media muestral.
b. Obtenga la media muestral redondeada a $100.
c. ¿La media que obtuvo en *b* es un estadístico o un parámetro? ¿Por qué?
d. ¿Cuál es su mejor estimación de la media poblacional?

2. Los estudiantes de un grupo de ciencias de la computación se consideran como la población. Sus calificaciones en el curso son 92, 96, 61, 86, 79 y 84.

a. Dé la fórmula para la media poblacional.
b. Calcule la calificación media del curso.
c. ¿La media que obtuvo en *b* es un estadístico o un parámetro? ¿Por qué?

PROPIEDADES DE LA MEDIA ARITMETICA

Como se ha indicado, la media aritmética es una medida de tendencia central muy utilizada. Tiene varias propiedades:

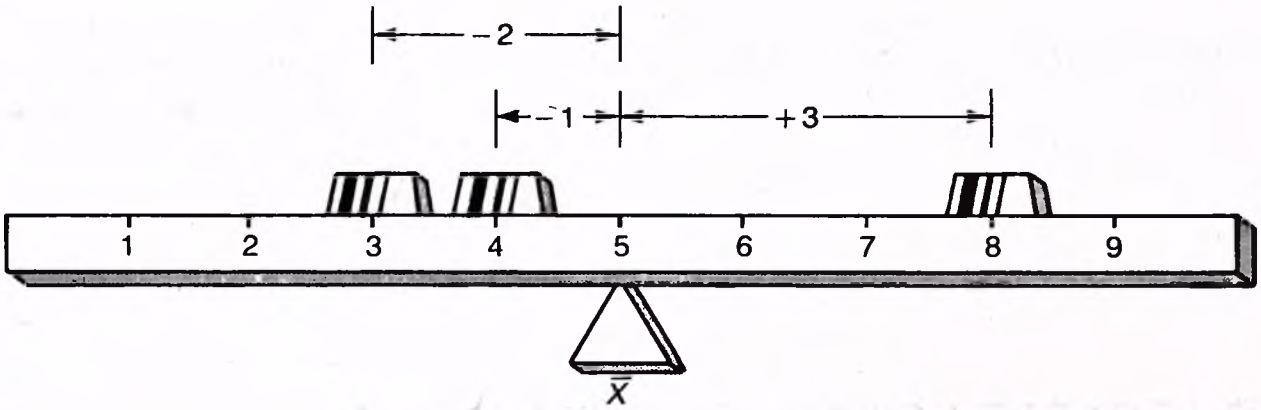
1. Todo conjunto de datos de nivel de intervalo y de nivel de razón tiene una media. (Recuerde del capítulo 1 que los datos de nivel de intervalo y de razón incluyen datos medibles como edades, ingresos y pesos, siendo constante la distancia entre los números.)
2. Al evaluar la media se incluyen todos los valores.
3. Un conjunto de datos sólo tiene una media. Esta es única. (Más adelante en este capítulo se describirá un promedio que puede aparecer dos veces, o más de dos veces, en un conjunto de datos.)
4. La media es una medida muy útil para comparar dos o más poblaciones. Por ejemplo, puede emplearse para comparar el desempeño en la producción de los operarios del primer turno en una planta de una industria, con el desempeño de los del segundo turno.
5. La media aritmética es la única medida de tendencia central en donde *la suma de las desviaciones de cualquier valor con respecto a la media siempre será cero*. Expresado en forma simbólica:

$$\Sigma(X - \overline{X}) = 0$$

Como ejemplo, la media de 3, 8 y 4 es 5. Entonces:

$$\begin{aligned}\Sigma(X - \overline{X}) &= (3 - 5) + (8 - 5) + (4 - 5)\\ &= -2 + 3 - 1\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto, se puede considerar la media como un punto de equilibrio para un conjunto de datos. A fin de ilustrar esto, supóngase que se tiene una barra de madera marcada con los números 1, 2, 3, . . . , *n*, en forma equidistante. Supongamos que se colocan tres lingotes de oro de igual peso sobre la barra en los números 3, 4 y 8, y el punto de equilibrio se fijara en 5, la media de los tres números. Se vería que la tabla se equilibra perfectamente. Las desviaciones por abajo de la media (–3) son iguales a las desviaciones por encima de la misma (+3). En forma esquemática:



Sin embargo, la media tiene varias desventajas. Recuérdese que se utiliza para su cálculo el valor de cada elemento de una muestra, o población. Si uno o dos de estos elementos es muy grande o muy pequeño, la media podría no ser un promedio adecuado para representar los datos. Por ejemplo, supóngase que los ingresos anuales de un pequeño grupo de corredores de acciones en Merrill Lynch son $62 900, $61 600, $62 500, $60 800 y $1.2 millones (de dólares). El ingreso medio es $289 560. Resulta obvio que no parece representativo de este grupo porque todos, excepto un corredor, tienen un ingreso en el intervalo $60 000 a $63 000. Un ingreso ($1.2 millones) está afectando a la media.

La media además es inadecuada si hay una clase de extremo abierto para datos agrupados en una distribución de frecuencias. Si una distribución de frecuencias tiene una clase de extremo abierto "$100 000 y mayores" y si hay 10 personas en esa clase, en realidad no se sabe si sus ingresos se acercan a los $100 000, $500 000, o $16 millones. Ya que se carece de información acerca de sus ingresos, no es posible determinar la media aritmética del ingreso para esta distribución de extremo abierto.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Una empresa informó que la participación de los accionistas (ajustada para una cartera de acciones comunes de 5 a 3 pagada en enero de 1988) durante los últimos 11 años es (por acción común):

   1977, $21.07; 1978, $23.24; 1979, $26.28; 1980, $28.55; 1981, $30.09;
   1982, $29.15; 1983, $29.10; 1984, $28.92; 1985, $29.90; 1986, $30.34; 1987, $32.41.

   ¿Cuál es la media anual de las participaciones de los accionistas?

2. Una compañía petrolera ha tenido las siguientes cifras de ventas e ingresos de operación desde 1978 (millones de dólares):

   1978, $6 253; 1979, $9 555; 1980, $12 476; 1981, $14 708; 1982, $17 717; 1983, $19 116; 1984, $15 586; 1985, $14 534; 1986, $15 344; 1987, $17 096.

   ¿Cuál es la media anual de los valores?
3. El Departamento de Educación de Estados Unidos informó que durante los últimos años recibieron grados de licenciatura en ciencias de computación e informática el siguiente número de personas: 5 033, 5 652, 6 407, 7 201, 8 719, 11 154, y 15 121 ¿Cuál es la media del número anual de personas que se graduaron? ¿Es una media muestral o una media poblacional?
4. Este Departamento de Educación también informó que durante los últimos años el número de mujeres que recibieron grados doctorales en ciencias de computación e informática fue 23, 19, 15, 30, 27, y 25. ¿Cuál es el número medio anual de mujeres que reciben ese grado? ¿Se trata de una media muestral o de una media poblacional?

MEDIA PONDERADA

Una empresa comercial paga a sus vendedores $6.50, $7.50, y $8.50 (dólares) por hora. Podría llegarse a la conclusión de que la media de los sueldos (por hora) es $7.50, obtenido al calcular ($6.70 + $7.50 + $8.50)/3. Esto es cierto sólo si hay el *mismo* número de vendedores que perciben $6.50, $7.50, y $8.50. Sin embargo, supóngase que 14 empleados de ventas ganan $6.50, a 10 se les paga $7.50, y 2 obtienen $8.50. Para encontrar la media, $6.50 se *pondera* (multiplica) por 14; $7.50 se pondera por 10; y $8.50 se pondera por 2. Al promedio resultante se le denomina *media ponderada*.

En general, la media ponderada de un conjunto de números denotados X_1, X_2, X_3, . . . , X_n con pesos correspondientes a w_1, w_2, w_3, . . . , w_n se calcula como sigue:

$$\boxed{\bar{X}_w = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \cdots + w_nX_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n}}$$

Esto puede abreviarse así:

$$\boxed{\bar{X}_w = \frac{\Sigma(w \cdot X)}{\Sigma w}}$$

Para el problema en cuestión:

$$\bar{X}_w = \frac{14\ (\$6.50) + 10(\$7.50) + 2(\$8.50)}{14 + 10 + 2}$$

$$= \frac{\$183}{26}$$

$$= \$7.038$$

La media ponderada de los sueldos por hora es $7.04.

AUTOEXAMEN 3-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una tienda vendió 95 trajes para caballero al precio normal de $400 (dólares). Para la venta de primavera los trajes se rebajaron a $200, y se vendieron 126. En la venta de liquidación el precio se redujo a $100 y se vendieron los 79 trajes restantes.

a. ¿Cuál fue el precio medio ponderado de un traje?

b. La tienda pagó $200 por cada uno de los 300 trajes. Comente acerca de la ganancia de la tienda en estos trajes si un vendedor recibe una comisión de $25 por cada traje vendido.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. La Occidental Petroleum Corporation pagó un dividendo en efectivo por acción común de $1.25 (dólares) en 1978, $1.31 en 1979, $1.93 en 1980, $2.43 en 1981, y $2.50 por cada año durante el periodo desde 1982 hasta 1987. ¿Cuál fue la media ponderada del dividendo anual del periodo?
6. Mid South University tiene siete jugadores de futbol americano (defensivos de línea) que pesan 240 libras cada uno, cuatro que pesan 212 cada uno, tres con un peso de 190 cada uno, y uno que hace llegar la báscula hasta 314. ¿Cuál es la media ponderada de los pesos de dichos jugadores?
7. Una compañía embotelladora de Nashville, Tennessee, ofrece tres tipos de servicio de entrega: inmediato, el mismo día y dentro de cinco días. La utilidad (o ganancia) por entrega varía de acuerdo con el tipo. La utilidad de una entrega inmediata es menor que la de los otros tipos debido a que el repartidor tiene que ir directamente a una tienda de abarrotes y regresar a la embotelladora. Para determinar qué efecto tiene, si lo hay, cada tipo de entrega en el cuadro de utilidades, la empresa ha hecho la tabulación que sigue con base en las entregas del trimestre anterior.

Tipo de entrega	*Número de entregas en el trimestre*	*Utilidad por entrega*
Inmediata	100	$ 70
El mismo día	60	100
Dentro de cinco días	40	160

   a. ¿Cuál es la media ponderada de la ganancia por entrega?
   b. Supóngase que la compañía embotelladora pudiera eliminar los pedidos inmediatos a través de promociones especiales y cuidadosa planeación. ¿Cuál sería su utilidad por entrega si las 100 tiendas de abarrotes que solicitaban servicio inmediato cambiaran al servicio durante el mismo día?
8. Una línea naviera, la Oriental Star, está estudiando varios aspectos del negocio, incluyendo el tiempo necesario para cargar y descargar un barco y el peso de los contenedores. El número de éstos y su peso a bordo de un barco con rumbo a Hong Kong son:

Número de contenedores	*Peso por contenedor (libras)*
60	1 000
40	3 000
20	6 000

a. Sumando 1 000, 3 000 y 6 000 se obtiene 10 000 libras. Al dividir 10 000 libras entre 3 resulta 3 333 libras, peso medio de un contenedor. ¿Es tal el peso promedio de un contenedor en el barco que va a Hong Kong? Explique su respuesta.
b. Calcule la media ponderada de los 120 contenedores. Explique por qué tal peso es distinto de las 3 333 libras calculadas en *a*.

MEDIANA

Ya se señaló que para datos que contienen uno o dos valores sumamente grandes o muy pequeños, la media aritmética puede no ser representativa. El punto central de tales datos puede describirse mejor utilizando una medida de tendencia central denominada **mediana.**

Para ilustrar la necesidad de una medida de tendencia central que no sea la media aritmética, supóngase que intenta adquirir un condominio en Palm Aire. El agente le indicó que el precio promedio de las unidades disponibles en este momento es $110 000 (dólares). ¿De todas formas querría usted estudiarlo?

Si tuviera un presupuesto máximo para un precio entre $60 000 y $75 000, podría pensar que está fuera de sus posibilidades. Sin embargo, al verificar los precios individuales de los condominios podría cambiar de idea. Los precios son $60 000, $65 000, $70 000, $80 000, y un penthouse de super lujo cuesta $275 000. La media aritmética del precio es $110 000 según indicó el agente de bienes raíces, pero un precio de ($275 000) está haciendo que la media aritmética se incline hacia arriba, por lo que es un promedio no representativo. Parece que un precio entre $65 000 y $75 000 es un promedio más representativo, y de hecho lo es. En casos como éste la mediana proporciona una medida más exacta de la tendencia central.

Mediana Punto medio de los valores después de ordenarlos de menor a mayor o de mayor a menor. Hay tantos valores por encima de la mediana como por debajo de ella en la ordenación de datos.

La mediana del precio de las unidades disponibles es $70 000. Para determinar esto, los precios se ordenaron de menor ($60 000) a mayor ($275 000) y viceversa, y se seleccionó el valor medio ($70 000).

Precios ordenados de menor a mayor		*Precios ordenados de mayor a menor*
$ 60 000		$275 000
65 000		80 000
70 000	← Mediana →	70 000
80 000		65 000
275 000		60 000

Obsérvese que hay el mismo número de precios por debajo de la mediana de $70 000 que por arriba. Por tanto, la mediana no se ve afectada por observaciones muy bajas o muy altas. Si el precio más elevado hubiera sido $90 000 o $300 000 o hasta de $1 millón, la mediana de los precios seguiría siendo $70 000. De manera semejante, si el precio más bajo hubiera sido $20 000 o $50 000, la mediana seguiría siendo aún $70 000.

En el ejemplo anterior hay un número *impar* de observaciones (cinco). ¿Cómo se determina la mediana para un número *par* de observaciones? Como antes, los datos se ordenan. Después, se acostumbra evaluar la media aritmética de las dos observaciones centrales. Obsérvese que para un número par de observaciones, la mediana puede no ser uno de los valores.

✱ Ejemplos

1. Una muestra de los honorarios paramédicos cobrados por unas clínicas en Baltimore dio estas cantidades (en dólares): $35, $29, $30, $25, $32, $35. ¿Cuál es la mediana de ellas?
2. Los tiempos que necesitaron varias empresas de seguros para revisar solicitudes para servicios de coberturas semejantes son (en minutos): 50, 230, 52, 57. ¿Cuál es la mediana del tiempo necesario para revisar una solicitud?

✔ Soluciones

1. Ordenar de menor a mayor los honorarios por servicios paramédicos:

$25	
29	
30	
32	← Mediana
35	
35	

La mediana es $31, que se obtiene determinando la media aritmética de las dos observaciones centrales: ($30 + $32)/2 = $31.

2. Ordenando los tiempos de menor a mayor:

50	
52	
57	← Mediana
230	

La mediana de los tiempos es 54.5 min, obtenida al calcular (52 + 57)/2 = 54.5. Obsérvese que 54.5 no es uno de los valores.

De nuevo, vemos que hay el mismo número de observaciones debajo de la media que por encima de ésta. Una forma fácil de localizar la posición del elemento medio para datos no agrupados es con la fórmula:

$$\text{Ubicación de la mediana} = \frac{n + 1}{2}$$

en donde n es el número total de elementos.

En el ejemplo 1 hay seis elementos, de manera que $(n + 1)/2 = (6 + 1)/2 = 3.5$. Después de ordenar los datos de menor a mayor, se localiza el elemento central contando hasta el elemento número 3.5 y determinando después su valor, la mediana. Esta es así $31.

Número de elemento	1	2	3	4	5	6
Valor del elemento	$25	$29	$30	$32	$35	$35

$31
Mediana

Si hay cinco datos, por ejemplo $7, $2, $4, $8, y $15, entonces $(n + 1)/2 = (5 + 1)/2 = 3$. Al ordenar estos valores de menor a mayor, se obtiene el valor del tercer elemento, que es $7, la mediana.

Número de elemento	1	2	3	4	5
Valor del elemento	$2	$4	$7	$8	$15

Mediana

AUTOEXAMEN 3-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Una muestra de personas solteras de Cartersville, Georgia, que recibe pagos por seguro social, reveló estos ingresos mensuales: $426, $299, $290, $687, $480, $439 y $565.

   a. ¿Cuál es la mediana de los ingresos?
   b. ¿Cuántas observaciones están por debajo de la mediana? ¿Cuántas por encima?

2. El número de paros en el trabajo, en la industria automotriz para meses seleccionados son 6, 0, 10, 14, 8 y 0.

   a. ¿Cuál es la mediana del número de paros?
   b. ¿Cuántas observaciones están por debajo de la mediana? ¿Cuántas por encima?

Propiedades de la mediana

1. La mediana es única; esto es, a semejanza de la media sólo existe una mediana para un conjunto de datos.
2. No es difícil determinarla para datos no agrupados. Tan sólo se necesita ordenarlos de menor a mayor o viceversa, y encontrar el valor del elemento central.
3. No se ve afectada por valores muy grandes o muy pequeños, y por tanto, es una medida valiosa de la tendencia central cuando ocurre este tipo de valores.
4. Puede calcularse para una distribución de frecuencias de extremo abierto si la mediana no se encuentra en una clase de tal extremo. (Se mostrarán los cálculos para la mediana de datos agrupados en una distribución de frecuencias un poco más adelante.)
5. Puede calcularse para datos de nivel de razón, de intervalo y ordinal. (Recuérdese del capítulo 1 que los datos del nivel ordinal pueden clasificarse por rangos de menor a mayor, como en el caso de las respuestas "excelente", "muy bien", "bien", "regular" y "deficiente" a una pregunta en una investigación de mercado.) Para emplear un ejemplo sencillo, supóngase que cinco personas clasificaron una nueva barra de chocolate. Una persona creyó que era excelente; otra la clasificó como muy buena; una más como buena; otra como regular; y la última la consideró deficiente. La respuesta tiene una mediana en "buena". La mitad de las respuestas están por encima de "buena", y la otra mitad, por debajo.

MODA

La **moda** es otra medida de tendencia central.

Moda	Valor de la observación que aparece con más frecuencia.

* Ejemplo

Los sueldos anuales (en dólares) de funcionarios de gobierno en dependencias de cierta área son:

Arizona	$35 000	Illinois	$58 000	Ohio	$50 000
California	49 100	Louisiana	50 000	Tennessee	50 000
Colorado	50 000	Maryland	60 000	Texas	71 400
Florida	50 000	Massachusetts	40 000	West Virginia	50 000
Idaho	40 000	New Jersey	65 000	Wyoming	55 000

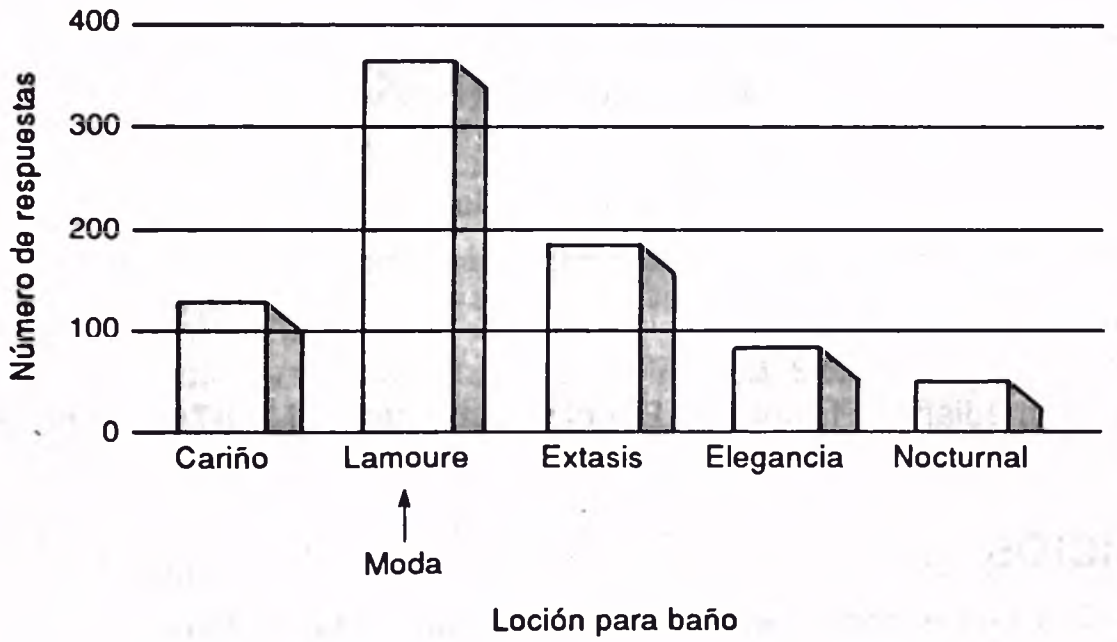
¿Cuál es la moda de los sueldos?

✔ Solución

Una revisión de las cantidades revela que el sueldo anual de $50 000 aparece con más frecuencia (seis veces) que cualquier otra percepción. Por tanto, el valor modal es $50 000.

La moda es útil, en especial al describir los niveles nominal y ordinal de medición. Como un ejemplo de su empleo para datos de nivel nominal, una empresa ha desarrollado cinco lociones para baño. En el diagrama 3-1 se muestran los resultados de una investigación de mercado diseñada para determinar qué loción para baño prefieren los consumidores. La mayor cantidad de respuestas favoreció a la llamada Lamoure, según lo indica la barra más alta. Por tanto, tal producto es la moda.

DIAGRAMA 3-1



En resumen, puede determinarse la moda para todos los niveles de datos: nominal, ordinal, de intervalo y de relación. La moda también tiene la ventaja de no verse afectada por valores muy altos o muy bajos. Al igual que la mediana, puede utilizarse como medida de tendencia central para distribuciones de extremo abierto.

Sin embargo, la moda tiene algunas desventajas, que hacen que se utilice con menos frecuencia que la media o la mediana. Para muchos conjuntos de datos, no existe moda porque ningún valor aparece más de una vez. Por ejemplo, no hay moda para este conjunto de datos: $19, $21, $23, $20, y $18. Puesto que cada valor es diferente, podría argumentarse que cada valor es la moda. Por el contrario, para algunos conjuntos de datos hay más de una moda. Supóngase que las edades de un grupo son 22, 26, 27, 27, 31, 35 y 35. Tanto las edades 27 como 35 son modas. Sería cuestionable utilizar las dos modas para representar la tendencia central de este conjunto de datos de edades.

EJEMPLO PARA COMPUTADORA

Es posible utilizar una computadora para organizar un conjunto de datos originales y determinar varias medidas de tendencia central.

✱ Ejemplo

En la tabla 2-2 del capítulo precedente se proporcionaron los datos originales mensuales de rentas de condominios en el área Sarasota Bradenton. ¿Cuál es el valor de la media y la mediana para tales rentas?

✔ Solución

Los datos estaban formados por 120 observaciones, de manera que efectuar los cálculos a mano resultaría muy tedioso. El listado que sigue proviene del sistema MINITAB.

```
MTB > MEAN C1
   MEAN     = 1457.9
MTB > MEDIAN C1
   MEDIAN   = 1464.5
```

Tal vez se desee verificar estas dos medidas de tendencia central consultando los datos de las tablas 2-1 o 2-2. Los cálculos de computadora utilizan $(n + 1)/2$ para determinar la mediana ($1 464.50). Por cierto, el sistema MINITAB no proporciona la moda.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Los empleados de una compañía tomaron varios cursos breves utilizando distintos métodos de enseñanza. Al concluir los cursos, cada empleado indicó su preferencia con respecto a los métodos de enseñanza. Los resultados son:

Método de enseñanza	*Número de preferencias*
Televisión	86
Lectura	142
Discusión de grupo	17
Aprendizaje programado	49

   a. ¿De qué nivel de medición se trata?
   b. ¿Cuál es la preferencia modal por la enseñanza? ¿Por qué?
   c. ¿Es posible determinar la mediana? Explique su respuesta.
   d. ¿Es posible determinar la media? Explique su respuesta.

10. Los resultados de una encuesta referente a las afiliaciones políticas de una muestra de votantes registrados en un condado de Estados Unidos son:

Afiliación política	*Número de votantes registrados*
Republicano	1 027
Demócrata	842
Socialista	21
Independiente	1 146
Otras	17

a. ¿De qué nivel de medición se trata: de razón, de intervalo, ordinal o nominal?
b. ¿Cuál es la afiliación modal? ¿Por qué?
c. ¿Es posible determinar la mediana? Explique su respuesta
d. ¿Es posible determinar la media de las afiliaciones? Explique su respuesta.

11. Los ingresos netos de una muestra de industriales de acero en Quebec son (en millones de dólares): $96.7, $67.1, $89.7, $96.7, $91.4, $96.7 y $82.6.
    a. ¿Cuál es el ingreso neto modal?
    b. ¿Es la moda un promedio representativo? Explique su respuesta.
    c. ¿Cuál es la mediana de los ingresos?
    d. ¿Cuál es la media de los ingresos?
    e. ¿Qué medida de tendencia central parece describir mejor el ingreso neto representativo de esos industriales del acero?
12. Remítase al ejercicio 5, en lo que concierne a los dividendos en efectivo pagados por la Occidental Petroleum Corporation.
    a. ¿Cuál es el valor modal?
    b. ¿Es la moda un valor representativo? Explique su respuesta.
    c. ¿Cuál es la media de los dividendos?
    d. ¿La media o la moda describe mejor los dividendos pagados por la Occidental?

MEDIA GEOMETRICA

Hay dos usos principales de la media geométrica: 1) para promediar porcentajes, índices y cifras relativas; y 2) para determinar el incremento porcentual promedio en ventas, producción u otras actividades o series económicas de un periodo a otro.

La **media geométrica** (M.G.) de un conjunto de *n* números positivos se define como *la raíz* n-*ésima del producto de los* n *números*. Por tanto, la fórmula para la media geométrica:

$$\text{M.G.} = \sqrt[n]{(X_1)(X_2)(X_3)\cdots(X_n)}$$

✱ Ejemplo

Para ilustrar el empleo de la media geométrica en promedios de porcentajes, supóngase que las utilidades obtenidas por una compañía constructora en cuatro proyectos fueron de 3, 2, 4 y 6%, respectivamente. ¿Cuál es la media geométrica de las ganancias? (Nota: $n = 4$, número de observaciones.)

✔ Solución

$$\begin{aligned} \text{M.G.} &= \sqrt[n]{(X_1)(X_2)(x_3)\cdots(X_n)} \\ &= \sqrt[4]{(3)(2)(4)(6)} \\ &= \sqrt[4]{144} \end{aligned}$$

Por tanto, la media geométrica de los porcentajes es la raíz cuarta de 144. Si se dispone de una calculadora científica de mano con tecla $\sqrt[x]{y}$ o y^x, la media geométrica puede determinarse con prontitud:

		En pantalla
	Se multiplica 3 × 2 × 4 × 6	144
	Oprimir $\sqrt[x]{y}$ o bien tecla* y^x	
Número de observaciones	Oprimir 4** =	3.464101615

* En algunas calculadoras, como la Texas Instruments Business Programmable BA-54, se debe pulsar la tecla de modo de función [2nd] antes de oprimir y^x.
** Si la tecla es y^x, debe usarse el recíproco de n. El recíproco de 4 es $^1/_4$ = 0.25.

La media geométrica de las utilidades es 3.46%.

La media aritmética de los valores anteriores es 3.75%, obtenida por (3 + 2 + 4 + 6)/4. Aunque el valor de 6% no es muy grande, hace que la media aritmética se incline hacia valores elevados. La media geométrica de 3.46 da una cifra más conservadora para las utilidades porque no se ve tan afectada por los valores extremos. En realidad, será igual o menor que la media aritmética.

✱ Ejemplo

Supóngase que los precios de cinco acciones de minas de oro se incrementaron desde 1975 en, 37.1, 1 140.0, 0.927, 2.7 y 842.0%, respectivamente. ¿Cuál es la media geométrica del incremento porcentual en el precio de las cinco acciones?

✔ Solución

Empleando una calculadora científica de mano:

	En pantalla
Se multiplica 37.1 × 1 140 × .927 × 2.7 × 842	89132143
Oprimir $\sqrt[x]{y}$ o bien tecla* y^x	
Oprimir 5**	38.9051299

* En algunas calculadoras, como la Texas Instruments Business Programmable BA-54, se debe pulsar la tecla de modo de función [2nd] antes de oprimir y^x.
** Use el recíproco de 5, o $^1/_5$ = 0.20, si se emplea la tecla y^x.

La media geométrica del incremento porcentual es 38.9%.

Compárese la media geométrica de 38.9% con la media aritmética de 404.5% obtenida por 2 022.727/5. De nuevo resulta evidente que la media geométrica no se ve tan influida por los valores extremos como la media aritmética.

Ahora, para examinar la segunda aplicación de la media geométrica determine el incremento porcentual promedio en ventas, exportaciones u otras series de negocios de un periodo a otro. La fórmula para la media geométrica según se aplica a este tipo de problema es:

$$\text{M.G.} = \left[\sqrt[n-1]{\frac{\text{Valor al final del periodo}}{\text{Valor al principio del periodo}}}\right] - 1$$

✱ Ejemplo

Supóngase que la población de Glenn Hollow en 1980 fue de 2 personas, y el número estimado para 1990 es 22. ¿Cuál es el incremento porcentual promedio anual estimado?

✔ Solución

Obsérvese que se trata de un lapso de 11 años. Entonces, $n = 11$. Los 11 años son 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989 y 1990. En 11 años sólo se tienen 10 tasas de variación anuales, que son de 1980 a 1981, de 1981 a 1982, y así sucesivamente hasta el cambio de 1989 a 1990.

Según se observó, la fórmula para la media geométrica que se aplica a este tipo de problemas es:

$$\text{M.G.} = \left[\sqrt[n-1]{\frac{\text{Población al final del periodo}}{\text{Población al principio del periodo}}}\right] - 1$$

$$= \left[\sqrt[11-1]{\frac{22}{2}}\right] - 1$$

$$= \left[\sqrt[10]{\frac{22}{2}}\right] - 1$$

Utilizando una calculadora científica:

	En pantalla
22 ÷ 2	11
Oprimir $\sqrt[x]{y}$ o bien tecla* y^x	
Oprimir 10** =	1.270981615
Oprimir −1 =	0.270981615

* En algunas calculadoras, como la Texas Instruments Business Programmable BA-54, se debe pulsar la tecla de modo de función [2nd] antes de oprimir y^x.

** Si la calculadora tiene una tecla y^x, use el recíproco de 10, o sea $^1/_{10} = 0.1$.

El valor final 0.27 se multiplica por 100 para expresarlo como porcentaje. La media geométrica del incremento anual en la población de Glenn Hollow es 27%.

AUTOEXAMEN 3-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Los rendimientos anuales, en porcentaje, de cuatro acciones de computadora son: 4.91, 5.75, 8.12 y 21.60.
   a. Obtenga la media geométrica de los rendimientos.
   b. Obtenga la media aritmética de los datos.
   c. ¿La media aritmética es igual o mayor que la media geométrica? Debe serlo.
2. Una producción se incrementó de 23 000 unidades en 1969 a 120 520 unidades en 1989. Obtenga la media geométrica del incremento porcentual anual.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. La Chevron Corporation presentó estas estadísticas en su informe anual en lo referente a producción total mundial de petróleo crudo y líquidos de gas natural (en miles de barriles por día): para 1983, 864; para 1988, 1540. ¿Cuál es la media geométrica del incremento porcentual anual en producción entre 1983 y 1988?
14. La Texas Utilities Company informó que en 1977 el número promedio de kilowatts por hora (kw/h) de electricidad consumida por cliente residencial fue 12 213. En 1987 fue 13 147. ¿Cuál es la media geométrica del incremento porcentual anual de los consumos?
15. La Wells Fargo Mortgage and Equity Trust dio estas tasas de ocupación en su informe anual para diversas propiedades de arrendamiento para oficinas que posee la empresa.

Pleasant Hills, California	100%
Lakewood, Colorado	90
Riverside, California	80
Scottsdale, Arizona	20
San Antonio, Texas	62

¿Cuál es la media geométrica de la tasa de ocupación?

16. Wells Fargo Mortgage and Equity Trust también informó sobre estas tasas de ocupación para algunas de sus propiedades de arrendamiento industrial:

Tucson, Arizona	81%
Irvine, California	100
Carlsbad, California	74
Dallas, Texas	80

¿Cuál es la media geométrica de la tasa de ocupación?

MEDIA, MEDIANA Y MODA DE DATOS AGRUPADOS

A menudo los datos sobre ingresos, edades, etc., se agrupan y presentan en forma de una distribución de frecuencias. Por lo general resulta imposible obtener los datos originales. De modo que si interesa un valor representativo para los datos, es necesario *estimarlo* con base en la distribución de frecuencias.

Media aritmética

Para evaluar la media aritmética de datos organizados en una distribución de frecuencias, las observaciones en cada clase se representan con el *punto medio* de ésta. La media de una muestra de datos organizados en una distribución de frecuencias se calcula con:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{n}}$$

en donde:

- $\overline{X}$ designa la media aritmética.
- X es el valor central, o punto medio, de cada clase.
- f es la frecuencia de clase.
- fX es la frecuencia de clase multiplicada por el punto medio de la clase.
- ΣfX es la suma de estos productos.
- n es el número total de frecuencias.

* Ejemplo

Los cálculos para la media aritmética de datos agrupados en una distribución de frecuencias se mostrarán utilizando la distribución de la tabla 2-4 del capítulo 2.

Rentas de nuevas unidades en condominio	*Número de unidades*
$ 600–$ 799	3
800– 999	7
1 000– 1 199	11
1 200– 1 399	22
1 400– 1 599	40
1 600– 1 799	24
1 800– 1 999	9
2 000– 2 199	4
Total	120

¿Cuál es la media de las rentas mensuales?

✔ Solución

Se considera que el punto medio de la primera clase ($699.50) representa los tres condominios en renta de esa clase. Tal punto medio se determinó con ($600 + $799)/2. De forma que los tres valores de esa clase dan un total aproximado de 3 × $699.50 o sea $2 098.50. Después, el punto medio de clase de $899.50 corresponde a las rentas en la clase $800–$999. El total de esa clase es $6 296.50, que se obtiene mediante 7 × $899.50. Este proceso continúa para todas las clases. El monto total de las rentas mensuales es $175 340 (véase la tabla 3-1).

TABLA 3-1

Rentas de 120 nuevas unidades en condominio

Rentas mensuales	*Número (f)*	*Punto medio (X)*	*Frecuencia × punto medio (fX)*
$ 600–$ 799	3	$ 699.50	$ 2 098.50
800– 999	7	899.50	6 296.50
1 000– 1 199	11	1 099.50	12 094.50
1 200– 1 399	22	1 299.50	28 589.00
1 400– 1 599	40	1 499.50	59 980.00
1 600– 1 799	24	1 699.50	40 788.00
1 800– 1 999	9	1 899.50	17 095.50
2 000– 2 199	4	2 099.50	8 398.00
Total	120		$175,340.00
	n		ΣfX

Resuelva para obtener la media aritmética de la muestra:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{n}$$

$$= \frac{\$175\ 340}{120}$$

$$= \$1\ 461.17$$

Se subrayó que la media de datos agrupados en una distribución de frecuencias puede ser diferente de la media obtenida utilizando los datos originales. El agrupamiento da como resultado cierta pérdida de información. En el problema de las rentas, la media evaluada utilizando los datos sin agrupar del capítulo 2 se calculó como $1 457.93, que es muy cercana a la media que se acaba de calcular ($1 461.17) que utiliza la distribución de frecuencias. De esta forma, la media de datos agrupados sólo puede considerarse como una *estimación* de datos no agrupados (u originales).

AUTOEXAMEN 3-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los ingresos netos de una muestra de grandes importadores de antigüedades se organizaron en la tabla que sigue:

Ingreso neto (millones de dólares)	*Número de importadores*
$2–$ 4	1
5– 7	4
8– 10	10
11– 13	3
14– 16	2

a. ¿Cómo se denomina la tabla?
b. Estime la media aritmética del ingreso neto.

La mediana

Recuérdese que la mediana se define como el valor debajo del cual se encuentra la mitad de los datos y arriba del cual se halla la otra mitad. Una vez que los datos originales se han organizado en una distribución de frecuencias, parte de la información no es identificable. Como resultado no es posible determinar la mediana exacta. Sin embargo, puede estimarse 1) localizando el intervalo de clase en el que se encuentra la mediana, y después 2) interpolando dentro de esa clase para obtener la mediana. La razón para este enfoque es que los elementos de la clase en que se encuentra la mediana están espaciados de manera uniforme por todo ese intervalo de clase. La fórmula es:

$$\text{Mediana} = L + \frac{\frac{n}{2} - FA}{f}(i)$$

en donde:

- L es el límite inferior *verdadero* de la clase que contiene a la mediana.
- n es el número total de frecuencias.
- f es la frecuencia de la clase que contiene a la mediana.
- FA es el número acumulativo de frecuencias en todas las clases que preceden inmediatamente a la clase que contiene la mediana.
- i es la anchura de la clase en que se encuentra la mediana.

Primero se estimará la mediana localizando la clase en la cual se encuentra e interpolando. Después se aplicará la fórmula para la mediana a fin de verificar la respuesta.

✱ Ejemplo

De nuevo se utiliza el problema de las rentas mensuales de 120 condominios para mostrar el procedimiento que sirve para estimar la mediana (véase la tabla 3-2). Las frecuencias acumuladas de la columna de la derecha se utilizarán en breve. ¿Cuál es la mediana de las rentas?

TABLA 3-2

Rentas mensuales

Rentas mensuales	*Frecuencias (f)*	*Frecuencias acumuladas (FA)*
$ 600–$ 799	3	3
800– 999	7	10
1 000– 1 199	11	21
1 200– 1 399	22	43
1 400– 1 599	40	83
1 600– 1 799	24	107
1 800– 1 999	9	116
2 000– 2 199	4	120

✔ Solución

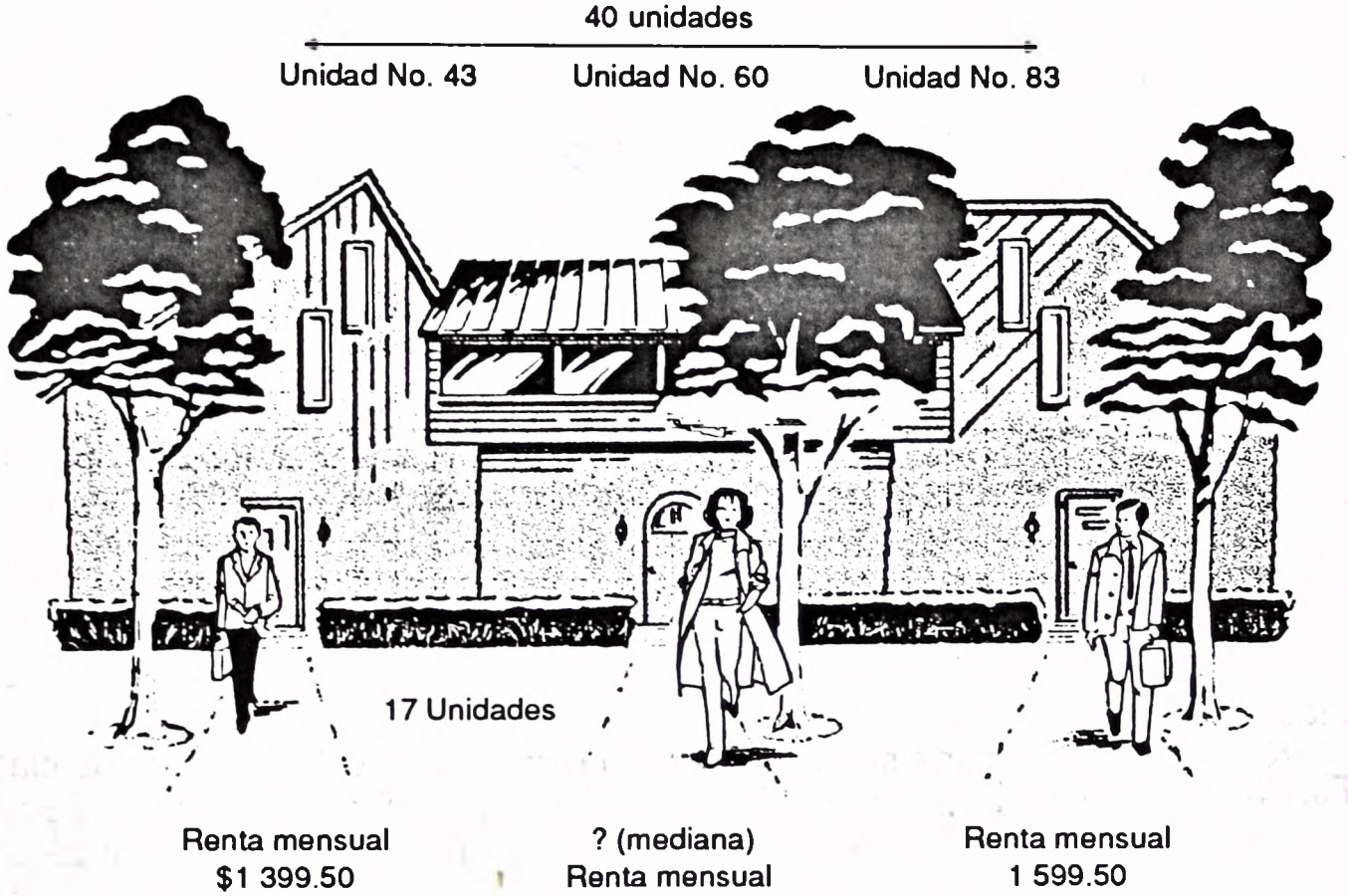
Las rentas mensuales ya están ordenadas en forma ascendente desde $600 hasta $2 199. Es práctica común localizar la observación central dividiendo el número total de observaciones entre 2. En este caso, $n/2 = 120/2 = 60$.[1] La clase que contiene al 60º condominio se localiza consultando la línea de frecuencias acumuladas de la tabla 3-2. Obsérvese que 43 unidades cuestan $1 399 o menos, y 83 cuestan $1 599 o menos. Por tanto, la 60ª renta se encuentra en la clase $1 400 a $1 599. Recuérdese que el límite inferior de esa clase es en realidad $1 399.50, y su límite superior $1 599.50. Por tanto, hemos localizado el costo mensual correspondiente a la mediana en alguna parte entre los límites de clase verdaderos $1 399.50 y $1 599.50.

Para interpolar en la clase $1 399.50–$1 599.50, recuérdese que se considera que las rentas mensuales están distribuidas de manera uniforme entre los límites inferior y superior verdaderos. Existen 17 valores entre los condominios 43º y 60º, y 40 unidades en la clase que contiene a la mediana. (Véase la gráfica 3-2.) Por tanto, la mediana está a 17/40 de la distancia entre $1 399.50 y $1 599.50. Tal distancia es $200. De modo que 17/40 de $200, o sea $85, se suma al límite inferior

[1] Desde el punto de vista técnico debe ser $(n + 1)/2$, pero por lo general la diferencia no es importante.

DIAGRAMA 3-2

Posición de la 60ª unidad en renta



verdadero de $1 399.50 para obtener $1 484.50, la mediana estimada de las rentas. En resumen:

$$\text{Mediana} = \$1\,399.50 + \frac{60 - 43}{40}(\$200)$$

$$= \$1\,399.50 + \frac{17}{40}(\$200)$$

$$= \$1\,399.50 + \$85$$
$$= \$1\,484.50$$

Si se utiliza la fórmula para la mediana de datos agrupados dada antes, L es $1 399.50, límite inferior verdadero de la clase que contiene a la mediana; n es 120 unidades; FA es 43, el número acumulativo de rentas (frecuencias acumuladas) que preceden a la clase que contiene a la mediana; f es 40, la frecuencia de la clase que contiene a la mediana; e i es $200, anchura de la clase en que está la mediana.

$$\text{Mediana} = L + \frac{\frac{n}{2} - FA}{f}(i)$$

$$= \$1\,399.50 + \frac{\frac{120}{2} - 43}{40}(\$200)$$

$$= \$1\,399.50 + \frac{17}{40}(\$200)$$

$$= \$1\,399.50 + \$85$$

$$= \$1\,484.50 \text{ (igual al valor determinado antes)}$$

La consideración en que se basa la aproximación de la mediana —que las frecuencias en la clase que contiene a la mediana se distribuyen en forma uniforme entre $1 399.50 y $1 599.50— puede no ser correcta. Por lo tanto, es más seguro decir que, *aproximadamente,* los valores de la mitad de las rentas son menores que $1 484.50 y la otra mitad es mayor que $1 484.50. De nuevo, la mediana de datos agrupados en una distribución de frecuencias (en este caso $1 484.50) y la mediana de datos no agrupados ($1 464.50 de la tabla 2-2 del capítulo 2) probablemente serán algo distintas, pero esos cálculos son los mejores que se pueden realizar dadas las circunstancias.

Nota final: la mediana se basa sólo en las frecuencias y los límites de clase verdaderos de la clase que contiene a la mediana. Las clases de extremo abierto que ocurren en los extremos rara vez se necesitan. Por tanto, la mediana de una distribución de frecuencias que tenga extremos abiertos, prácticamente siempre puede determinarse. La media (aritmética) de una distribución de frecuencias con una clase de extremo abierto no puede evaluarse en forma exacta, —a menos que se estimen los puntos medios de las clases de extremo abierto. Además, es posible determinar la mediana si se dan *frecuencias porcentuales* en vez de las frecuencias absolutas. Esto se debe a que la mediana es el valor con 50% de la distribución por encima, y 50% por debajo de ella, y no depende de los conteos reales. Los porcentajes se consideran como sustitutos de las frecuencias reales. En cierto sentido, son frecuencias absolutas cuyo total es 100.0. En el problema 2 del autoexamen que sigue se tienen frecuencias de extremo abierto y porcentajes.

Moda

Recuérdese que la moda se define como el valor que ocurre con más frecuencia. Para datos agrupados en una distribución de frecuencias, es posible aproximar la moda usando el *punto medio de la clase que contiene el mayor número de frecuencias de clase.* Del problema 2 en el autoexamen 3-6, las ventas netas modales se obtienen localizando primero la clase con el mayor número de frecuencias. Es la clase $7–$9, porque el mayor número de frecuencias de clase (40) se encuentra en ésa. El punto medio de tal clase ($8 millones) es la moda estimada. Esto indica que más plantas de estampado tuvieron ventas netas de $8 millones que cualquier

AUTOEXAMEN 3-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Una muestra de la producción diaria de aparatos de comunicación en Scott Electronics se organizó en la distribución que sigue.

Producción diaria	*Frecuencias*
80– 89	5
90– 99	9
100–109	20
110–119	8
120–129	6
130–139	2

Considerando que los límites de clase verdaderos son 79.5 - 89.5 y así sucesivamente, estime la mediana de la producción diaria.

2. Las ventas netas de una muestra de pequeñas plantas de estampado se organizaron en la siguiente distribución de frecuencias porcentuales.

Ventas netas (millones de dóls.)	*Porcentaje del total*
$ 1–$ 3	13
4– 6	14
7– 9	40
10– 12	23
13 y más	10

¿Cuál es la mediana de las ventas netas?

otra cantidad. Si se dispusiera de datos no agrupados, el valor que aparece con más frecuencia, probablemente sería algo distinto de $8 millones.

Dos valores pueden ocurrir un número elevado de veces. Entonces se dice que la distribución es *bimodal*. Supóngase que las edades de una muestra de trabajadores son 22, 27, 30, 30, 30, 30, 34, 58, 60, 60, 60, 60 y 65. Las dos modas son 30 y 60. Con frecuencia se desarrollan dos puntos de concentración porque la población que se muestrea no es homogénea. En este ejemplo, la población podría estar compuesta por dos conjuntos: un grupo de empleados relativamente jóvenes que se han contratado hace poco para cubrir la mayor demanda de un producto, y el otro, un grupo de empleados de mayor edad que han estado en la empresa durante largo tiempo.

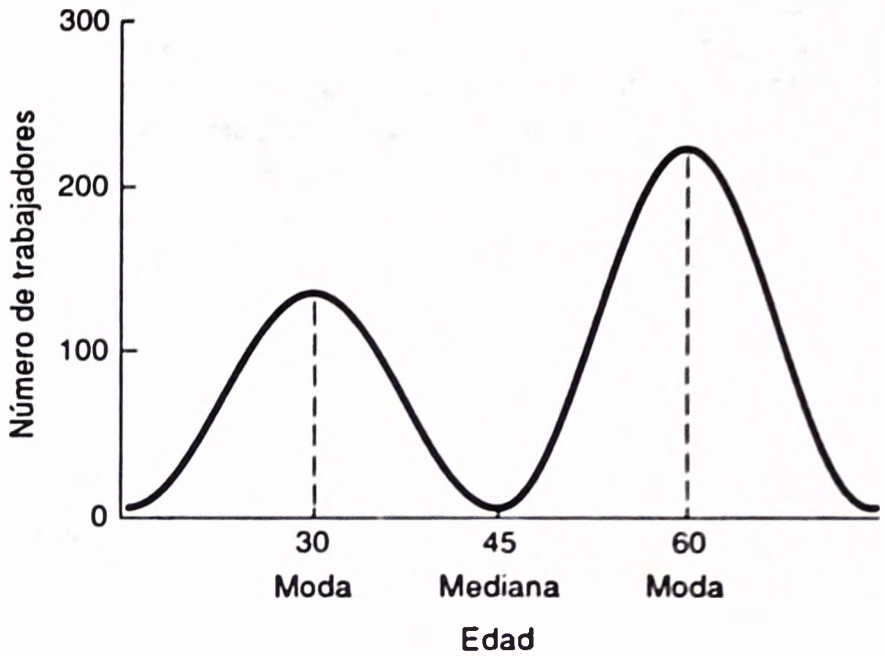
Si se muestreara a un gran número de trabajadores, la distribución de sus edades al graficarse, podría aparecer según se muestra en el diagrama 3-3. Obsérvese que los dos picos no necesitan tener exactamente la misma altura para que consideremos a la distribución como bimodal.

Según se muestra en el diagrama, la mediana es aproximadamente 45 años. Esta no sería una edad representativa para los empleados recientemente contratados. Tampoco sería una edad representativa para el grupo de empleados de más edad. Por tanto, una decisión lógica consistiría en dividir a los empleados en dos grupos diferentes antes de continuar con el análisis de los datos.

Si el conjunto de datos tiene más de dos modas, a la distribución se le denomina *multimodal*. En tales casos no se consideraría ninguna de las modas como representativa del valor central de los datos.

DIAGRAMA 3-3

Distribución bimodal



EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

17. El Departamento de Comercio de Estados Unidos, en el *County and City Data Book*, informó los siguientes ingresos domésticos en Alaska y Connecticut:

	Porcentaje de hogares	
Ingresos	*Alaska*	*Connecticut*
Menores de $20 000	18.3	22.2
$20 000–$29 999	21.2	27.6
30 000– 39 999	18.4	24.1
40 000– 49 999	15.1	13.1
50 000– 59 999	11.3	6.0
60 000 y mayores	15.7	7.0

Para la distribución de ingresos en Alaska:
a. ¿Cuál es la mediana? Interprete su respuesta.
b. ¿Cuál es el valor modal? Interprete su respuesta.

18. Remítase al ejercicio 17. Para la distribución de ingresos en Connecticut:
a. ¿Cuál es la mediana? Interprete su respuesta.
b. ¿Cuál es la moda? Interprete su respuesta.

19. Las edades de obreros no calificados de nueva contratación se agruparon en la distribución que sigue:

Edades	*Número*
18–20	4
21–23	8
24–26	11
27–29	20
30–32	7

a. ¿Cuál es la media aritmética?
b. ¿Cuál es la mediana?

20. Una muestra de camiones ligeros que utilizan aceite Diesel reveló las siguientes millas recorridas por galón de combustible consumido:

No. de millas	*Número de camiones*
10–12	2
13–15	5
16–18	10
19–21	8
22–24	3
25–27	2

a. ¿Cuál es la media aritmética de los datos?
b. ¿Cuál es la mediana?
c. ¿Cuál es el valor modal?

SELECCION DE UN PROMEDIO PARA DATOS DE UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

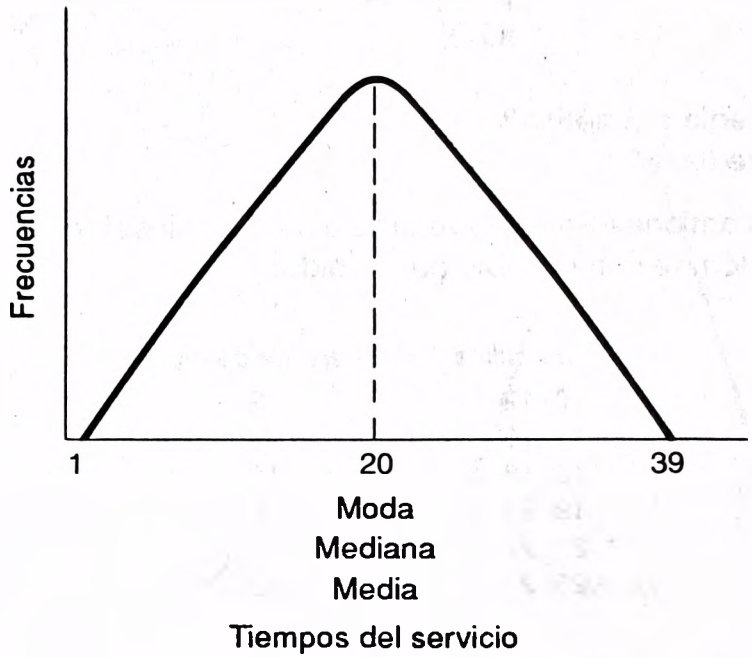
Remítase al polígono de frecuencias del diagrama 3-4. Es simétrico, lo cual significa que *la distribución tiene la misma forma a ambos lados del eje central.* Si el polígono se doblara por la mitad, las dos mitades serían idénticas. Para una distribución simétrica, la moda, la mediana y la media se localizan al centro y siempre son iguales. Hay en total 20 años en el diagrama 3-4, que indican los tiempos de servicio de empleados. (Véase la página 102.)

El tiempo de servicio en el punto más alto de la curva es la *moda* (20 años). Debido a que la curva de frecuencias es simétrica, la *mediana* corresponde al punto en donde la distribución se corta a la mitad (20 años). El total de tiempos de servicio de empleados con permanencia prolongada en la empresa está compensado por el servicio total de los empleados más recientes, lo que da como resultado una *media aritmética* de 20 años. Es lógico que cualquiera de los tres promedios resulte adecuado para representar los tiempos de servicio.

Conforme la distribución se vuelve asimétrica, o sesgada, la relación entre los tres promedios cambia. En una *distribución con asimetría positiva* (o con sesgo positivo), la media aritmética es el mayor de los tres promedios. Esto se debe a que en la media influyen más que en la mediana o la moda, valores sumamente altos.

DIAGRAMA 3-4

Distribución simétrica

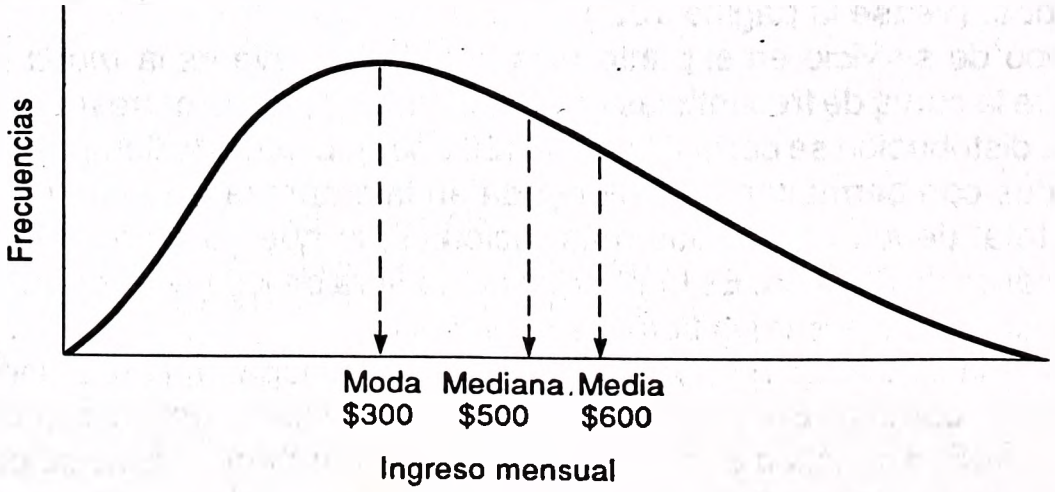


Por lo general, la mediana es el siguiente promedio mayor en una distribución de frecuencias con sesgo positivo. La moda es el menor de los tres promedios.

Si la distribución es muy asimétrica, como sucede con los ingresos mensuales del diagrama 3-5, la media no sería un promedio útil. La mediana y la moda son más representativas.

DIAGRAMAS 3-5

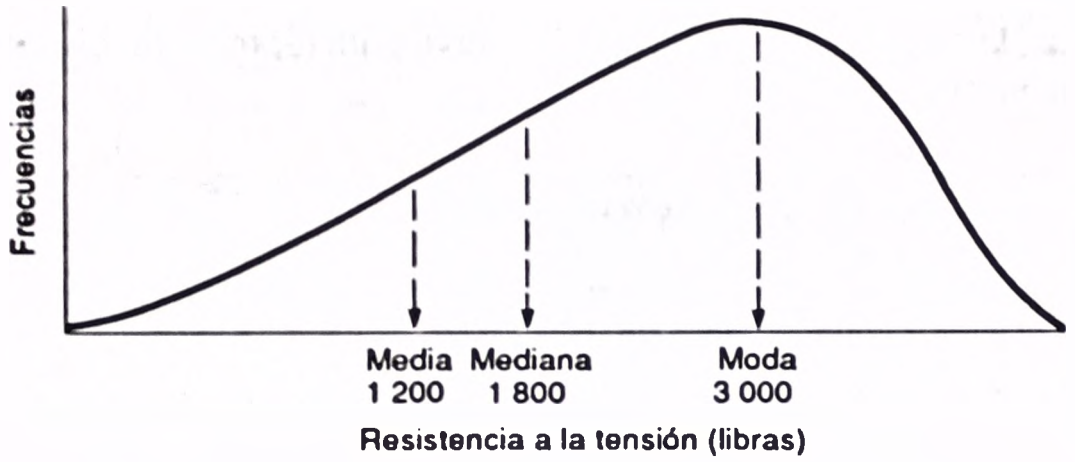
Distribución asimétrica positiva



Por lo contrario, en una distribución con *asimetría negativa*, la media es el menor de los tres promedios. Desde luego, la media se ve afectada por valores extremadamente bajos. La mediana es mayor que la media aritmética. El valor modal es el mayor de los tres promedios. De nuevo, si la distribución es muy asimétrica, como sucede en la distribución de resistencias a la tensión que se muestra en el diagrama 3-6, la media no debería utilizarse para representar los datos.

DIAGRAMA 3-6

Distribución asimétrica negativa



Una relación aproximada entre los tres promedios es: si existe un número suficientemente grande de observaciones que sugiera una distribución uniforme y si la forma de la curva sólo presenta un sesgo moderado, *la mediana está aproximadamente a un tercio de la distancia entre la media y la moda.*

Si se conocen dos promedios y una distribución de frecuencias con sesgo o asimetría moderados, el tercer promedio puede aproximarse. Las fórmulas son:

$$\text{Moda} = \text{Media} - 3(\text{Media} - \text{Mediana})$$

$$\text{Media} = \frac{3(\text{Mediana}) - \text{Moda}}{2}$$

$$\text{Mediana} = \frac{2(\text{Media}) + \text{Moda}}{3}$$

Se observó antes que si la distribución tiene extremos abiertos, no es posible evaluar la media, —a menos que pueda aproximarse el punto medio de la clase o clases de extremo abierto. Por ejemplo, considérese la distribución que sigue. A

menos que puedan estimarse el valor del punto medio de la clase "menores que $50 000" y el del punto medio de la clase "$250 000 y mayores" no es posible determinar la media.

Ingreso anual	*Número de ejecutivos*
Menos de $50 000	17
$50 000 a $100 000	62
$100 000 a $150 000	103
$150 000 a $200 000	73
$200 000 a $250 000	41
$250 000 y mayores	20

Sin embargo, la mediana y la moda podrían servir para representar el ingreso anual típico de los ejecutivos.

AUTOEXAMEN 3-7

Las respuestas se dan al final del capítulo

Las ventas semanales en una muestra de tiendas de suministros electrónicos Hi-Tec se organizaron en una distribución de frecuencias. Se calculó la media de las ventas semanales como $105 900, la mediana como $105 000 y la moda como $104 500.

a. Represente las ventas en forma de un polígono de frecuencias uniforme. Observe la ubicación de la media, la mediana y la moda sobre el eje *X*.
b. ¿La distribución es simétrica, asimétrica positiva o bien asimétrica negativa? Explique su respuesta.

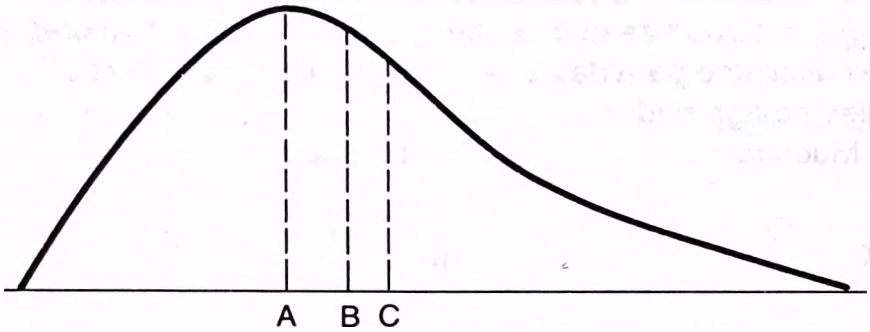
EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

21. Una máquina pesa carbón que se va cargando en barcos y registra en forma automática el total cada hora. Después de 132 horas de operación, los pesos totales se organizaron en una distribución de frecuencias y con base en tal distribución se trazó una gráfica, que presentó una forma aproximadamente simétrica. El valor medio de la carga por hora se calculó como 1 200 toneladas.
    a. ¿Cuál es la mediana? Explique su respuesta.
    b. ¿Cuál es la moda? Explique su respuesta.

22. Las razones precio-ganancia para un grupo selecto de acciones comunes se organizaron en una distribución de frecuencias y se trazó el polígono de frecuencias adjunto. Se calcularon tres promedios (media, mediana y moda). Uno de los tres fue 10.2, otro 10.8 y el otro 11.1.
    a. ¿Cuál es el valor de la mediana? ¿Qué indica esto?
    b. ¿Cuál es el valor de la moda? Interprete la respuesta.

c. ¿Cuál es el valor de la media?



23. Idaho Trout Farm, Inc., cría truchas en forma comercial. La gerencia está interesada en la longitud y peso de las truchas y continuamente toma muestras de los estanques. Una muestra del estanque 42 reveló que la longitud modal es 12.0 pulgadas, y la media, 12.9 pulgadas.
    a. ¿Cuál es la mediana aproximada de las longitudes?
    b. Trace una gráfica de la distribución e identifique cada uno de los promedios.

24. El departamento de Educación Especial en Coldstream University aplicó una prueba a niños con deficiencias. La puntuación modal fue 72.0 y la mediana, 78.0.
    a. ¿Cuál es la puntuación media aproximada?
    b. Grafique la distribución e identifique cada uno de los promedios.

RESUMEN

En este capítulo se analizaron cuatro medidas de tendencia central. Describen el "centro", o valor representativo, de un conjunto de datos. El promedio más utilizado es la *media aritmética*. Se calcula sumando las observaciones y dividiendo el total entre el número de éstas.

La *mediana* es menos sensible a observaciones muy grandes o muy pequeñas. Es el valor de la observación central después de que el conjunto de datos se ha dispuesto en orden ascendente. La *moda* es el valor del elemento observado con mayor frecuencia.

Las relaciones entre moda, mediana y media dan información acerca de la asimetría o sesgo. Si la media es la mayor medida de tendencia central, la mediana le sigue en tamaño, y la moda es la menor, la distribución tiene *asimetría positiva* o es sesgada positivamente. Si la moda es la mayor de las tres medidas y la media la menor, la distribución tiene *asimetría negativa* o es sesgada negativamente. Si los tres promedios son idénticos la distribución es *simétrica* o insesgada.

La *media geométrica* es muy útil para promediar porcentajes, razones y números índice, y determinar la tasa anual promedio de variación de un periodo (por ejemplo, 1970) a otro (por ejemplo, 1990).

Recapitulación

I. Un promedio es un valor único representativo de un conjunto de datos.
    A. La media es el promedio más utilizado.

1. Es la suma de todos los valores dividida entre el número de ellos.
2. Es el punto de equilibrio de un conjunto de valores, lo que significa que la suma de las desviaciones con respecto a la media es siempre cero.
3. Su mayor debilidad es que puede quedar influida por valores extremos.
4. Puede calcularse para datos de nivel de intervalo o de razón.
   a. Datos no agrupados
      (1) Muestra (2) Población

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} \qquad \mu = \frac{\Sigma X}{N}$$

   b. Datos agrupados
      (1) Muestra (2) Población

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{n} \qquad \mu = \frac{\Sigma X}{N}$$

   c. Media ponderada

$$\bar{X}_w = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + w_3X_3 + \cdots + w_nX_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} \quad \text{o bien} \quad \bar{X}_w = \frac{\Sigma(w \cdot X)}{\Sigma w}$$

B. La mediana es el valor que se encuentra en el centro.
   1. La mitad de las observaciones son mayores que la mediana, y la mitad son menores.
   2. No está influida por valores extremos.
   3. Puede calcularse para datos de nivel ordinal, de intervalo o de razón.

$$\text{Mediana} = L + \frac{\frac{n}{2} - FA}{f}(i)$$

C. La moda es el valor que ocurre con más frecuencia.
   1. Un conjunto de valores puede tener más de una moda.
   2. Puede determinarse para datos de niveles nominal, ordinal, de intervalo y de razón.

D. Una media geométrica es la raíz *n*-ésima del producto de *n* valores.
   1. Con frecuencia se emplea para evaluar el promedio de un conjunto de porcentajes.

$$\text{Media geométrica} = \sqrt[n]{(X_1)(X_2)(X_3)\cdots(X_n)}$$

   2. También se utiliza para medir el incremento porcentual anual promedio en datos de administración o economía de un periodo a otro.

$$\text{Media geométrica} = \left[\sqrt[n-1]{\frac{\text{Valor al final del periodo}}{\text{Valor al principio del periodo}}}\right] - 1$$

II. Una distribución es simétrica si tiene la misma forma a cada lado de su eje central.
   A. En una distribución simétrica la media, la mediana y la moda son iguales.
   B. La asimetría (o sesgo) es la falta de conformación simétrica en una distribución.
      1. En una distribución con asimetría positiva el extremo alargado (cola) está a la derecha, y la media es mayor que la mediana o la moda.
      2. En una distribución con asimetría negativa el extremo alargado está a la izquierda, y la media es menor que la mediana o la moda.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

25. Merrill Lynch Corporate Bond Fund, Inc. informó las siguientes estadísticas como parte de su resumen de actividades:

	Dividendos pagados		
	Ingreso alto	*Alta calidad*	*Plazo intermedio*
1981	1.13	1.46	1.37
1982	1.04	1.36	1.36
1983	1.01	1.22	1.20
1984	1.02	1.21	1.18
1985	1.01	1.18	1.16
1986	0.98	1.07	1.03
1987	0.95	0.99	0.94

En lo referente a los dividendos pagados por la cartera de alto ingreso:
a. ¿Cuál es el dividendo medio pagado para este periodo?
b. ¿Cual es la mediana de los dividendos pagados durante este periodo?
c. ¿Cuál es el valor modal de los dividendos pagados durante el citado periodo?
d. En su opinión, ¿qué promedio representa mejor los dividendos pagados durante ese periodo?

26. En relación con el ejercicio 25. En lo que concierne a los dividendos anuales pagados durante el periodo para la cartera de plazo intermedio:
a. ¿Cuál es el dividendo medio?
b. ¿Cuál es la mediana de los dividendos?
c. ¿Cuál es el valor modal de los dividendos?
d. ¿En su opinión, ¿qué promedio representa mejor los dividendos de plazo intermedio?

27. En su informe anual, la empresa NCR presentó estos ingresos netos trimestrales por acción común:

	Ingreso neto por acción		*Ingreso neto por acción*
1986		1987	
Primer trimestre	$0.51	Primer trimestre	$0.65
Segundo trimestre	0.80	Segundo trimestre	1.05
Tercer trimestre	0.75	Tercer trimestre	1.05
Cuarto trimestre	1.39	Cuarto trimestre	1.79

a. Determine el ingreso neto medio por acción para el periodo de dos años (bienal).
b. Dètermine la mediana del ingreso neto por acción para el periodo.
c. Determine el ingreso neto modal por acción para el periodo en cuestión.
d. En su opinión, ¿cuál de las tres medidas de tendencia central describe mejor el ingreso neto por acción durante ese tiempo?

28. En su informe anual la compañía Monsanto indicó que su ingreso operativo en 1983 fue de $521 millones (dólares). En 1987 fue de $734 millones. ¿Cuál es la media geométrica del cambio porcentual anual en el ingreso de operación durante este periodo?
29. En relación con el ejercicio 28. Monsanto también informó que el activo total se incrementó de $6 427 millones en 1983 a $8 455 millones en 1987. ¿Cuál es la media geométrica del cambio porcentual anual en activo total entre 1983 y 1987?
30. Tampa Electric indicó en su informe anual que el número de clientes residenciales aumentó de 309 622 en 1982 a 380 277 en 1987. ¿Cuál es la media geométrica del cambio porcentual anual en el número de clientes residenciales entre esos años?
31. En relación con el ejercicio 30. Tampa Electric también informó que el número de clientes comerciales aumentó de 36 878 en 1982 a 47 971 en 1987. ¿Cuál es la media geométrica del cambio porcentual anual entre esos años?
32. Parece ser que una máquina automática que llena recipientes está trabajando de manera errática. Una verificación de los pesos del contenido de un cierto número de latas reveló lo siguiente:

Peso (en gramos)	*Número de latas*
130–139	2
140–149	8
150–159	20
160–169	15
170–179	9
180–189	7
190–199	3
200–209	2

a. Redondeando a décimos de gramo (como en 161.3), estime la media aritmética del peso del contenido de una lata.
b. Redondeando a décimos de gramo, estime la mediana del peso del contenido de una lata.

33. El Departamento de Comercio, Oficina del Censo, informó que 515 600 mujeres no casadas dieron a luz el año pasado. La edad y número de madres solteras se presenta en una distribución de frecuencias.

Edad de la madre	*Número (en miles)*
Menores de 15 años	10.1
15–19 años	239.7
20–24 años	168.6
25–29 años	62.4
30–34 años	23.7
35–39 años	8.8
40 años y mayores	2.3

Estime la mediana de las edades de las madres solteras. Explique su respuesta.

34. El Departamento de Comercio, Oficina del Censo, informó también sobre el número de responsables económicos de familias estadounidenses:

Número de responsables del ingreso	*Número (en miles)*
0	7 083
1	18 621
2	22 414
3	5 533
4 o más	2 797

a. ¿Cuál es el valor modal del número de responsables del ingreso en una familia estadounidense representativa? Explique lo que indica esto.
b. ¿La media o la mediana del número de responsables económicos sería un promedio representativo? Explique su respuesta.

35. La Oficina del Censo, en *Current Population Reports,* serie P-20, proporcionó las edades de hombres y mujeres divorciados (en miles de personas de 18 años de edad o más):

Edad	*Hombres*	*Mujeres*
18–19	5	9
20–24	80	210
25–29	174	303
30–34	210	315
35–44	385	656
45–54	450	656
55–64	295	409
65–74	174	200
75 y mayores	56	69

a. Estime la mediana de la edad de hombres divorciados. Explique la respuesta.
b. Estime la mediana de la edad de mujeres divorciadas. Explique la respuesta.
c. Estime el valor modal para los hombres. Haga lo mismo para las mujeres.

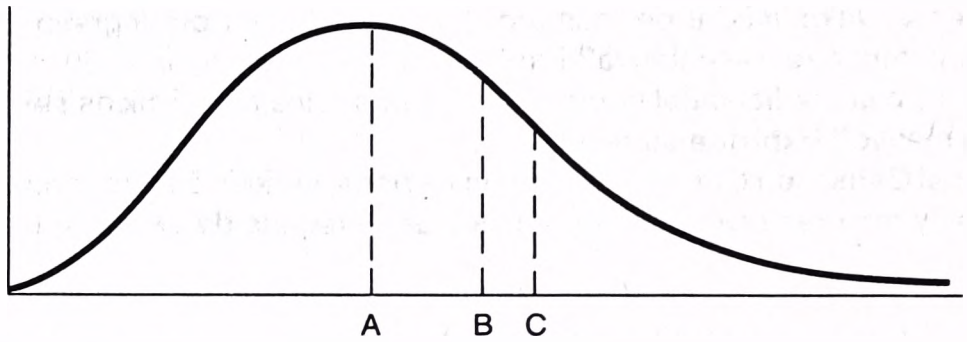
36. Las preguntas desde la *a* hasta la *h* se refieren a las medidas de tendencia central indicadas y a las formas de una distribución.

Medidas de tendencia central	*Formas de distribución*
Media aritmética	Simétrica
Mediana	Asimétrica positiva
Moda	Asimétrica negativa

a. ¿Qué medida de tendencia central se define como el valor del elemento que aparece con más frecuencia?
b. ¿Cuáles son las dos medidas de tendencia central que no se ven afectadas por los valores muy pequeños o muy grandes?
c. ¿Qué medida (que no aparece en la lista) debe utilizarse para determinar el incremento porcentual anual promedio en ventas, por ejemplo, de 1962 a 1989?
d. ¿Cómo se describe la forma de una distribución de frecuencias si las tres medidas de tendencia central son iguales?
e. ¿Cómo se describe la forma de una distribución de frecuencias si la media es la mayor de las tres medidas de tendencia central?

f. ¿Qué medida de tendencia central se determina sumando todos los valores y dividiendo esta suma entre el número de éstos?
g. ¿Qué medida de tendencia central se define como el punto por encima del cual se encuentra la mitad de los valores, y por debajo del cual está la otra mitad?
h. En una distribución de frecuencias con sesgo negativo, ¿qué medida de tendencia central es la mayor?

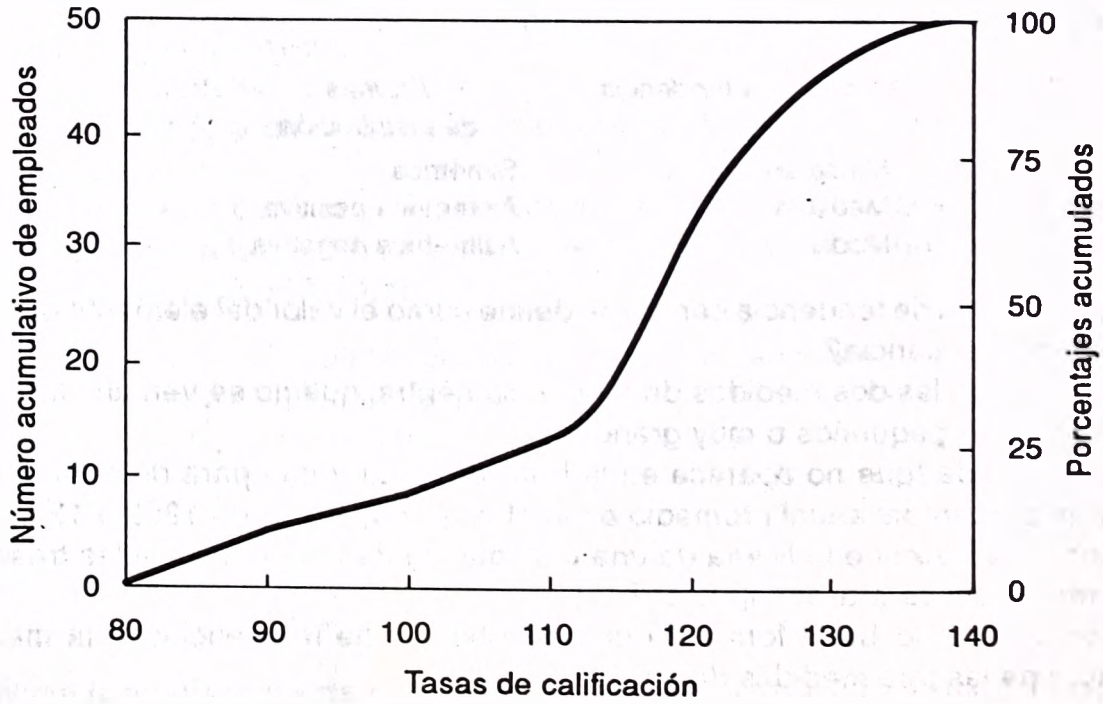
37. Un subastador de autos se especializa en automóviles usados de más de 10 años. Los precios de venta de un gran número de automóviles se agruparon en una distribución de frecuencias y se trazó un polígono de frecuencias uniforme.



El promedio representado por la letra *A* se calculó como $3 000, y el representado por *B* fue $3 220.

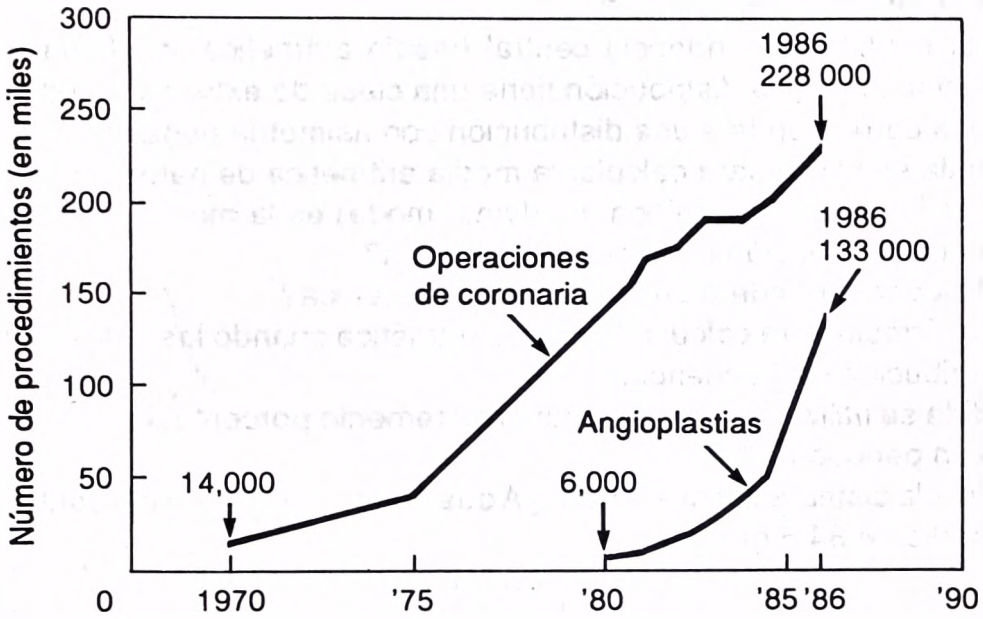
a. Evalúe aproximadamente el promedio que representa la letra *C*.
b. ¿Cómo se denomina este promedio y por qué es mayor que los otros dos?
c. ¿Cuál es el precio modal?
d. ¿La distribución de los precios es simétrica, asimétrica positiva o asimétrica negativa? Mencione alguna evidencia.

38. A cada trabajador se le otorga una tasa de producción que representa su eficiencia en el trabajo. Las tasas se organizaron en una distribución de frecuencias y después se representaron en forma de un polígono de frecuencias acumuladas "menores que". Con base en la gráfica, ¿cuál es la mediana aproximada de las tasas?



APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. En el *U.S. News & World Report* apareció un artículo que comparaba el número de operaciones de válvula coronaria con el número de procesos de angioplastia. Se observó que en 1986 el número de los procesos de angioplastia fue más de la mitad del número de operaciones de coronaria. Compare las tasas anuales de incremento para las dos acciones. Con dichas tasas, ¿cuándo llegarán a ser aproximadamente iguales el número de operaciones de angioplastia y de válvula?



2. Los números de carreras anotadas por los equipos estadounidenses de beisbol de liga mayor, en julio 16 y 17, de 1988, se dan a continuación.

7	6	10	1	4	1	7	4
4	3	4	3	8	2	10	8
7	3	7	2	3	0	4	0
9	6	7	4	2	2	10	6
10	1	6	1	3	2	3	2
10	4	5	4	3	1	4	2
3	1	4	1	5	2		

¿Cómo respondería a la pregunta: ¿"Cuántas carreras se logran en un juego de beisbol representativo de las ligas mayores?" Apoye su respuesta calculando y describiendo los diferentes tipos de promedios.

3. En relación con el ejercicio 2 de Aplicación de los Conceptos, capítulo 2. Calcule la media del número de puntos obtenidos en la clase de estadística. Compare esto con el valor de la mediana. Explique sus respuestas.
4. Remítase al ejercicio 3 en Aplicación de los Conceptos, capítulo 2. Calcule la cantidad media gastada por las personas de la muestra. Determine la mediana. ¿En qué forma explicaría cualquier diferencia existente? Si la gerencia le preguntara: "¿Cuál es la cantidad gastada representativa?", qué respondería usted. Si la tienda Loblaw en Market St. Plaza. tiene 750 clientes en un día, ¿cuánto dinero es de esperarse que recibiría la tienda?

EXAMEN CAPITULO 3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Nota: Para las preguntas 1-10, elija y marque con la letra que corresponda a la respuesta correcta.

Preguntas

1. ¿Qué medida de tendencia central se obtiene al disponer los datos de menor a mayor y seleccionar el valor central?
2. ¿Cuál es la medida de tendencia central (media aritmética, mediana, moda) que no puede determinarse si la distribución tiene una clase de extremo abierto?
3. ¿Qué gráfica corresponde a una distribución con asimetría negativa?
4. ¿Qué fórmula se utiliza para calcular la media aritmética de datos no agrupados?
5. ¿Qué promedio (media aritmética, mediana, moda) es la menor medida de tendencia central en una distribución con asimetría positiva?
6. ¿Qué gráfica corresponde a una distribución simétrica?
7. ¿Cuál es la fórmula para calcular la media aritmética cuando los datos se han agrupado en una distribución de frecuencias?
8. ¿Qué medida se utiliza para determinar el incremento porcentual anual promedio en las ventas de un periodo a otro?
9. De acuerdo a la distribución que sigue. ¿A qué medida de tendencia central corresponde el punto medio de 84.5 gramos?

Peso (en gramos)	*f*
60– 69	2
70– 79	5
80– 89	12
90– 99	3
100–109	1

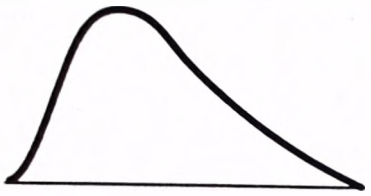
10. ¿Cuál es la medida de tendencia central que no debe utilizarse cuando se tiene una distribución notablemente sesgada?

Respuestas

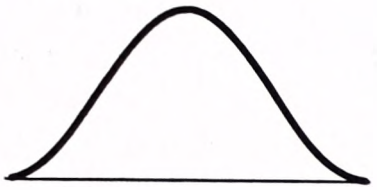
A. Media aritmética.
B. Mediana.
C. Moda.
D. Media geométrica.
E. $\frac{\Sigma X}{n}$
F. $\frac{\Sigma(w \cdot X)}{\Sigma w}$
G. $L + \frac{\frac{n}{2} - FA}{f}(i)$

H. $\frac{\Sigma fX}{n}$

I.



J.



K.

L. $\left(\sqrt[n-1]{\frac{\text{Valor al final}}{\text{Valor al principio}}}\right) - 1$

Las preguntas 11 y 12 se refieren a los siguientes tiempos de servicio para varios empleados que se retiran o jubilan.

Empleado	*Tiempo de servicio (años)*
M. Arce	13
S. Jiménez	22
T. Saam	27
B. Sorel	24
L. Arce	19

11. ¿Cuál es la media aritmética de los tiempos de servicio?
12. ¿Cuál es la mediana de dichos tiempos?

Las preguntas 13-16 se refieren a la siguiente distribución de frecuencias, en donde se muestran las ventas anuales de 50 pequeñas tiendas de antigüedades.

Ventas (miles de dólares)	*Número de empresas*
\$100–\$119	5
120– 139	7
140– 159	9
160– 179	16
180– 199	10
200– 219	3
Total	50

13. ¿Cuál es la mediana de las ventas?

14. ¿Cuál es la media aritmética de las ventas?
15. ¿Cuál es la moda estimada?
16. ¿La distribución de las ventas es ¿simétrica, o bien sesgada positiva o negativamente? Explique su respuesta.
17. La producción de hojas de madera terciada ("triplay") aumentó de 30 millones en 1984 a 456 millones en 1989. ¿Cuál es el incremento porcentual anual promedio aproximado en la producción de 1984 a 1989?
18. ¿Qué medida de tendencia central (media aritmética, mediana, moda) no puede evaluarse si la distribución tiene clases de extremo abierto? Explique su respuesta.
19. ¿Qué medida de tendencia central (media aritmética, mediana, moda) se ve afectada por los valores extremos?
20. La media aritmética de una distribución con sesgo moderado se calculó como 230 y la moda como 200. ¿Cuál es el valor estimado de la mediana? Explique lo que indica esta cifra.

Autoexámenes

3-1 1. a. $\overline{X} = \dfrac{\Sigma X}{n}$

b. $= \dfrac{\$187\ 100}{4}$

$= 46\ 775$

$=$ \$46 800, redondeado

c. Estadístico, porque es un valor muestral.

d. \$46 800. La media muestral es la mejor estimación de la media poblacional.

2. a. $\mu = \dfrac{\Sigma X}{N}$

b. $\mu = \dfrac{498}{6} = 83$

c. Parámetro, porque se calculó usando todos los valores de la población.

3-2 a. \$237, que se obtiene por

$$\frac{(95 \times \$400) + (126 \times \$200) + (79 \times \$100)}{95 + 126 + 79}$$

$$= \frac{\$71\ 100}{300} = \$237$$

b. La ganancia por traje es \$12, que se obtiene por \$237 − \$200 (de costo) − \$25 (de comisión). La ganancia total por los 300 trajes es \$3 600, que resulta de 300 × \$12.

3-3 1. a. \$439.

b. 3, 3.

2. a. 7, obtenido de $(6 + 8)/2 = 7$.

b. 3, 3.

3-4 1. a. Aproximadamente 8.39%.

b. Aproximadamente 10.1%.

c. Sí, 10.1 > 8.39.

2. Aproximadamente 9% (en realidad es 8.6341985%).

3-5 a. Distribución de frecuencias.

b. \$9.15 millones, que se obtiene por

f	*X*	*fX*
1	\$ 3	\$ 3
4	6	24
10	9	90
3	12	36
2	15	30
20		\$183

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{n} = \frac{\$183}{20} = \$9.15$$

3-6 1. 105.0 aparatos de comunicación.

Límites de clase verdaderos.	*f*	*FA*
79.5– 89.5	5	5
89.5– 99.5	9	14
99.5–109.5	20	34
109.5–119.5	8	42
119.5–129.5	6	48
129.5–139.5	2	50

$n/2 = 50/2 = 25$. El aparato número 25 está en la clase 99.5–109.5.

$$99.5 + 11/20\,(10) = 105.0$$

o bien

$$99.5 + \frac{\frac{50}{2} - 14}{20}(10) = 105.0$$

2. $8.225 millones.

Límites de clase verdaderos (millones de dóls.)	*Porcentajes acumulados*
$ 0.5–$ 3.5	13
3.5– 6.5	27
6.5– 9.5	67
9.5– 12.5	90
12.5 y mayor	100

$n/2 = 100/2 = 50$

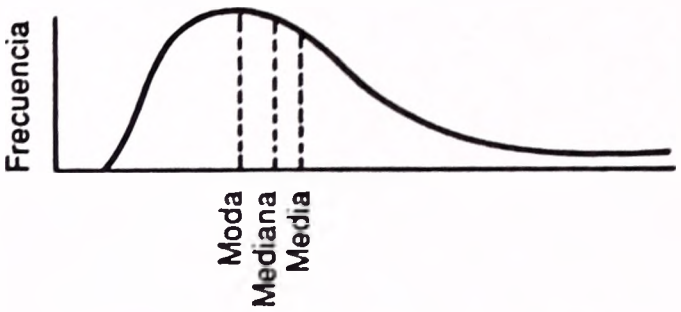
La mediana está en la clase de 6.5 a 9.5.

$$\$6.5 + \frac{50\% - 27\%}{40\%}(\$3)$$

$$= \$6.5 + \frac{23\%}{40\%} \times \$3$$

$$= \$8.225 \text{ o bien } \$8\,225\,000$$

3-7 a.



b. Con sesgo positivo, ya que la media es el mayor promedio, y la moda, el menor.

Examen capítulo 3

1. B.
2. A.
3. K.
4. E.
5. C.
6. J.
7. H.
8. D o bien L; L es la mejor selección.
9. C.
10. A.
11. 21 años, calculado por 105/5.
12. 22 años, que se obtiene al disponer los tiempos de servicio de menor a mayor, y seleccionar la observación central.
13. $164 500, que se obtiene calculando $159.5 + 4/16 de $20 (miles de dólares).
14. $160 700, calculado con $8 035 000/50.
15. $169 500, que es el punto medio de la clase que contiene el mayor número de frecuencias.
16. Con sesgo negativo, ya que la moda de $169 500 es la mayor de las tres medidas de tendencia central. La mediana es la siguiente y la media es el promedio más bajo.
17. Aproximadamente 72%.
18. La media aritmética. El punto medio de cualquier clase de extremo abierto no se puede determinar.
19. La media aritmética.
20. Aproximadamente 220, que se obtiene usando la fórmula [2 (media) + (moda)]/3. Aproximadamente la mitad de los valores son mayores que 220.

4

Medidas de dispersión y asimetría

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Calcular varias medidas de dispersión para datos originales o no agrupados.
2. Calcular varias medidas de dispersión para datos organizados en una distribución de frecuencias.
3. Explicar las características, usos, ventajas y desventajas de cada una de las medidas de dispersión descritas.
4. Explicar el teorema de Chebyshev y la regla empírica, o normal.
5. Calcular y explicar los usos del coeficiente de variación y del coeficiente de asimetría.
6. Analizar la curtosis de una distribución.

En el capítulo 2 se inició el estudio de la Estadística descriptiva. Se organizó un conjunto de datos originales en una tabla denominada distribución de frecuencias, y después se presentó en forma gráfica la distribución usando un histograma, un polígono de frecuencias o un polígono de frecuencias acumuladas, para describir mejor la forma y otras características importantes de los datos. En el capítulo 3 se calcularon varios promedios para describir un valor representativo cercano al centro de las observaciones.

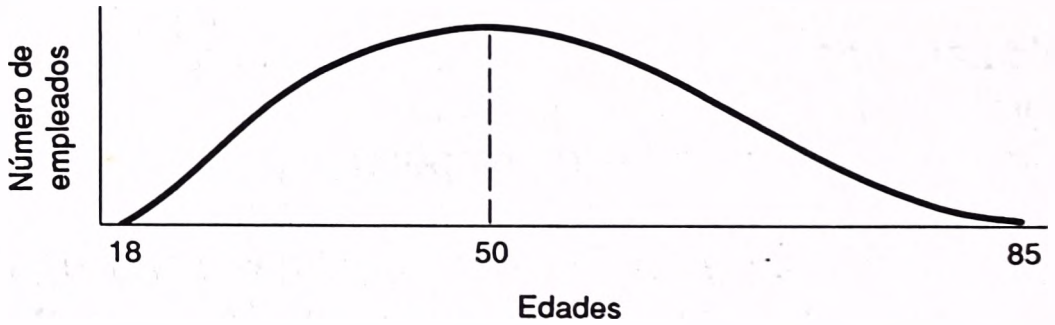
Ahora examinaremos varias medidas que describirán la *dispersión* o *variabilidad* de los datos. Se analizan en este capítulo la *amplitud total*, la *desviación media*, la *variancia* (o varianza), la *desviación estándar*, la *amplitud cuartílica*, la *desviación cuartílica* y la *amplitud centílica*.*

¿POR QUE ESTUDIAR LA DISPERSION?

1. Al aplicar una medida de dispersión es posible evaluar la confiabilidad del promedio que se está utilizando. Una dispersión pequeña indica que los datos se encuentran acumulados cercanamente, por ejemplo, alrededor de la media aritmética. Por tanto, la media se considera bastante representativa de los datos. Esto es, la media es un promedio confiable. Por el contrario, una dispersión grande indica que la media no es muy confiable, es decir, que no es muy representativa de los datos. Esto se ve en el diagrama 4-1. Obsérvese que las edades de los empleados varían de 18 a 85. Esta amplia dispersión da como resultado un promedio (50) que no es muy significativo.

DIAGRAMA 4-1

Edades de los empleados

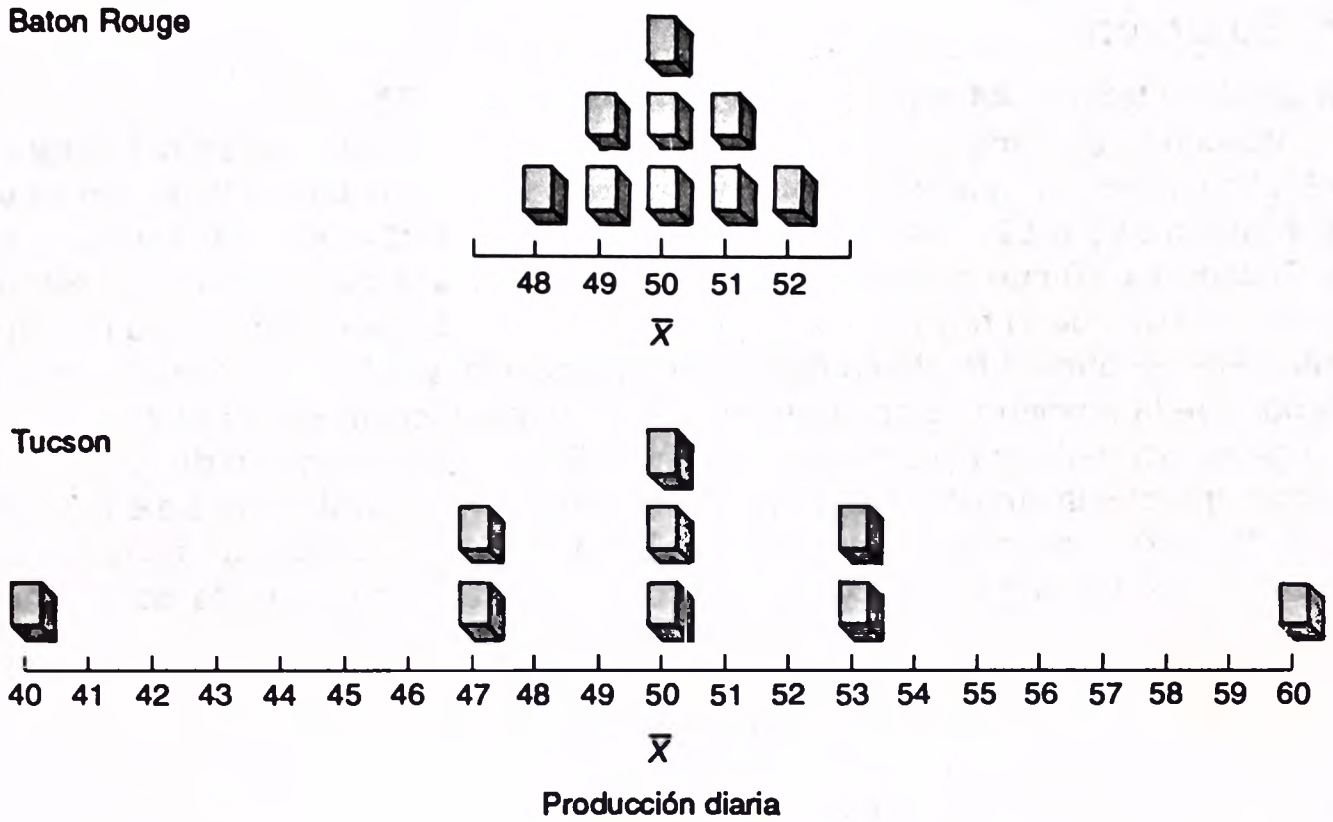


2. Una medida de dispersión permite apreciar cuán dispersas están dos o más distribuciones. Por ejemplo, suponga que la nueva computadora PDM/3 se ensambla en Baton Rouge y también en Tucson. La media aritmética de la producción diaria en la planta de Baton Rouge es 50, y en la planta de Tucson la producción media también es 50. Con base en las dos medias se podrá llegar a la conclusión

* **(N. del R.)** Se aclara y complementa la terminología estadística para mejor comprensión de estos conceptos. Se aplican los términos más recomendables.

DIAGRAMA 4-2

Producción diaria de computadoras en las plantas de Baton Rouge y Tucson



de que las distribuciones de las producciones diarias son idénticas. Una medida de dispersión puede utilizarse para evaluar la confiabilidad de dos o más promedios. Los registros de producción para nueve días en las dos plantas revelaron que esta conclusión no es correcta (véase el diagrama 4-2). La producción en Baton Rouge varía de 48 a 52 ensambles por día. La producción en la planta de Tucson es más errática, variando de 40 a 60 ensambles por día.

MEDIDAS DE DISPERSION: DATOS NO AGRUPADOS

Amplitud total

La medida de dispersión más sencilla es la **amplitud total.*** Se trata de la diferencia entre los valores mayor y menor de un conjunto de datos. Expresada como ecuación:

$$\boxed{\text{Amplitud total} = \text{Valor mayor} - \text{Valor menor}}$$

* **(N. del R.)** También se le conoce como rango, este término es una traducción incorrecta del inglés range. En español, rango corresponde a rank, categoría o grado en inglés.

✱ Ejemplo

Las capacidades de varios recipientes metálicos son: 38, 20, 37, 64 y 27 litros, respectivamente. ¿Cuál es la amplitud total de esos valores?

✔ Solución

La amplitud total es 44 litros, que se obtiene por 64 − 20.

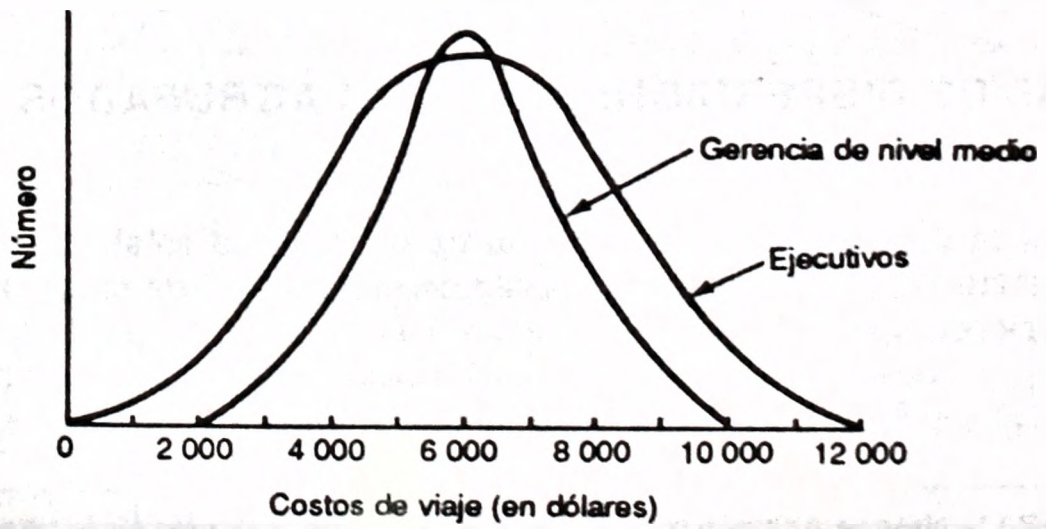
Volviendo al ejemplo de la producción diaria de computadoras del diagrama 4-2, obsérvese que la amplitud total de la producción en la planta de Baton Rouge es 4, obtenida por 52 − 48. La amplitud total de la producción diaria en la planta de Tucson es 20 computadoras (60 − 40 = 20). Por tanto, puede llegarse a la conclusión de que 1) hay menos dispersión en la producción diaria en la planta de Baton Rouge que en la planta de Tucson, porque la amplitud 4 computadoras es menor que la amplitud 20 computadoras, y 2) la producción en la planta de Baton Rouge se acumula más cerca a la media de 50 que la producción de la planta de Tucson (porque la amplitud total 4 es menor que la amplitud total 20). De esta forma, la producción media en la planta de Baton Rouge (50 computadoras) es un promedio más representativo que la media de 50 computadoras para la planta de Tucson.

AUTOEXAMEN 4-1

Las respuestas se dan al final del capítulo

Los costos anuales de viaje para ejecutivos y gerentes medios en una empresa (Trion Chemicals) se organizaron en distribuciones de frecuencias y se representaron por medio de polígonos de frecuencias.

1. ¿Cuál es la media aritmética de los costos de viaje? ¿Para los gerentes de nivel medio?
2. ¿Cuál es la amplitud total para los ejecutivos? ¿Y para los gerentes de nivel medio?
3. Compare la dispersión de las dos distribuciones y explique lo que indica.



Desviación media

Un defecto importante de la amplitud total es que se basa sólo en dos valores, el mayor y el menor; no toma en consideración todos los datos. La **desviación media** sí lo hace. Denominada también como *desviación promedio,* mide el promedio en donde los valores de una población, o muestra, varían con respecto a su media. En términos de una definición:

Desviación media Media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones con respecto a la media aritmética.

Por medio de una fórmula, la desviación media, denotada por D.M., se calcula para una muestra como:

$$\text{D.M.} = \frac{\Sigma|X - \bar{X}|}{n}$$

en donde:

- X es el valor de cada observación.
- $\bar{X}$ es la media aritmética de los valores.
- n es el número de observaciones en la muestra.
- $|\ |$ este símbolo indica valor absoluto. En otras palabras no se toman en cuenta los signos de las desviaciones respecto a la media.

¿Por qué no se consideran tales signos de las desviaciones? Si no se hiciera esto, las desviaciones positivas y negativas se compensan exactamente, y la desviación media siempre es cero. Tal medida (cero) es una estadística inútil. Debido a que se toman desviaciones absolutas, la desviación media suele denominarse *desviación absoluta media* (D.A.M.)

✱ Ejemplo

Los pesos de una muestra de cajas listas para embarcarse a Francia son (en kilogramos): 103, 97, 101, 106 y 103.

1. ¿Cuál es la desviación media?
2. ¿Cómo se interpreta?

✔ Solución

La media aritmética de los pesos es 102 kg, que se obtiene evaluando (103 + 97 + 101 + 106 + 103)/5.

1. Para obtener la desviación media:
   a. Se resta la media de cada valor.
   b. Se suman las desviaciones absolutas.
   c. Se divide la suma de las desviaciones absolutas entre el número de valores.

Pesos (en kg) X	$X - \overline{X}$	*Desviaciones absolutas*	$D.M.A. = \frac{\Sigma\lvert X - \overline{X}\rvert}{n}$
103	$\lvert+1\rvert =$	1	
97	$\lvert-5\rvert =$	5	$= \frac{12}{5}$
101	$\lvert-1\rvert =$	1	
106	$\lvert+4\rvert =$	4	
103	$\lvert+1\rvert =$	1	$= 2.4$ kg
		12	

La desviación media de la muestra es 2.4 kg.

2. Interpretación: En promedio, los pesos de las cajas se desvían 2.4 kg respecto de la media aritmética de 102 kg.

AUTOEXAMEN 4-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los pesos de un grupo de cajas que se van a enviar a Irlanda son (en kilogramos): 95, 103, 105, 110, 104, 105, 112 y 90.

1. Calcule la desviación media.
2. Interprete lo obtenido.
3. Compare la dispersión de los pesos de los envíos que van a Francia con la dispersión en los pesos de las remesas a Irlanda.

La desviación media tiene dos ventajas. Utiliza en su cálculo el valor de cada uno de los elementos de un conjunto de datos, y es fácil de comprender: promedio en que los valores se desvían respecto de la media.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Centerior Energy, en su informe anual de 1987, dio las siguientes tasas de interés reales y promedio para sus primeros bonos hipotecarios:

Año de vencimiento	*Tasa real o promedio de interés*	*Año de vencimiento*	*Tasa real o promedio de interés*
1988	4.00 %	1992	15.25 %
1989	3.00	1992	16.125
1989	15.25	1993–1997	8.76
1989	14.375	1998–2002	8.15
1990	7.125	2003–2007	9.79
1990	14.00	2008–2012	9.29
1991	8.375	2013–2017	10.30
1991	14.00	2018–2022	9.02
1991	15.625		
1991	15.00		

¿Cuál es la amplitud de las tasas de interés?

2. Consulte el ejercicio 1. Centerior Energy también informó estos precios, por trimestre, para las acciones comunes bajas en la Bolsa de Valores de Nueva York:

Trimestre	*Precio bajo*	*Trimestre*	*Precio bajo*
1986		1987	
Primero*		Primero	$21\frac{5}{8}$
Segundo	$22\frac{1}{8}$	Segundo	15
Tercero	$22\frac{3}{8}$	Tercero	15
Cuarto	$22\frac{5}{8}$	Cuarto	$15\frac{3}{8}$

* Acciones comunes de Centerior Energy negociadas por primera vez el 30 de abril de 1986.

¿Cuál es la amplitud trimestral de los precios de las acciones?

3. Diez expertos clasificaron una galleta con trozos de chocolate de nuevo desarrollo en una escala de 1 a 50. Sus calificaciones fueron: 34, 35, 41, 28, 26, 29, 32, 36, 38 y 40.
   a. ¿Cuál es la amplitud de las calificaciones?
   b. ¿Cuál es su media aritmética?
   c. ¿Cuál es su desviación media? Interprete su resultado.
   d. Un segundo grupo de expertos calificó el mismo producto. La amplitud total fue 8, la media 33.9 y la desviación media 1.9. Compare la dispersión en estas calificaciones con la del primer grupo de expertos.

4. Una muestra de los archivos personales de ocho empleados de Acme Carpet indicó que, durante un periodo de seis meses, no asistieron el siguiente número de días por enfermedad: 2, 0, 6, 3, 10, 4, 1 y 2.
   a. ¿Cuál es la amplitud de las inasistencias?
   b. ¿Cuál es la media aritmética?
   c. ¿Cuál es la desviación media? Interprete su resultado.
   d. Una muestra de los archivos personales de empleadas reveló que faltaron en promedio 3.48 días durante el mismo periodo de seis meses, debido a enfermedad. Se calculó la amplitud como 10 y la desviación media como 2.381. Compare los dos grupos.

Variancia y desviación estándar

La **variancia** (llamada también varianza) y la **desviación estándar** se basan en las desviaciones con respecto a la media.

Variancia	Media aritmética de las desviaciones cuadráticas con respecto a la media.

Desviación estándar	Raíz cuadrada de la variancia.

Obsérvese en la definición de variancia que las desviaciones con respecto a la media se elevan al cuadrado. Los signos de las desviaciones (+ o −) no se ignoran como se hizo para la desviación media. Elevar al cuadrado las desviaciones con respecto a la media elimina la posibilidad de que haya números negativos, pues al multiplicar por sí mismo un número negativo se obtiene un número positivo.

Variancia poblacional

Las fórmulas para la *variancia poblacional* y para la *variancia muestral* son un poco diferentes. Se considerará primero la variancia poblacional. (Recuérdese que una población es la totalidad de las observaciones que se estudian.) La *variancia* de la *población* se obtiene por medio de:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma(X - \mu)^2}{N}}$$

en donde:

- σ^2 es el símbolo para la variancia de una población (σ es la letra griega sigma minúscula).
- X es el valor de la observación en la población.
- μ es la media de la población.
- N es el número total de observaciones en la población.

✱ Ejemplo

Las edades de los pacientes en el pabellón de aislados en el hospital de Yellowstone son 38, 26, 13, 41 y 22 años. ¿Cuál es la variancia de esa población?

✔ Solución

Edades (X)	$X - \mu$	$(X - \mu)^2$
38	+10	100
26	− 2	4
13	−15	225
41	+13	169
22	− 6	36
140	0*	534

$$\mu = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{140}{5} = 28$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X - \mu)^2}{N} = \frac{534}{5} = 106.8$$

* La suma de las desviaciones con respecto a la media debe ser igual a cero.

El enfoque anterior para determinar la variancia poblacional se empleó principalmente para mostrar que la variancia se basa en las *desviaciones cuadráticas con respecto a la media de una población*. La media es un número entero y los cálculos para esta pequeña población de edades fueron relativamente fáciles. Sin embargo, por lo general la población es grande y la media no es su número entero. Para estos problemas puede utilizarse una fórmula más eficiente. Obsérvese que la fórmula que sigue no se basa en las desviaciones respecto a la media, sino más bien en los valores reales, eliminando así un gran número de restas.

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

Aplicando la fórmula al problema anterior:

$$\sigma^2 = \frac{(38)^2 + (26)^2 + (13)^2 + (41)^2 + (22)^2}{5} - \left(\frac{38 + 26 + 13 + 41 + 22}{5}\right)^2$$

$$= \frac{4{,}454}{5} - \left(\frac{140}{5}\right)^2$$

$= 106.8$ (que es la misma respuesta que antes)

Igual que la amplitud total y la desviación media, la variancia se utiliza para comparar la dispersión en dos o más conjuntos de observaciones. Por ejemplo, la variancia de las edades de los pacientes aislados se calculó como 106.8. Si la variancia de las edades de todos los pacientes cancerosos del hospital es 342.9, puede decirse que: 1) Hay menos dispersión en la distribución de las edades de los pacientes en aislamiento que en la distribución de edades de todos los pacientes cancerosos (porque 106.8 es menor que 342.9). 2) Las edades de los pacientes aislados se acumulan más cerca a la media de 28 años que las edades de los

pacientes cancerosos. De esta forma, la edad media para los pacientes en aislamiento es un promedio más representativo en comparación con la media para todos los pacientes cancerosos.

Desviación estándar poblacional

Es fácil interpretar tanto la amplitud total como la desviación media. La amplitud, ya se dijo, es la diferencia entre los valores mayor y menor de un conjunto de datos, y la desviación media es la media de las desviaciones (respecto a la media). Sin embargo, resulta difícil interpretar la variancia para un solo conjunto de observaciones. La variancia de 106.8 para las edades de los pacientes en aislamiento no está en términos de años, sino más bien de "años al cuadrado".

Existe una solución a este dilema. Al obtener la raíz cuadrada de la variancia poblacional, podemos transformarla a la misma unidad de medición utilizada para los datos originales. La raíz cuadrada de 106.8 años al cuadrado es 10.3 años. La raíz cuadrada de la variancia poblacional se denomina *desviación estándar poblacional.* Con una fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \mu)^2}{N}} \quad \text{o bien} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$$

AUTOEXAMEN 4-3

Las respuestas se dan al final del capítulo

Una población está formada por los pesos de todos los tacles defensivos del equipo de futbol americano de St. Norbet. Son: Johnson, 204 libras (lb); Patrick, 215 lb; Juniors, 207 lb; Kendron, 212 lb; Nicko, 214 lb; y Cochran 208 lb.

1. ¿Cuál es la variancia poblacional?
2. ¿Cuál es la desviación estándar poblacional?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. De acuerdo con el informe anual de IBM, los rendimientos primarios por acción común durante los últimos cinco años son $2.68, $1.03, $2.26, $4.30 y $3.58 (dólares). Considerando esto como una población:
   a. ¿Cuál es la amplitud total de este conjunto de datos no agrupados?
   b. ¿Cuál es la media de la población?
   c. Calcule la variancia.
   d. ¿Cuál es la desviación estándar?
6. Véase el ejercicio 5. La IBM también indicó los siguientes rendimientos en las participaciones de los accionistas durante el mismo periodo (en porcentajes): 13.2, 5.0, 10.2, 17.5 y 12.9.

a. ¿Cuál es la amplitud total?
b. Si se considera esto como una población, ¿cuál es el rendimiento medio de las participaciones de los accionistas?
c. ¿Cuál es la variancia?
d. ¿Cuál es la desviación estándar?

7. La Boise Cascade Corporation informó los siguientes rendimientos en las participaciones de los accionistas para los últimos cinco años: 4.3, 4.9, 7.2, 6.7 y 11.6.
   a. Determine la amplitud total, la media, la variancia y la desviación estándar para los datos de Boise Cascade.
   b. Compare el desempeño de esta negociación con el de IBM dado en el ejercicio 6, en lo que se refiere a promedio y dispersión.
8. Los ingresos anuales (en dólares) de los cinco vicepresidentes de Erlen Industries son: $75 000, $78 000, $72 000, $83 000 y $90 000. (Considere esto como una población.)
   a. ¿Cuál es la amplitud total?
   b. ¿Cuál es la media aritmética?
   c. ¿Cuál es la variancia poblacional? ¿y la desviación estándar?
   d. Los ingresos anuales de otra empresa semejante a Erlen Industries también se estudiaron. μ = $79 900; σ = $8 612. Compare las medias y las dispersiones en las dos empresas.

Variancia muestral

La fórmula para la media poblacional dada en el capítulo 3 es $\mu = \Sigma X/N$. Acabamos de cambiar los símbolos para la media muestral, que es, $\overline{X} = \Sigma X/n$. Desafortunadamente, la conversión de la variancia poblacional a la variancia muestral no es tan directa. Se debe hacer una ligera modificación en el denominador. En vez de sustituir n (número en la muestra) por N (número en la población), el denominador es $n - 1$. Por lo tanto, la fórmula para la *variancia muestral* utilizada como estimador de la variancia poblacional es:

$$s^2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}$$

en donde:

s^2 es el símbolo empleado para representar la variancia muestral.
X es el valor de las observaciones en la muestra.
$\overline{X}$ es la media de la muestra.
n es el número total de observaciones en la muestra.

Al convertir la fórmula más directa para la variancia poblacional σ^2 a la variancia muestral s^2, tenemos:

$$s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \dfrac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}$$

Por qué se hizo al denominador esta modificación en apariencia insignificante? Puede demostrarse que si se hubiera calculado la variancia muestral utilizando sólo n en el denominador, el resultado *subestimaría* la variancia poblacional[1]. Esto es, la variancia muestral será un estimador *sesgado* de la variancia poblacional. Esto resulta especialmente cierto cuando el tamaño de la muestra es pequeño. Al utilizar $n - 1$ se compensa tal subestimación. De esta forma, la variancia muestral s^2 se considera como un estimador *insesgado* de la variancia poblacional[2].

✱ Ejemplo

Los sueldos por hora (en dólares) en una muestra de trabajadores de medio tiempo en Fruit Packers, Inc., son: \$2, \$10, \$6, \$8 y \$9. ¿Cuál es la variancia muestral?

✔ Solución

Empleando las desviaciones al cuadrado con respecto a la media:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{\$35}{5} = \$7$$

Sueldo por hora (X)	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$
\$ 2	−\$5	25
10	3	9
6	− 1	1
8	1	1
9	2	4
\$35	0	40

$$s^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{40}{5 - 1} = 10$$

Usando la fórmula más directa:

Sueldo por hora (X)	X^2
\$ 2	4
10	100
6	36
8	64
9	81
\$35	285

$$s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1} = \frac{285 - \frac{(35)^2}{5}}{5 - 1} = \frac{40}{5 - 1} = 10$$

[1] Para indicarlo de otra forma, la fórmula para la variancia muestral debe ser

$$\frac{\Sigma(X - \mu)^2}{n}$$

Sin embargo, se usa $\bar{X}$ para estimar μ. De modo que la suma en el numerador es muy pequeña. Al dividir entre $n - 1$, en vez de n, se compensa la subestimación en el numerador.

[2] Si la muestra de la variancia de una muestra se ha calculado utilizando n en el denominador, se puede convertir a un estimador no sesgado s^2 utilizando:

$$s^2 = \frac{n}{n - 1}(\hat{s}^2)$$

en donde $\hat{s}^2$ es la variancia calculada usando sólo n.

AUTOEXAMEN 4-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los pesos del contenido de varios pequeños frascos de aspirina son (en gramos): 4, 2, 5, 4, 5, 2 y 6. ¿Cuál es la variancia muestral?

Desviación estándar muestral

La desviación estándar de una muestra se utiliza como un estimador de la desviación estándar de la población. Según se observó antes, la desviación estándar poblacional es la raíz cuadrada de la variancia poblacional. De manera semejante, la *desviación estándar muestral es la raíz cuadrada de la variancia muestral.* La desviación estándar muestral (s) se obtiene utilizando las desviaciones cuadráticas respecto a la media, con la fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}}$$

o, utilizando una fórmula más directa

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}}$$

✱ Ejemplo

La variancia muestral del ejemplo anterior para los sueldos por hora se calculó como 10. ¿Cuál es la desviación estándar de la muestra?

✔ Solución

La desviación estándar muestral es \$3.16, que se obtiene por $\sqrt{10}$. Obsérvese de nuevo que la variancia muestral está en términos de dólares al cuadrado, pero al obtener la raíz cuadrada de 10 se tiene \$3.16, que está en las mismas unidades (dólares) que los datos originales.

AUTOEXAMEN 4-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase el autoexamen 4–4.

1. ¿Cuál es la desviación estándar muestral?
2. La desviación estándar está en las mismas unidades de medición que en el problema original?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Las producciones por hora de un grupo de empleados que ensamblan aparatos eléctricos se seleccionaron al azar. Las producciones de la muestra fueron: 8, 9, 8, 10, 9, 10, 12 y 10. ¿Cuál es la desviación estándar de la muestra?

10. Las edades de una muestra de turistas canadienses que vuelan a Hong Kong fueron: 32, 21, 60, 47, 54, 17, 72, 55, 33 y 41. ¿Cuál es la desviación estándar de la muestra?

11. La Rainbow Trout, Inc. alimenta truchas pequeñas en estanques especiales y las vende cuando llegan a cierto peso. Se aisló una muestra de 10 truchas en un estanque y se les alimentó con una mezcla especial denominada Grow Em Fast. Al final del experimento los pesos de las truchas fueron (en gramos): 124, 125, 125, 123, 120, 124, 127, 125, 126 y 121.
    a. ¿Cuál es la amplitud total de la muestra?
    b. ¿Cuál es su media aritmética?
    c. Calcule la variancia muestral.
    d. Calcule la desviación estándar de la muestra.

12. Véase el ejercicio 11. Se utilizó otra mezcla especial, Fatso, en otro estanque. Se calculó la media de una muestra como 126.9 gramos y la desviación estándar como 1.2 gramos. ¿Qué alimento da como resultado un peso más uniforme?

MEDIDAS DE DISPERSION PARA DATOS AGRUPADOS EN UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

Amplitud total

Recuérdese que la amplitud total se define como la diferencia entre el mayor y el menor valor. Para estimar la amplitud total a partir de datos ya agrupados en una distribución de frecuencias, se resta el menor límite declarado de la clase menor del mayor límite declarado de la clase mayor. Por ejemplo, supóngase que se agrupó una muestra de 40 sueldos por hora en esta distribución de frecuencias.

AUTOEXAMEN 4-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los consumidores informaron sobre el número de millas que una cierta llanta resistió antes de quedar lisas. Las millas recorridas se agruparon en la distribución que sigue.

¿Cuál es la amplitud total?

Millas	*Número de llantas*
25 000–29 000	16
30 000–34 000	45
35 000–39 000	78
40 000–44 000	56
45 000–49 000	21
50 000–54 000	9

Sueldo por hora	*Número*
\$ 6–\$ 9	10
10– 13	21
14– 17	9

La amplitud total es \$11, que se obtiene por \$17 – \$6.

A veces se prefiere utilizar los límites de clase verdaderos. En este caso la amplitud total habría sido \$12, obtenida de \$17.50 – \$5.50.

Desviación estándar

Recuérdese que para datos *no agrupados,* una fórmula para la desviación estándar muestral es:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}}$$

Si los datos que interesan están en forma *agrupada* (en una distribución de frecuencias), la desviación estándar muestral puede aproximarse al sustituir ΣfX^2 por ΣX^2 y ΣfX por ΣX. La fórmula para la *desviación estándar muestral* se convierte entonces en:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{n}}{n - 1}}}$$

en donde:

X es el punto medio de una clase.
f es la frecuencia de clase
n es el número total de observaciones en la muestra.

✱ Ejemplo

Una muestra de las cantidades quincenales invertidas en el plan de participación de utilidades en Dupree Paint Company por parte de los empleados, se organizó en una distribución de frecuencias para su estudio. (Véase la tabla 4-1.) ¿Cuál es la desviación estándar de estos datos agrupados? ¿Cuál es su variancia muestral?

✔ Solución

Siguiendo la misma práctica utilizada en el capítulo 3 para calcular la media aritmética de datos agrupados, X representa el punto medio de cada clase. Por ejemplo, el punto medio de la clase \$30–\$34 es \$32 (véase la tabla 4-2). Se considera que las cantidades invertidas en la clase \$30–\$34 se distribuyen de

TABLA 4-1

Muestra de inversiones quincenales realizadas por empleados en el plan de participación de utilidades

Cantidad invertida	Número de empleados
$30–$34	3
35– 39	7
40– 44	11
45– 49	22
50– 54	40
55– 59	24
60– 64	9
65– 69	4

TABLA 4-2

Cálculos necesarios para obtener la desviación estándar muestral

Cantidad invertida	*Número (f)*	*Punto medio (X)*	*fX*	*fX · X, o bien fX²*	
$30–$34	3	$32	$ 96	3 072	← $32 × $96
35– 39	7	37	259	9 583	
40– 44	11	42	462	19 404	
45– 49	22	47	1 034	48 598	← $47 × $1 034
50– 54	40	52	2 080	108 160	
55– 59	24	57	1 368	77 976	
60– 64	9	62	558	34 596	
65– 69	4	67	268	17 956	
	120		$6 125	319 345	

manera uniforme por toda esa clase. Por tanto, las tres cantidades dan un promedio de $32. Las siete cantidades en la clase $35–$39 dan un promedio de 37, y así sucesivamente. Para obtener la desviación estándar:

Paso 1: Cada frecuencia de clase se multiplica por su punto medio. Como un ejemplo, para la primera clase se multiplica f por X, lo que se escribe fX. De esta forma se tiene 3 × $32 = $96. Para la segunda clase, fX = 7 × $37 = $259, y así sucesivamente.

Paso 2: Se calcula fX^2, esto podrá escribirse como $fX \cdot X$. Para la primera clase será $96 × $32 = 3 072; para la segunda clase, $259 × $37 = 9 583; y así sucesivamente.

Paso 3: Se suman las columnas fX y fX^2. Ello da como resultado $6 125 y 319 345, respectivamente.

Sustituyendo estas sumas en la fórmula y despejando la desviación estándar muestral:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{n}}{n - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{319\,345 - \frac{(\$6\,125)^2}{120}}{120 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{319\,345 - 312\,630.2}{119}}$$

$$= \$7.51$$

La desviación estándar muestral es \$7.51. La variancia muestral es $(\$7.51)^2$ o, aproximadamente, 56.4.

AUTOEXAMEN 4-7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los tiempos de servicio en una muestra de taladros disponibles para su renta en una empresa de herramientas se organizaron en la tabla que sigue:

Antigüedad (en años)	Número
2– 4	2
5– 7	5
8– 10	10
11–13	4
14–16	2

1. ¿Cómo se denomina este agrupamiento?
2. Estime la desviación estándar muestral.
3. Estime el tiempo medio de los taladros (redondeando a décimos de año).
4. ¿Cuál es la variancia muestral?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. A cada persona que se presenta como candidato para un trabajo de ensamble en Philagree Furniture Mfg. Se le aplica una prueba de aptitudes mecánicas. Una parte de la prueba consiste en ensamblar un armario con base en instrucciones numeradas. En la siguiente distribución de frecuencias se tiene una muestra de los tiempos que necesitaron 42 personas para ensamblar el armario.

Tiempo (en minutos)	Número
1– 3	4
4– 6	8
7– 9	14
10–12	9
13–15	5
16–18	2

a. ¿Cuál es la amplitud total?
b. ¿Cuál es la desviación estándar?
c. ¿Cuál es la variancia?

14. Una muestra de las cantidades pagadas por estacionarse en sábado en el Downtown Parking Garage, en Halifax, se presenta en la siguiente distribución de frecuencias.

Cantidad pagada	Número
$0.50–$0.74	2
0.75– 0.99	7
1.00– 1.24	15
1.25– 1.49	28
1.50– 1.74	14
1.75– 1.99	9
2.00– 2.24	3
2.25– 2.49	2

a. Calcule la amplitud total de la muestra.
b. Calcule la desviación estándar.
c. ¿Cuál es la variancia?

INTERPRETACION Y USOS DE LA DESVIACION ESTANDAR

Por lo común la desviación estándar se emplea como una medida para comparar la dispersión en dos o más conjuntos de observaciones. Por ejemplo, la desviación estándar de las cantidades quincenales invertidas en el plan de participación de utilidades de la Dupree Paint Company se ha calculado como $7.51 (dólares). Supóngase que tal empresa tiene una rama en el sur. Si la desviación estándar para otro grupo de empleados en el oeste es $10.47 y las medias son aproximadamente iguales, esto indica que las cantidades invertidas por los empleados del sur no se dispersan tanto como las de los empleados del oeste (porque $7.51 < $10.47). Ya que las cantidades invertidas por los empleados del sur se acumulan a la media, el valor medio para estos trabajadores es una medida más confiable que la media para el grupo del oeste.

Teorema de Chebyshev

Hemos subrayado que una desviación estándar pequeña para un conjunto de valores indica que éstos se encuentran localizados cerca de la media. Por el contrario, una desviación estándar grande revela que las observaciones están muy

dispersas con respecto a la media. El matemático ruso P.L. Chebyshev (o Tchebycheff) (1821–1894) desarrolló un teorema que permite determinar la proporción mínima de los valores que se encuentra dentro de un número específico de desviaciones estándares con respecto a la media. Por ejemplo, con base en el *teorema de Chebyshev,* al menos tres de cada cuatro valores, o 75%, deben encontrarse entre la media más dos desviaciones estándares y la media menos dos desviaciones estándares. Esta relación se aplica sin importar la forma de la distribución. Además, al menos ocho de cada nueve valores, o 89.9%, se encontrarán entre la media más tres desviaciones (estándares) y la media menos tres desviaciones. Al menos 24 de 25 valores, o 96% se encontrarán entre la media más y menos cinco desviaciones.

En términos generales, el teorema de Chebyshev enuncia:

Teorema de Chebyshev Para un conjunto cualquiera de observaciones (muestra o población), la proporción mínima de los valores que se encuentran dentro de k desviaciones estándares desde la media es al menos $1 - 1/k^2$, en donde k es una constante menor que 1.

✱ Ejemplo

En el ejemplo y solución anteriores, la cantidad media quincenal depositada por los empleados de la Dupree Paint en el plan de participación de utilidades de la empresa fue \$51.04 y se obtuvo una desviación estándar de \$7.51. Al menos, ¿qué porcentaje de las contribuciones se encuentran a una distancia de más dos desviaciones estándares y menos dos desviaciones estándares de la media?

✔ Solución

Aproximadamente 75%, que se obtiene al calcular

$$1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

AUTOEXAMEN 4-8

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para el ejemplo anterior sobre las contribuciones al plan de participación de utilidades de la empresa, se llegó a estas cifras: $\overline{X}$ = \$51.04, s = \$7.51.

1. Al menos, ¿qué porcentaje de las contribuciones al plan se encuentran a una distancia de tres desviaciones estándares de la media?
2. Al menos ¿qué porcentaje de las contribuciones se encuentra entre \$34.14 y \$67.94?

Regla empírica

El teorema de Chebyshev se refiere a *cualquier conjunto de valores;* esto es, la distribución de los valores puede tomar cualquier forma. Sin embargo, para una curva de distribución simétrica en forma de campana, como la del diagrama 4-3,

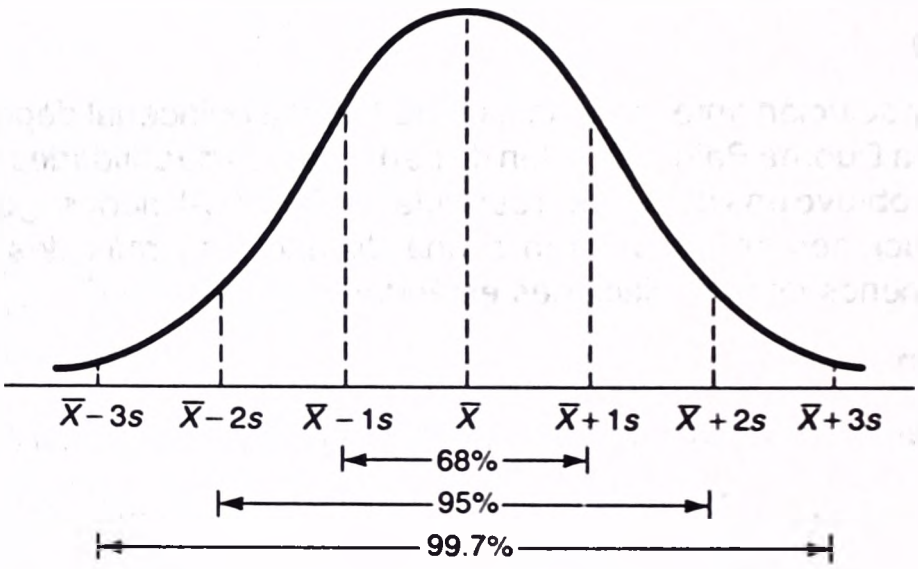
podemos ser más precisos al explicar la dispersión con respecto a la media. Estas relaciones referentes a la desviación estándar y la media se incluyen en la *regla empírica*, que algunas veces se denomina *regla normal*.

Regla Empírica Para la distribución de frecuencias simétrica de campana, aproximadamente 68% de las observaciones se encontrará a más y menos una desviación estándar de la media; aproximadamente 95% de las observaciones se encontrarán a más y menos dos desviaciones (estándares) desde la media; y prácticamente todas las observaciones (99.7%) se encontrarán a más y menos tres desviaciones desde la media.

Estas relaciones se presentan en forma gráfica en el diagrama 4-3.

DIAGRAMA 4-3

Curva simétrica de campana, que muestra las relaciones entre desviación estándar y media



Se ha observado que si una distribución es simétrica de campana, prácticamente todas las observaciones se encuentran entre la media más y menos tres desviaciones estándares. De esta forma, si $\bar{X} = 100$ y $s = 10$, prácticamente todas las observaciones se encuentran entre $100 + 3(10)$ y $100 - 3(10)$, o sea 70 y 130. Por tanto, la amplitud total es 60, que se obtiene por $130 - 70$.

Por el contrario, si se sabe que la amplitud total es 60, podemos aproximar la desviación estándar dividiendo la amplitud total entre 6. Para este ejemplo: (amplitud) $\div 6 = 60 \div 6 = 10$, la desviación estándar.

* Ejemplo

Una muestra de las cantidades mensuales (en dólares) destinadas a alimentos por familias de cuatro personas que reciben vales alimentarios, sigue aproximadamente una distribución de frecuencias simétrica de campana.

La media muestral es $150; la desviación estándar es $20. Utilizando la regla empírica:

1. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos cantidades está el 68% de los gastos mensuales en alimentos?
2. Aproximadamente, ¿entre cuales dos cantidades está el 95% de los gastos mensuales en alimentos
3. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos cantidades están todos los gastos mensuales?

✔ Solución

1. Aproximadamente 68% están entre $130 y $170, que se obtiene $\overline{X} \pm 1s$ = $150 ± 1($20).
2. Aproximadamente 95% están entre $110 y $190, que se obtiene al calcular $\overline{X} \pm 2s$ = $150 ± 2($20).
3. Aproximadamente todos los casos (99.7%) están entre $90 y $210, que se obtiene mediante $\overline{X} \pm 3s$ = $150 ± 3($20).

AUTOEXAMEN 4-9

Las respuestas se dan al final del capítulo

La distribución de una muestra de los diámetros exteriores de tubos para gas (de PVC) sigue aproximadamente una distribución simétrica de campana. La media aritmética de los de la muestra es 14.0 pulg, y la desviación estándar es 0.1 pulg.

1. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos cantidades está el 68% de los diámetros exteriores?
2. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos cantidades está el 95%?
3. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos cantidades están casi todos (99.7%) los casos?
4. Represente en forma gráfica los porcentajes y cantidades anteriores.

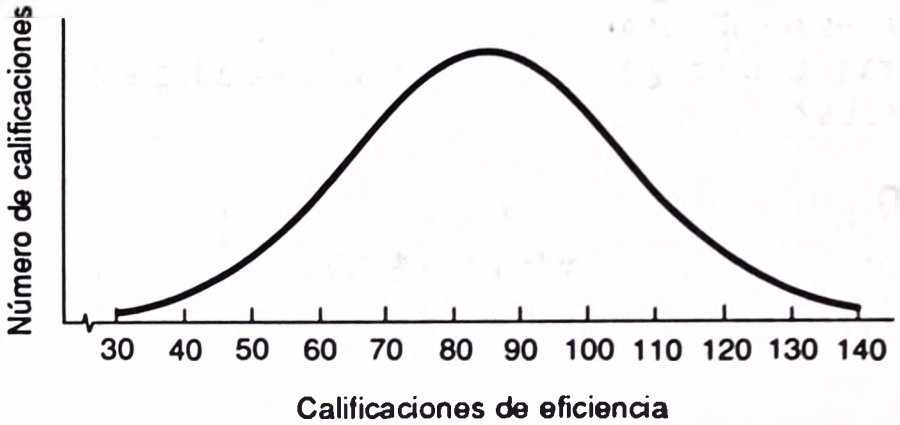
EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

15. En lo que se refiere al teorema de Chebyshev, ¿al menos qué porcentaje de cualquier conjunto de observaciones se encontrará a 1.8 desviaciones estándares de la media?
16. El ingreso medio para un grupo de observaciones muestrales es $500; la desviación estándar es $40. De acuerdo con el teorema de Chebyshev, ¿al menos qué porcentaje de los ingresos se encontrará entre $400 y $600?
17. La distribución de los pesos de una muestra de 1 400 contenedores para carga marítima sigue aproximadamente una distribución normal. Con base en la regla empírica, ¿qué porcentaje de los pesos se encontrarán:

a. ¿Entre $\overline{X} - 2s$ y $\overline{X} + 2s$?
b. ¿Entre $\overline{X}$ y $\overline{X} + 2s$? Por abajo de $\overline{X} - 2s$?

18. La figura adjunta indica el perfil simétrico de una distribución muestral de calificaciones de eficiencia.



a. Estime la media de las calificaciones.
b. Estime la desviación estándar redondeando a enteros. (Sugerencia: ya que la media más y menos tres desviaciones estándares abarca prácticamente todos los valores, la amplitud total dividida entre 6 debe dar una buena aproximación de la desviación estándar.
c. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos valores queda el 68% de las calificaciones de eficiencia?
d. Aproximadamente, ¿entre cuáles dos valores queda el 95% de las calificaciones de eficiencia?

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION

En breve se considerarán otras tres medidas de dispersión, que son: *amplitud cuartílica, desviación cuartílica* y *amplitud de centílica.*

Amplitud cuartílica

La **amplitud cuartílica** es la distancia entre el tercero y primer cuartiles.

$$\text{Amplitud cuartílica} = \text{Tercer cuartil} - \text{Primer cuartil} = Q_3 - Q_1$$

Recuérdese que el valor mediano, Q_2, separa el 50% superior de un conjunto de observaciones, del 50% inferior. De manera semejante, el *primer cuartil,* Q_1, es el valor que corresponde al punto por debajo del cual se encuentra el 25% de las observaciones. El *tercer cuartil,* Q_3, es el valor que corresponde al punto por encima del cual se encuentra el 25% de las observaciones. Por tanto, el 50% central de las observaciones se localiza entre Q_3 y Q_1.

Las fórmulas para Q_1 y Q_3 son:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - FA}{f}(i)$$

en donde:

- L es el límite inferior verdadero de la clase que contiene al primer cuartil.
- n es el número total de frecuencias (no de clases).
- FA es el número acumulativo de frecuencias en todas las clases que preceden a la clase que contiene al primer cuartil
- f es la frecuencia de la clase que contiene al primer cuartil.
- i es el tamaño de la clase en que se encuentra el primer cuartil.

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - FA}{f}(i)$$

en donde:

- L es el límite inferior verdadero de la clase que contiene al tercer cuartil.
- n es el número total de frecuencias de clase (no de clases).
- FA es el número acumulativo de frecuencias en todas las clases que preceden a la clase que contiene al tercer cuartil
- f es la frecuencia de la clase que contiene al tercer cuartil.
- i es el tamaño de la clase en que se encuentra el tercer cuartil.

✱ Ejemplo

¿Cuál es el primer cuartil para la distribución de las aportaciones quincenales al plan de participación de utilidades de la Dupree Paint de la tabla 4-3?

TABLA 4-3

Cálculos necesarios para determinar los cuartiles primero y tercero

Límites declarados	*Límites verdaderos*	*Frecuencias de clase*	*Frecuencias acumuladas*
\$30-\$34	\$29.50-\$34.50	3	3
35- 39	34.50- 39.50	7	10
40- 44	39.50- 44.50	11	21
45- 49	44.50- 49.50	22	43
50- 54	49.50- 54.50	40	83
55- 59	54.50- 59.50	24	107
60- 64	59.50- 64.50	9	116
65- 69	64.50- 69.50	4	120

✔ Solución

Sin duda advertirá que el procedimiento para determinar los cuartiles primero y tercero es muy semejante al que se presentó en el capítulo 3 para la mediana (que es el segundo cuartil, Q_2). Interpolando para el primer cuartil:

Paso 1. Determínese la clase en la que se encuentra Q_1. Obsérvese que hay 120 empleados. La cuarta parte de 120 es 30. Contando hacia abajo a partir de la clase inferior, observe en la columna *FA* que hay 21 contribuciones por abajo del límite superior *verdadero* de clase de $44.50, y que hay 43 contribuciones por abajo del límite superior verdadero de $49.50. Como es lógico, la contribución número 30 se encuentra en la clase $44.50–$49.50. De manera que el límite inferior verdadero de la clase que contiene a Q_1, es $44.50.

Paso 2. Determínese el número acumulativo de frecuencias *FA* en todas las clases que preceden inmediatamente a la clase que contiene al primer cuartil. Conforme la tabla 4-3, *FA* es 21.

Paso 3. Determínese *f*, frecuencia de la clase que contiene al primer cuartil. Hay 22 frecuencias en la clase $44.50–$49.50.

Paso 4. Determínese *i*, intervalo de clase de la clase que contiene a Q_1. El intervalo de clases es $49.50 − $44.50 = $5.

Al sustituir todos estos valores en la fórmula para Q_1 queda:

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - FA}{f}(i)$$

$$= \$44.50 + \frac{\frac{120}{4} - 21}{22}(\$5)$$

$$= \$44.50 + \frac{9}{22}(\$5)$$

$$= \$46.55$$

La interpretación es que un cuarto de las aportaciones de los empleados es inferior a $46.55.

AUTOEXAMEN 4-10

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase la distribución de las aportaciones de los empleados al plan de participación de utilidades de la Dupree Paint Company de la tabla 4-3. ¿Cuál es el tercer cuartil? Interprete su respuesta.

Recuérdese que la amplitud cuartílica es la distancia entre el tercer cuartil y el primero. La amplitud entre cuartiles para la distribución de las cantidades quince-

nales con las que contribuyen los empleados al plan de participación de la empresa es 9.41, que se obtiene calculando $Q_3 - Q_1 = \$55.96 - \$46.55$. Esto indica que la mitad central de las contribuciones de los empleados está entre \$55.96 y \$46.55, siendo la distancia entre estos dos cuartiles \$9.41. La amplitud cuartílica también puede emplearse para comparar la dispersión entre dos o más distribuciones. Por ejemplo, supóngase que la amplitud entre cuartiles para otra distribución de aportaciones es \$14.96. Pueden afirmarse dos cosas: 1) Las contribuciones con amplitud cuartílica de \$9.41 están acumuladas más de cerca de la media que las contribuciones con una amplitud cuartílica de \$14.96 (porque \$9.41 < \$14.96). 2) La media de las aportaciones con la amplitud entre cuartiles de \$9.41 es un promedio más representativo que la media de la distribución de aportaciones con una amplitud cuartílica de \$14.96.

Desviación cuartílica

La **desviación cuartílica** es la mitad de la distancia entre el tercer cuartil, Q_3, y el primero, Q_1.*

$$\boxed{\text{D.Q.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

Para las contribuciones quincenales al plan de participación de utilidades en Dupree Paint:

$$\begin{aligned}\text{D.Q.} &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \\ &= \frac{\$55.96 - \$46.55}{2} \\ &= \$4.71\end{aligned}$$

Aproximación para evaluar los cuartiles

El primer y tercer cuartiles pueden obtenerse por aproximación a partir de un polígono de frecuencias acumuladas.

✱ Ejemplo

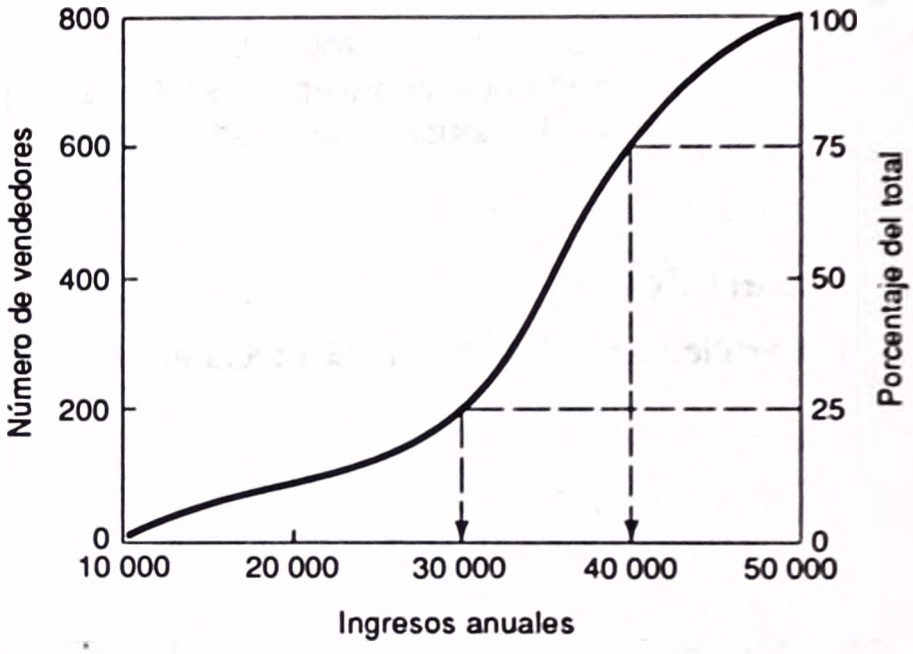
Los ingresos anuales de una muestra de un grupo de vendedores independientes se organizaron en una distribución de frecuencias. La distribución se representó en

* **(N. del R.)** Por su definición se ve que esta medida es la mitad de la amplitud entre cuartiles, por lo que se llama también *semiamplitud cuartílica*. Es la *desviación* de uno y otro cuartiles (Q_1 y Q_3) respecto de la mediana (Q_2).

un polígono de frecuencias acumuladas "menos de". ¿Cuáles son el primero y tercer cuartiles aproximados?

✔ Solución

Obsérvese que el número de vendedores se muestra a la izquierda del polígono acumulativo y que el porcentaje del total está al lado derecho.



Primer cuartil: Recuérdese que el primer cuartil es el punto abajo del cual se encuentra el 25% de las contribuciones ¿Cuál es ese punto? Se va a un cuarto de 800 o sea 200, en el lado izquierdo, o a 25% en el eje vertical a la derecha. Después se traslada en sentido horizontal a la curva y hacia abajo al eje *X*, y se lee el ingreso. Es aproximadamente $30 000.

Tercer cuartil: Tres cuartas partes de 800 es 600. Se va a 600, o a 75% sobre eje *Y*. Después se traslada en dirección horizontal a la curva y hacia abajo al eje *X*, y se lee el ingreso. Es aproximadamente $40 000.

Amplitud centílica

Según se observó, hay tres cuartiles (Q_1, Q_2, Q_3) que dividen a una distribución en cuatro partes. De manera semejante, 99 *centiles* (o porcentiles) dividen a una distribución en 100 partes iguales. La *amplitud centílica* es por lo general, la distancia entre el centil número 10 y el número 90. Los centiles se calculan e interpretan de manera semejante a los cuartiles. Las fórmulas para los centiles 10º y 90º son:

10º centil: $$L + \frac{\frac{10n}{100} - FA}{f}(i)$$

90º centil: $$L + \frac{\frac{90n}{100} - FA}{f}(i)$$

✱ Ejemplo

¿Cuál es el 10º centil para la distribución de las contribuciones al plan de participación de utilidades en la Dupree Paint Company de la tabla 4-3?

✔ Solución

$$10^{\text{º}}\text{ centil} = L + \frac{\frac{10n}{100} - FA}{f}(i)$$

$$= \$39.50 + \frac{\frac{10(120)}{100} - 10}{11}(\$5)$$

$$= \$39.50 + \frac{2}{11}(\$5)$$

$$= \$40.41$$

AUTOEXAMEN 4-11

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase la tabla 4-3. ¿Cuál es el 90º centil?

El 90º centil (del autoexamen 4-11) es $60.06. El 10º centil calculado al resolver el ejemplo anterior es $40.41. La amplitud centílica es la distancia entre los centiles 90º y el 10º; que es $19.65, se obtiene al calcular $60.06 − $40.41. Interpretando, el 80% central de las contribuciones de los empleados se encuentra entre $40.41 y $60.06 (aproximadamente); 20% se encuentra abajo de $40.41 o arriba de $60.06.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de numero impar se dan al final del libro.

19. A continuación se repite el ejemplo de las rentas de condominios del capítulo 2.

Rentas mensuales	*Número de unidades*
$ 600–$ 799	3
800– 999	7
1 000– 1 199	11
1 200– 1 399	22
1 400– 1 599	40
1 600– 1 799	24
1 800– 1 999	9
2 000– 2 199	4
Total	120

a. ¿Cuál es el primer cuartil?
b. ¿Cuál es el tercer cuartil?
c. ¿Cuál es la amplitud cuartílica? Interprete su respuesta.
d. ¿Cuál es la desviación cuartílica? Interprete su respuesta.

20. Véase el ejercicio 19. Determine la amplitud centílica. Interprétela.
21. En la distribución que sigue se contaron los ingresos mensuales de empleados de tiempo parcial.

Ingresos semanales	*Número*
$ 40-$ 49	8
50- 59	16
60- 69	24
70- 79	48
80- 89	22
90- 99	14
100- 109	11
110- 119	7

a. ¿Cuál es el primer cuartil?
b. ¿Cuál es el tercer cuartil?
c. ¿Cuál es la amplitud cuartílica? Interprétela.
d. ¿Cuál es la desviación cuartílica? Interprétela.
e. Determine la amplitud centílica (de 10 a 90). Interprete su valor.

22. El número de millas recorridas en viajes aéreos contabilizadas para una muestra de ejecutivos durante el año, se agruparon en la distribución que sigue:

Número de millas	*Frecuencia de clase*
10 000-19 000	16
20 000-29 000	31
30 000-39 000	86
40 000-49 000	103
50 000-59 000	120
60 000-69 000	99
70 000-79 000	71
80 000-89 000	30
90 000-99 000	10
100 000 y más	4

a. Estime la amplitud cuartílica. Interprétela.
b. Estime la desviación cuartílica. Interprétela.
c. ¿Cuál es la amplitud entre los centiles 20 a 80? Interprétela.

DISPERSION RELATIVA

Una comparación directa de dos o más medidas de dispersión (por ejemplo, la desviación estándar para una distribución de ingresos anuales y la desviación estándar de una distribución de inasistencias para este mismo grupo de empleados) es imposible. ¿Podemos decir que la desviación estándar de $1 200 para la distri-

bución del ingreso es mayor que la desviación estándar de 4.5 días para la distribución de faltas de asistencia? Es obvio que no, porque no podemos comparar directamente dólares y días de inasistencia al trabajo. A fin de realizar una comparación significativa de la distribución de ingresos y faltas, necesitamos convertir cada una de estas medidas a una expresión *relativa,* es decir, a un porcentaje. Karl Pearson (1857–1936), quien contribuyó de manera importante a la ciencia estadística, desarrolló una medida relativa denominada **coeficiente de variación** (C.V.). Es una medida muy útil cuando:

1. Los datos están en unidades diferentes (como dólares y días de inasistencia).
2. Los datos están en las mismas unidades, pero las medias muy distantes (como sucede con los ingresos de los ejecutivos superiores y los ingresos de los empleados no calificados).

Coeficiente de variación Razón (o cociente) de la desviación estándar a la media aritmética, expresada como un porcentaje.

En términos de una fórmula para una muestra:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{X}}(100)$$

← Al multiplicar por 100 se convierte la expresión decimal a porcentaje (%).

✱ Ejemplo

Un estudio de las calificaciones obtenidas en un curso interno sobre principios de administración y los años de servicio de los empleados inscritos en el curso, dio como resultado estas estadísticas: la calificación media fue 200; la desviación estándar 40. La media del número de años de servicio fue 20 años, la desviación estándar, de 2 años. Compárese la dispersión relativa de las dos distribuciones empleando el coeficiente de variación.

✔ Solución

Las distribuciones están en distintas unidades (calificaciones y años de servicio). A continuación se convierten a coeficiente de variación.

Para las calificaciones:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{X}}(100)$$

$$= \frac{40}{200}(100)$$

$$= 20\ \%$$

La desviación estándar es 20% de la media.

Para los años de servicio:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{X}}(100)$$

$$= \frac{2}{20}(100)$$

$$= 10\%$$

La desviación estándar es 10% de la media.

Al interpretar se puede ver que existe mayor dispersión relativa con respecto a la media en la distribución de las calificaciones que en la distribución de años de servicio (porque 20% > 10%).

El mismo procedimiento se utiliza cuando los datos están en las mismas unidades, pero las medias están muy distantes. (Véase el ejemplo que sigue.)

✱ Ejemplo

Se va a comparar la variación en los ingresos anuales de ejecutivos con la variación en los ingresos de trabajadores no calificados. Para una muestra de ejecutivos, $\bar{X}$ = \$500 000 y s = \$50 000. Para una muestra de trabajadores no calificados, $\bar{X}$ = \$12 000 y s = \$1 200. Uno se ve tentado a afirmar que hay mayor dispersión en los ingresos anuales de los ejecutivos porque \$50 000 > \$1 200. Sin embargo, las medias están tan distantes que se necesitan convertir las estadísticas a coeficientes para efectuar una comparación significativa de la variación en los ingresos anuales.

✔ Solución

Para los ejecutivos:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{X}}(100)$$

$$= \frac{\$50\,000}{\$500\,000}(100)$$

$$= 10\%$$

Para los trabajadores no calificados:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{X}}(100)$$

$$= \frac{\$1\,200}{\$12\,000}(100)$$

$$= 10\%$$

No existe diferencia en la dispersión relativa de los dos grupos.

AUTOEXAMEN 4-12

Las respuestas se dan al final del capítulo.

A un gran grupo de conscriptos de la fuerza aérea se les aplicaron dos pruebas experimentales: una de aptitudes mecánicas y otra de destreza manual. La media aritmética de la calificación en la prueba de aptitudes mecánicas fue 200, con una desviación estándar de 10. La media y la desviación estándar para la prueba de destreza manual fueron: $\overline{X} = 30$, $s = 6$. Compare la dispersión relativa en los dos grupos.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de números impar se dan al final del libro.

23. El analista de investigación para la empresa de corretaje de acciones Sidde Financial desea comparar la dispersión de las razones precio-rendimiento para un grupo de acciones comunes con la distribución de su pago sobre la inversión. Para las razones precio-rendimiento la media es 10.9 y la desviación estándar 1.8. El rendimiento medio sobre inversión es 25% y la desviación, 5.2%.
    a. ¿Por qué debe utilizarse el coeficiente de variación para comparar la dispersión?
    b. Compare la dispersión relativa para las razones precio-rendimiento y el rendimiento sobre la inversión.

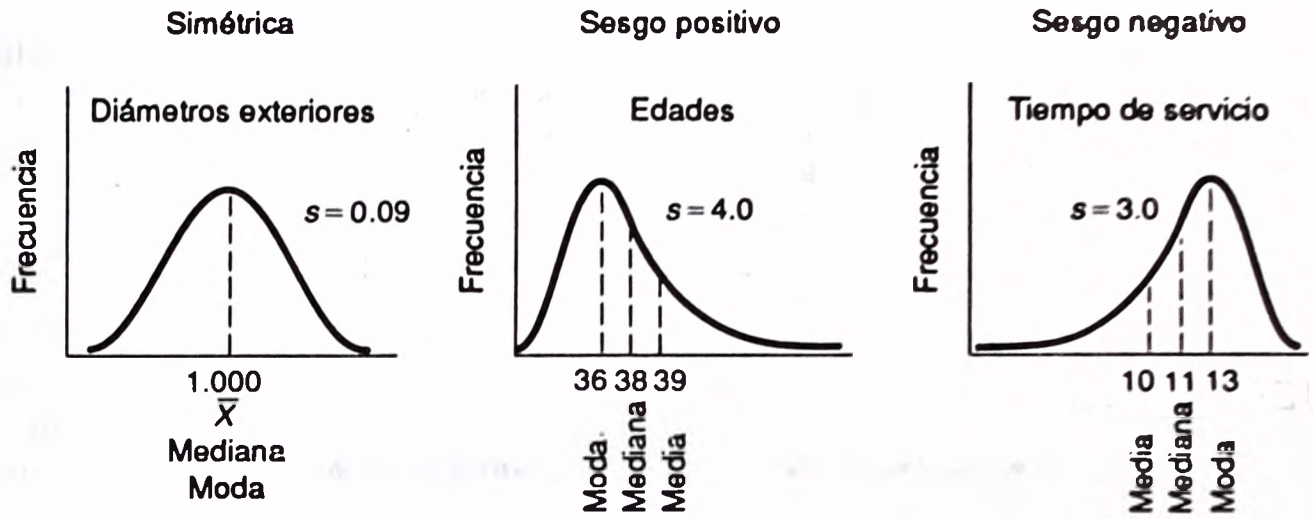
24. Se van a comparar la variabilidad en los precios anuales de las acciones que se venden a menos de $10 (dólares) y la dispersión en los precios de aquellas que se venden por arriba de $60. El precio medio de las acciones que se venden a menos de $10 es $5.25, y la desviación estándar, $1.52. El precio medio de las acciones que se venden a más de $60 es $92.50, y la desviación estándar, $5.28.
    a. ¿Por qué debe utilizarse el coeficiente de variación para comparar la dispersión de los precios?
    b. Calcule los coeficientes de variación y explique cualquier diferencia.

MEDIDAS DE ASIMETRIA (O SESGO)

En el capítulo 3 se evaluó la tendencia central de un conjunto de observaciones utilizando la media, la mediana y la moda. En este capítulo se han mostrado varias medidas que describen la diseminación de los datos. Otra característica que puede medirse es el grado de *asimetría* de una distribución. Recuerde que si una distribución de frecuencias es *simétrica,* no tiene sesgo, es decir, el sesgo es nulo. Si una o más observaciones son muy grandes, la media de la distribución se vuelve mayor que la mediana o la moda. En tales casos se dice que la distribución tiene *sesgo positivo.* Por el contrario, si una o más observaciones muy pequeñas se encuentran presentes, la media es la menor de los tres promedios y se dice que la distribución tiene *sesgo negativo.* (Véase el diagrama 4-4.)

DIAGRAMA 4-4

Polígonos de frecuencias: simétricos y asimétricos



Karl Pearson también desarrolló una medida para evaluar el sesgo de una distribución, denominada **coeficiente de asimetría** (C.A.):

$$\text{C.A.} = \frac{3(\text{media} - \text{mediana})}{\text{Desviación estándar}}$$

✱ Ejemplo

Las duraciones de estancia en el piso de cancerología de un hospital se organizaron en una distribución de frecuencias. La duración media fue 28 días, la mediana, 25 días, y la duración modal 23 días. Se calculó una desviación estándar de 4.2 días.

1. ¿Es la distribución simétrica, o asimétrica con sesgo positivo o sesgo negativo?
2. ¿Cuál es el coeficiente de asimetría? Interprételo.

✔ Solución

1. Es asimétrica con sesgo positivo porque la media es la mayor de los tres promedios.
2. Vale 2.14, que se obtiene calculando

$$\text{C.A.} = \frac{3(\text{media} - \text{mediana})}{\text{Desviación estándar}} = \frac{3(28 - 25)}{4.2} = \frac{9}{4.2} = 2.14$$

Interpretando esto, el coeficiente de asimetría por lo general se encuentra entre – 3 y + 3. En tal caso + 2.14 indica un grado importante de asimetría

con sesgo positivo. En apariencia unos cuantos pacientes cancerosos permanecen en el hospital durante largo tiempo, provocando que la media sea mayor que la mediana o la moda.

AUTOEXAMEN 4-13

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una muestra de operadores de captura de datos muy experimentados reveló que su velocidad media al teclear es de 87 palabras por minuto, con una mediana de 73. La desviación estándar es 16.9 palabras por minuto. ¿Cuál es el coeficiente de asimetría? Interprételo.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

25. Una muestra de las casas que se ofrecen en venta en Walla Walla, Washington, reveló que el precio medio solicitado es $75 900, la mediana $70 100, y la moda, $67 200. La desviación estándar de la distribución es $5 900.
    a. La distribución de precios ¿es simétrica, o asimétrica con sesgo negativo o sesgo positivo?
    b. ¿Cuál es el coeficiente de asimetría? Interprételo.

26. Un estudio de las ventas netas de una muestra de pequeñas empresas reveló que las ventas netas tienen una media de $2.1 millones, una mediana de $2.4 millones y una moda de $2.6 millones. La desviación estándar de la distribución es $500 000.
    a. ¿La distribución de las ventas netas es simétrica o asimétrica, de sesgo negativo o positivo?
    b. ¿Cuál es el coeficiente de asimetría? Interprételo.

APLICACION PARA COMPUTADORA

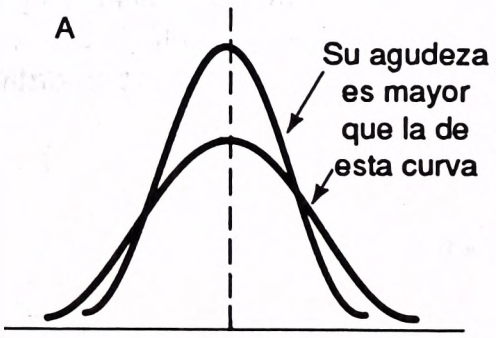
El análisis de los precios mensuales de renta de nuevas unidades de condominio en el área de Sarasota-Bradenton se inició en el capítulo 2. Las rentas se organizaron en una distribución de frecuencias y se calcularon otras medidas descriptivas, como media y desviación estándar. Estas medidas descriptivas proporcionaron una adecuada visualización de los datos, y la tendencia central y la dispersión. En muchos casos los cálculos fueron bastante largos. Se utilizó el sistema de cómputo MINITAB para mejorar la exactitud y reducir la carga de cálculo.

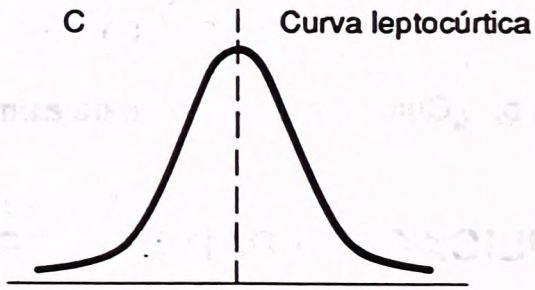
Otro paquete estadístico es el llamado Statistical Package for the Social Sciences, o SPSS^x, como generalmente se le denomina. A continuación se presenta un listado proveniente del sistema SPSS^x para los datos de renta de condominios.

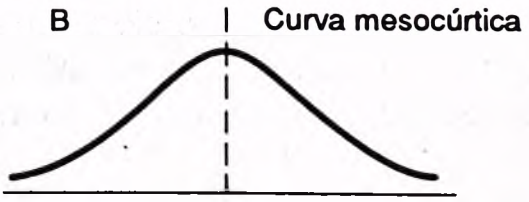
```
NUMBER OF VALID OBSERVATIONS (LISTWISE) =    120.00
VARIABLE RENTAL      MONTHLY RENTALS

                MEAN            1457.933
                STD DEV          307.595
                KURTOSIS            .272
                SKEWNESS           -.263
                RANGE           1547.000
                MINIMUM              640
                MAXIMUM             2187
```

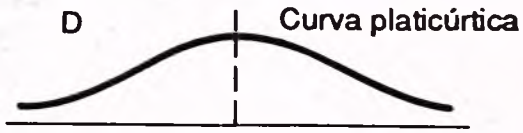
Curtosis

Una medida de resumen o compendio que no se incluyó en el análisis anterior, pero que aparece en los resultados de computadora de SPSS^x es la *curtosis*. Mide el grado de agudeza de una distribución. Obsérvese en la figura A que aunque ambas curvas son simétricas y tienen la misma media, una de las curvas es más cúrtica (aguda o sobresaliente). A la curva de la figura B se le denomina *mesocúrtica* (*meso* significa intermedio). La curva de la figura C se denomina *leptocúrtica* (*lepto* significa delgado). A la curva de la figura D se le denomina *platicúrtica* (*plati* significa aplanado). Según se muestra, una distribución simétrica puede tener grados variables de curtosis, pero lo mismo sucede con las distribuciones que tienen (asimetría). No mostraremos los cálculos para el grado de curtosis. Sin embargo, obsérvese que el coeficiente de curtosis para los problemas de renta de condominios, según se muestra en los resultados de SPSS^x, es 0.272.









RESUMEN

Este capítulo se destinó a varias medidas empleadas para describir la dispersión de los datos. Una de ellas es la *amplitud total*. Mide la dispersión y se evalúa restando el menor valor del mayor. Su cálculo es simple, pero si hay algún valor extremadamente pequeño o grande, tal amplitud puede ser una medida muy poco confiable. La *amplitud centílica* y la *amplitud cuartílica* no se basan en los valores menor y mayor y por tanto, corrigen la deficiencia de la amplitud total. La amplitud cuartílica, que es la diferencia entre los cuartiles primero y tercero (que son los centiles 25º y 75º), mide la dispersión del 50% central de las observaciones.

Tres medidas de dispersión (la *desviación media*, la *variancia* y la *desviación estándar*) se basan en la diferencia de cada elemento con respecto a su media. Si las observaciones se acumulan cerca de la media, será pequeña. Si existe una dispersión importante respecto a la media, serán grandes. La desviación media es el promedio de las desviaciones (con respecto a la media). La variancia y la desviación estándar se basan en las desviaciones cuadráticas (con respecto a la media).

Si dos o más distribuciones se encuentran en distintas unidades, o si sus medias están muy separadas, una comparación directa de sus desviaciones estándares puede ser engañosa. En vez de esto, deben compararse utilizando coeficientes de variación. Para cada distribución, el coeficiente de variación se calcula dividiendo la desviación estándar entre la media, y multiplicando el resultado por 100. Después, se comparan estas medidas relativas.

La condición de *sesgo* en una distribución puede medirse con el *coeficiente de asimetría*. Por lo general varía de −3 (sesgo negativo) a +3 (sesgo positivo). Un coeficiente de asimetría igual a cero indica que no hay sesgo. La *curtosis* es el grado de agudeza de una curva de distribución (simétrica o asimétrica).

Recapitulación

I. Medidas de dispersión absoluta.
   A. La amplitud total es la diferencia entre los dos valores extremos de un conjunto de números.
   B. La amplitud centílica es la diferencia entre dos centiles seleccionados, por lo común el 10º y el 90º.
   C. La amplitud cuartílica es la diferencia entre el tercero y el primer cuartiles.
   D. La desviación cuartílica (D.C.) es la mitad de la distancia entre el primero y el tercero cuartiles (equivale a la mitad de la amplitud cuartílica)

$$\text{D.C.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

en donde:

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - FA}{f}(i) \qquad Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - FA}{f}(i)$$

   E. La desviación media (también denominada desviación promedio) es la media aritmética de las diferencias absolutas de cada valor con respecto a la media.

$$\text{D.M.} = \frac{\Sigma|X - \overline{X}|}{n}$$

F. La variancia es la media aritmética de las desviaciones con respecto a la media elevadas al cuadrado. Las fórmulas para una población son

Datos no agrupados:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X - \mu)^2}{N} \quad \text{o bien} \quad \frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2$$

Datos agrupados:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma fX^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fX}{N}\right)^2$$

G. La desviación estándar es la raíz cuadrada de la variancia. Está en las mismas unidades que los datos originales. Esta valiosa medida es
1. De amplio uso en el muestreo y otros aspectos de la inferencia estadística.
2. Utilizada para estimar la dispersión de dos o más poblaciones.
Combinando la desviación estándar y la media, la regla empírica (o normal) indica:

$\mu \pm \sigma$ abarca aproximadamente 68% de los valores.
$\mu \pm 2\sigma$ comprende aproximadamente 95% de los valores.
$\mu \pm 3\sigma$ abarca aproximadamente 99.7% de los valores.

Las fórmulas para una muestra son

Datos no agrupados:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}}$$

Datos agrupados:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{n}}{n - 1}}$$

II. Medidas de dispersión relativa.
A. El coeficiente de variación se calcula dividiendo la desviación estándar entre la media. Se utiliza esta medida:
1. Cuando hay una amplia diferencia en la magnitud de las medias que se comparan.
2. Cuando las distribuciones en comparación se encuentran en unidades distintas.
Fórmula:

$$\text{C.V.} = \frac{s}{\bar{X}}(100)$$

III. Medida de sesgo.
A. El coeficiente de asimetría mide la condición de sesgamiento, de una distribución.
Fórmula:

$$\text{C.A.} = \frac{3(\text{media} - \text{mediana})}{\text{Desviación estándar}}$$

IV. Medida de agudeza.
   A. El coeficiente de curtosis mide el grado de agudeza de una distribución.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

Marque la letra que corresponda a la respuesta correcta.
Los ejercicios 27 a 32 se basan en los pesos (en centigramos) de una *muestra* de varios transistores seleccionados de la línea de producción. Tales pesos son 12, 6, 7, 3, 10.

27. El peso medio de la muestra es:
    a. 7.0.
    b. 38.0.
    c. 7.6.
    d. 9.0.
    e. Ninguno de los valores anteriores.
28. La amplitud total de la muestra es:
    a. 0.0.
    b. 7.6.
    c. 7.0.
    d. 9.0.
    e. Ninguno de los valores anteriores.
29. La desviación estándar de la muestra es:
    a. 7.6.
    b. 3.51.
    c. 50.
    d. –14.44.
    e. Ninguno de los valores anteriores.
30. El coeficiente de variación es:
    a. $38.
    b. 3.51.
    c. 14.44.
    d. 46.2%
    e. 7.0.
    f. Ninguno de los valores anteriores.
31. La variancia es:
    a. 12.32.
    b. 3.80.
    c. 50.00%
    d. 0.47.
    e. Ninguno de los valores anteriores.
32. El coeficiente de asimetría es:
    a. –14.44.
    b. 47%
    c. 19.01.
    d. 38.
    e. Ninguno de los valores anteriores.

Los ejercicios 33 a 40 se basan en el problema que sigue. El departamento de control de calidad de una industria vigila constantemente tres líneas de ensamble que producen hornos para uso doméstico. Cada horno se diseña para precalentar a una temperatura de 240 °F en cuatro minutos, y después apagarse. Sin embargo, puede suceder que el horno no alcance los 240 grados en el tiempo asignado, debido a una instalación impropia del aislamiento y por otras razones. De manera semejante, la temperatura podría sobrepasar 240 °F durante el ciclo de precalentamiento de cuatro minutos.

Se muestreó un gran número de hornos y se calcularon las medidas que siguen para cada línea:

	Temperatura		
Medida estadística	*Línea 1*	*Línea 2*	*Línea 3*
Media aritmética	238.1	240.0	242.9
Mediana	240.0	240.0	240.0
Moda	241.5	240.0	239.1
Desviación estándar	3.0	0.4	3.9
Desviación media	1.9	0.2	2.2
Desviación cuartílica	1.0	0.1	1.7

33. La distribución de las lecturas en los hornos, ¿de qué línea tienen una distribución simétrica de campana?
    a. Línea 1.
    b. Línea 2.
    c. Línea 3.
    d. No puede determinarse con base en la información dada.
34. El coeficiente de variación para las temperaturas de la línea 3 es:
    a. 1.6%
    b. 60.6%
    c. 3.9°
    d. 242.9°
    e. No puede calcularse con base en la información dada.
35. De acuerdo con la regla empírica, aproximadamente 95% de las temperaturas de la línea 2 estuvieron entre F:
    a. 238.8 y 241.2.
    b. 239.9 y 240.1.
    c. 239.2 y 240.8.
    d. 239.6 y 240.4.
    e. Ninguna de las respuestas es correcta.
36. La distribución de las temperaturas de los hornos al concluir el periodo de precalentamiento de cuatro minutos para la línea 1 es:
    a. Simétrica sin sesgo.
    b. Asimétrica con sesgo negativo.
    c. Asimétrica con sesgo positivo.
    d. Ninguna de las respuestas es correcta.
37. Aproximadamente la mitad de las lecturas de temperatura para la línea 3 estuvo por encima de (°F):

a. 242.9.
b. 240.0.
c. 239.1.
d. 1.7.
e. Ninguna de las respuestas es correcta.

38. Aproximadamente la mitad de las lecturas de temperatura para la línea 2 quedan entre (°F):
a. 239.2 y 240.8.
b. 239.8 y 240.2.
c. 239.9 y 240.1.
d. 0.1 y 0.4.
e. Ninguna de las respuestas es correcta.

39. La variancia para las lecturas de temperatura de la línea 1 es:
a. 1.0.
b. 3.0.
c. 3.61.
d. 9.0.
e. 241.5.
f. Ninguna de las respuestas es correcta.

40. La amplitud total de las temperaturas para la línea 2 es aproximadamente:
a. 3.0 grados
b. 50 grados
c. 0.4 grados
d. 2.4 grados
e. 1.0 grados
f. Ninguna de las respuestas es correcta.

41. En el Houston Memorial Hospital se desea comparar la tasa anual de ocupación de camas con las publicadas por la American Hospital Association. Las tasas para una muestra de 80 camas se organizaron en la siguiente distribución de frecuencias. (Una tasa anual de ocupación de 21.0 por cama indica que, durante un año, 21 diferentes pacientes ocuparon la misma cama de hospital.)

Tasa anual de ocupación	*Número*
17–19	4
20–22	9
23–25	13
26–28	20
29–31	15
32–34	7
35–37	5
38–40	5
41–43	2

a. Calcule la media (aritmética) de la tasa de ocupación de cama.
b. Determine la desviación estándar
c. ¿Cuál es el coeficiente de variación?
d. ¿La distribución tiene sesgo positivo o negativo? Cite evidencia.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Véase el problema 2 de Aplicación de los Conceptos, en el capítulo 3. ¿Cuánta variación hay en los datos sobre carreras logradas? Cómo respondería a la pregunta: "¿Cuántas carreras lograron los equipos de Ligas Mayores en 75% de los juegos?" Comente la forma de la distribución. ¿Es sesgada?
2. Véanse los datos del problema 2 de Aplicación de los Conceptos, capítulo 2. Comente sobre la dispersión de las calificaciones de Estadística. ¿Los datos son simétricos o sesgados? ¿Por qué?
3. Consulte los datos del problema 3 de Aplicación de los Conceptos, capítulo 2. Comente sobre la dispersión de los datos. ¿Parece ser que los datos son sesgados?
4. La National Video Rental Association informó de los datos que siguen en lo que se refiere al número de videocintas rentadas por unidad familiar durante el último mes.

Número rentado	0	1–4	5–9	10–19	20–40	50 o más
Número de hogares	54	10	16	34	18	6

¿Cuántas videocintas alquila por mes un hogar representativo? El 75% de los hogares renta ¿cuántas videocintas o menos? Si en un hogar se alquila una videocinta, ¿cuál es la probabilidad de que rente 20 o más?

EXAMEN CAPITULO 4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Las preguntas 1–5 se basan en las estadísticas que siguen. Dos empresas presentaron muestras de alambre de cobre para su prueba. Las piezas de muestra de cada empresa se probaron en cuanto a resistencia a la tensión y los resultados se organizaron en una distribución de frecuencias. Después se evaluó la media, la mediana y otras medidas. (Las resistencias a la tensión están en libras por pulgada cuadrada.)

	Compañía	
Estadística	*Doma*	*Betz*
Media aritmética	500	600
Mediana	500	500
Moda	500	300
Desviación estándar	40	20
Desviación media	32	16
Desviación cuartílica	25	14
Amplitud	240	120
Número de elementos en la muestra	100	80

1. De acuerdo con la regla empírica, aproximadamente, ¿entre cuáles dos valores están los resultados de prueba del 95% de los alambres de la compañía Doma?
2. ¿Entre cuáles dos valores están los resultados de prueba del 50% de los alambres de la compañía Doma?
3. ¿Cuál es el coeficiente de variación para la distribución de los productos Doma?
4. ¿Qué distribución tiene mayor dispersión? Explique la respuesta.
5. ¿Cuál es la variancia para la distribución de la compañía Doma?

Las preguntas 6 y 7 se basan en los siguientes pesos muestrales: 7, 9, 11, 9 y 4 (gramos).

6. Calcule la desviación media.
7. Evalúe la variancia y la desviación estándar.

Las preguntas 8–10 se basan en la distribución de frecuencias que sigue.

Días de inasistencia en el año	Número (f)
2– 5	7
6– 9	11
10–13	20
14–17	30
18–21	14
22–25	10
26–29	8

8. Determine la amplitud total. Explique qué indica.
9. Calcule la amplitud centílica 10 a 90.
10. ¿La distribución es simétrica, o bien, sesgo positivo o sesgo negativo? (No es necesario calcular ninguna medida, como el coeficiente de sesgo.)

Autoexámenes

4-1 2. $6 000; $6 000.

2. $12 000 para ejecutivos, que se obtiene calculando $12 000 – $0; $8 000 para gerencia de nivel medio, que se obtiene por $10 000 – $2 000.
3. Hay mayor dispersión en los costos anuales de viaje de los ejecutivos porque la amplitud de su distribución ($12 000) es mayor que la amplitud de $8 000 para la gerencia de nivel medio. De esta forma, la media aritmética de $6 000 para la gerencia media es más representativa que el costo normal de viaje.

4-2 $$\overline{X} = \frac{824}{8} = 103$$

1. 5.25 kg. que se obtiene al calcular:

X	$X - \overline{X}$	*Desviación absoluta*
95	|– 8|	8
103	| 0|	0
105	|+ 2|	2
110	|+ 7|	7
104	|+ 1|	1
105	|+ 2|	2
112	|+ 9|	9
90	|–13|	13
Total		42

$$D.M = \frac{42}{8} = 5.25 \text{ kg}$$

2. Los pesos de recipientes que se remitèn a Irlanda se desvían 5.25 kg en promedio, de la media de 103 kg.
3. Hay más dispersión en los recipientes que van a Irlanda en comparación con los que se envían a Francia (porque 5.25 kg es mayor que 2.4 kg).

4-3 1. 15.67, que se obtiene por medio de:

X	$X - \mu$	$(X - \mu)^2$
204	–6	36
215	+5	25
207	–3	9
212	+2	4
214	+4	16
208	–2	4
	0	94

$$\mu = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{1\,260}{6} = 210 \text{ libras}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (X - \mu)^2}{N} = \frac{94}{6} = 15.67$$

2. 3.96 libras, que se obtiene al calcular $\sqrt{15.67}$.

4-4 2.33, que resulta de calcular:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{28}{7} = 4$$

X	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$	X^2
4	0	0	16
2	–2	4	4
5	1	1	25
4	0	0	16
5	1	1	25
2	–2	4	4
6	2	4	36
28	0	14	126

$$s^2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1} \qquad s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}$$

$$= \frac{14}{7 - 1} \qquad = \frac{126 - \frac{(28)^2}{7}}{7 - 1}$$

$$= 2.33 \qquad = \frac{126 - 112}{6}$$

$$= 2.33$$

4-5 1. 1.53 gramos, que se obtiene evaluando $\sqrt{2.33}$.

2. Sí, los datos originales estaban en gramos. La desviación estándar es 1.53 gramos.

4-6 29 000 millas, que se obtiene al calcular 54 000 − 25 000. Utilizando los límites verdaderos sería 30 000 millas.

4-7 1. Una distribución de frecuencias.

2. 3.2 años que se obtiene por medio de:

Edades	*f*	*X*	*fX*	*fX²*
2– 4	2	3	6	18
5– 7	5	6	30	180
8–10	10	9	90	810
11–13	4	12	48	576
14–16	2	15	30	450
	23		204	2 034

$$s = \sqrt{\frac{2\,034 - \frac{(204)^2}{23}}{23 - 1}}$$

$$\sqrt{\frac{2\,034 - 1\,809.3913}{22}}$$

$$\sqrt{10.209486}$$

3.195 años

3. 8.9 años, que resulta de 204/23.

4. 10.208, que se obtiene al calcular $(3.195)^2$

4-8 1. Al menos 88.9%, obtenido de:

$$1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0.889$$

2. Aproximadamente 80.2%, que se obtiene calculando:

$$1 - \frac{1}{(2.25)^2} = 1 - \frac{1}{5.0625} = 1 - 0.198$$

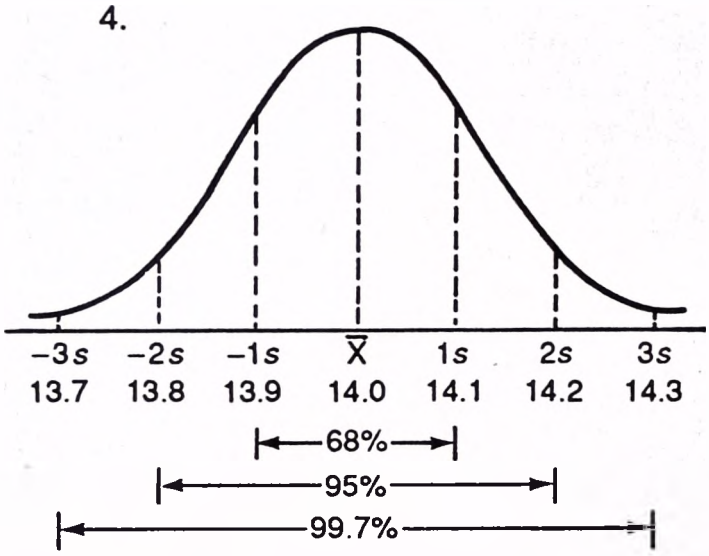
Tanto \$34.14 como \$67.94 están a 2.25 desviaciones estándares de la media. (\$34.14 − \$51.04)/\$7.51 = −2.25, y (\$67.94 − \$51.04)/\$7.51 = +2.25.

4-9 1. 13.9 y 14.1 pulg, que se obtienen de 14.0 ± 1(0.1).

2. 13.8 y 14.2 pulg, que se obtienen de 14.0 ± 2(0.1).

3. 13.7 y 14.3 pulg, que se obtienen de 14.0 ± 3(0.1).

4.



4-10 Q_3 = \$55.96, que resulta de calcular 3/4 × 120 = 90. Q_3 se encuentra en la clase \$54.50–\$59.50. L = \$54.50, Fa = 83, f = 24. Despejando:

$$\$54.50 + \frac{\frac{3(120)}{4} - 83}{24}(\$5) = \$55.96$$

Una cuarta parte de las comisiones están por arriba de \$55.96.

4-11 \$60.06, que se obtiene de:

$$\$59.50 + \frac{\frac{90(120)}{100} - 107}{9}(\$5)$$

4-12 El C.V. para la prueba de habilidad mecánica es 5%, que resulta de (10/200)(100). Para la destreza manual, C.V. es 20%, que se obtiene por (6/30)(100). De esta forma, la dispersión relativa en destreza manual es mayor que la dispersión relativa en habilidad mecánica, porque 20% > que 5%.

4-13 2.49, que se evalúa por:

$$\text{C.A.} = \frac{3(87 - 73)}{16.9} = 2.49$$

Existe un sesgo positivo importante en la distribución de las velocidades de tecleado. Unos cuantos capturistas muy veloces han provocado que la media sea mayor que la mediana o la moda.

Examen capítulo 4

1. Aproximadamente 420 y 580, que se obtienen por $\overline{X} \pm 2s = 500 \pm 2(40)$
2. Aproximadamente 475 y 525, que se obtienen por la mediana $\pm$ D.C. = 500 ± 25.
3. 8%, que se obtiene al calcular $(s/\overline{X})$ 100 = (40/500)100.
4. Doma. La amplitud 240 es mayor que la amplitud 120. Además, la desviación estándar 40 es mayor que la 20, y el C.V. de 8% para Doma es mayor que 3.3% para Betz.
5. 1 600, que se obtiene al calcular $(40)^2$.
6. D.M. = 10/5 = 2.
7. Variancia = 28/(5 − 1) = 7. Desviación estándar = $\sqrt{7}$ = 2.65.

X	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$
7	|−1|	1
9	|+1|	1
11	|+3|	9
9	|+1|	1
4	|−4|	16
40	10	28

8. Ya sea 27 (obtenido por 29 − 2), o bien 28 (obtenido al calcular 29.5 − 1.50).
9. 18.1, que se obtiene evaluando 24.7 − 6.6

   10º centil:

$$5.5 + \frac{\frac{10(100)}{100} - 7}{11}(4) = 6.6$$

   90º percentil:

$$21.5 + \frac{\frac{90(100)}{100} - 82}{10}(4) = 24.7$$

10. Resulta ser casi simétrica.

Repaso de los capítulos 1 – 4

Esta sección presenta un repaso de los principales conceptos y términos mostrados en los capítulos del 1 al 4. Dichos capítulos se destinaron a describir un conjunto de datos organizados en una *distribución de frecuencias,* y después representar tal distribución en forma de *histograma, polígono de frecuencias* o *polígono de frecuencias acumuladas.* El objetivo de las gráficas es mostrar de manera visual las características importantes de los datos.

Calcular un valor central que represente a los datos es otra forma de condensar un conjunto de observaciones. En el capítulo 3 se consideraron varias medidas de tendencia central: *media, media ponderada, mediana* y *moda.* En el capítulo 4 se describió la *dispersión* o variabilidad de los datos al calcular la *amplitud,* la *desviación estándar* y otras medidas. Además, se determinó la asimetría o sesgo de los datos al evaluar el *coeficiente de asimetría.*

Se subrayó la importancia de los paquetes de programática (software) de computadora: MINITAB, Statistical Package for the Social Sciences (SPSS^x) y SAS. Varios listados de computadora en estos capítulos mostraron la rapidez y exactitud con que puede organizarse un conjunto de datos originales en una distribución de frecuencias y un histograma. También observamos que los resultados de computadora presentan un gran número de medidas descriptivas, incluyendo la media, la variancia y la desviación estándar.

GLOSARIO

Capítulo 1

Estadística Ciencia de la recopilación, organización, análisis e interpretación de datos numéricos con objeto de tomar decisiones más efectivas.

Estadística descriptiva Técnica empleada para describir las características importantes de un conjunto de datos. Entre esas se tienen la organización de los valores en una distribución de frecuencias, y el cálculo de medidas de tendencia central, de dispersión y de asimetría o sesgo.

Estadística inferencial (también **inferencia estadística o estadística inductiva)** Parte de la Estadística que se ocupa de estimar un parámetro poblacional con base en una estadística muestral. Por ejemplo, si 2 de 10 calculadoras de mano muestreadas resultan defectuosas, podríamos inferir que 20% de la producción del lunes es defectuosa.

Exhaustiva Se aplica cuando una observación debe quedar en una categoría.

Medición de intervalo Si una observación es mayor que otra en una cantidad dada, y el punto cero es arbitrario, la medición está al menos en una escala de intervalo. Por ejemplo, la diferencia entre temperaturas de 70 y 80 grados es 10 grados. De manera semejante, una temperatura de 90 grados es 10 grados mayor que una temperatura de 80 grados, y así sucesivamente.

Medición de razón Si las distancias entre números son de tamaño constante conocido *y existe un verdadero punto cero,* la medición está en la escala de razón. Por ejemplo, la distancia entre $200 y $300 es $100, y en el caso del dinero existe un punto cero verdadero. Si se tiene cero dólares, existe ausencia de dinero (se carece verdaderamente de dinero).

Medición nominal El "más bajo" nivel de medición. Si los datos se clasifican en categorías y el orden de éstas no importa, se trata de un nivel de medición nominal. Son ejemplos el sexo (masculino, femenino) y la afiliación política (republicano, demócrata, independiente, otro). Si no importa enlistar primero masculino o femenino, los datos son de nivel nominal.

Medición ordinal Se dice que los datos que pueden clasificarse de manera lógica son medidas ordinales. Por ejemplo, la respuesta del consumidor al sonido de un nuevo altavoz o bocina podría ser excelente, muy buena, buena, regular o mala.

Muestra Si 256 de 22 140 pescadores de Idaho, se eligieron para que contestaran un cuestionario, a los 256 se les denomina muestra. El valor 256 es parte de la población de todos los pescadores.

Mutuamente excluyente Cuando una observación no puede quedar en más de una categoría.

Población Si interesan *todas* las calculadoras de mano producidas en lunes por el turno diurno de una fábrica, o *todas* las calificaciones de una prueba 1, el conjunto de todas las calculadoras o todas las calificaciones se denomina población. Un valor como la media aritmética, que se calcule a partir de una población, se conoce como *parámetro.*

Capítulo 2

Arreglo Disposición en orden de datos u observaciones, de menor a mayor.

Clase Intervalo en el cual se agrupan los datos. Por ejemplo, $4–$7 es una clase; $8–$11 es otra.

Diagramas Representaciones gráficas especiales que se emplean para representar una distribución de frecuencias, que incluyen histogramas, polígonos de frecuencias y polígonos de frecuencias acumuladas. Otros medios gráficos que se usan para representar datos son las gráficas de líneas, gráficas de barras, gráficas de sectores, etc. Son muy útiles, por ejemplo, para representar la tendencia en deudas a largo plazo o los cambios porcentuales en las ganancias del año anterior al presente.

Distribución de frecuencias A menudo resulta difícil analizar un gran conjunto de datos. Para condensarlos pueden organizarse en clases como $1 000–$1 999 y $2 000–$2 999. Al agrupamiento resultante se le denomina distribución de frecuencias.

Frecuencia de clase Número de observaciones contenidas en cada clase. Si hay 16 observaciones en la clase $4–$7, entonces 16 es la frecuencia de clase.

Punto medio Valor que divide a la clase en dos partes iguales. Para las clases $4–$7 y $8–$11, los puntos medios son $5.50 y $9.50, respectivamente.

Capítulo 3

Media (Aritmética) Suma de los valores dividida entre el número de ellos. El símbolo para la media (aritmética) de una muestra es $\overline{X}$, y el símbolo para una población es μ.

Media geométrica Es la raíz *n*-ésima del producto de todos los valores. Resulta útil en especial para promediar tasas de variación y números índices. Minimiza la importancia de los valores extremos. Un segundo uso de la media geométrica consiste en determinar el cambio porcentual promedio durante un periodo. Por ejemplo, si las ventas brutas fueran $245 millones en 1981 y $692 millones en 1990, ¿cuál sería el incremento porcentual promedio?

Media ponderada Cada valor se pondera (multiplica por un factor) de acuerdo con su importancia relativa. Por ejemplo, si 5 camisas cuestan $10 cada una y otras 20 cuestan $8 cada una, la media ponderada del precio es $8.40: [(5 × $10) + (20 × $8)]/25 = $210/25 = $8.40.

Mediana Valor de la observación central después de que todas las observaciones se han ordenado de menor a mayor. Por ejemplo, las observaciones 6, 9, 4 se reordenan a la forma 4, 6, 9, la mediana es entonces 6.

Moda Valor del elemento que aparece con mayor frecuencia en un conjunto de datos. Para datos agrupados, es el *punto medio* de la clase que contiene la mayoría de los valores.

Promedio Número que describe la centralización o tendencia central de los datos. Existe un cierto número de promedios especializados, entre los que se incluye la media, la media ponderada, la mediana, la moda y la media geométrica.

Capítulo 4

Amplitud centílica (A.Cn.) Distancia entre dos centiles seleccionados. Por lo general, el 10º y el 90º.

Amplitud cuartílica (A.C.) Distancia entre los cuartiles tercero y primero.

Amplitud total (A. T.) Distancia entre el mayor y el menor valor de un conjunto de datos: Amplitud total = Mayor valor − Menor valor.

Coeficiente de asimetría (C.A.) Medida que evalúa la falta de simetría en una distribución. Para una distribución simétrica vale cero. Cuando hay asimetría, es positivo o negativo, teniendo los límites de su valor aproximadamente en +3 o −3.

Coeficiente de variación (C.V.) Es la desviación estándar dividida entre la media, expresando como porcentaje el resultado. En especial es útil para comparar la dispersión relativa de dos o más conjuntos de datos cuando 1) están en unidades distintas, o 2) una media es mayor que la otra.

Curtosis Medida de la agudeza del perfil de una distribución.

Desviación cuartílica (D.C.) La mitad de la distancia entre los cuartiles tercero y primero. Equivale a la semiamplitud cuartílica y es la desviación respecto de la mediana.

Desviación estándar Raíz cuadrada de la variancia.

Desviación media (D.M.) También desviación promedio o desviación media absoluta (D.M.A.) La media aritmética de las desviaciones con respecto a la media.

Dispersión Una medida de tendencia central es un valor que es representativo de los datos. Una medida de dispersión expresa qué tan cercanos o separados están los valores con respecto a la media u otra medida de tendencia central. Una medida de dispersión indica cuán confiable es el promedio.

Variancia (o varianza) Media de las desviaciones (con respecto a la media) elevadas al cuadrado.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Las respuestas a los ejercicios suplementarios de repaso de número impar se dan al final del libro.

1. De entre todos los empleados de la empresa NED Electronics se seleccionó un pequeño número y se registraron sus sueldos por hora. Tales percepciones (en dólares) fueron: $5, $6.70, $10.70, $7.00 y $4.60.
   a. ¿Los sueldos son ¿una muestra o una población?
   b. ¿Cuál es el nivel de medición?
   c. ¿Cuál es la media aritmética?
   d. ¿Cuál es la mediana? Interprete su respuesta.
   e. ¿Cuál es la variancia?
   f. ¿Cuál es el coeficiente de asimetría? Interprete su respuesta.

2. El número de horas de tiempo extra trabajadas por todos los empleados del tercer turno de Publix son: 1, 4, 6, 12, 5 y 2.
   a. ¿Es ésta una muestra o una población?
   b. ¿Cuál es la media?
   c. ¿Cuál es la mediana? Interprete su respuesta.
   d. ¿Cuál es la moda?
   e. ¿Cuál es la desviación media?
   f. ¿Cuál es la desviación estándar?
   g. ¿Cuál es el coeficiente de variación?

3. Las oficinas de turismo de St. Thomas y otras islas del Caribe obtuvieron una muestra de turistas conforme regresaban a Estados Unidos. Una de las preguntas fue: ¿Cuántos rollos de película fotográfica utilizó al visitar nuestra isla? Las respuestas muestrales fueron:

8	6	3	11	14	8	9	16	9	10
5	11	7	8	8	10	9	12	13	9

   a. Utilizando cinco clases, organice los datos muestrales en una distribución de frecuencias.
   b. Represente la distribución en forma de un polígono de frecuencias.
   c. ¿Cuál es la media?
   d. ¿Cuál es la mediana?
   e. ¿Cuál es la moda?
   f. ¿Cuál es la amplitud total?
   g. ¿Cuál es la variancia muestral?
   h. ¿Cuál es la desviación estándar muestral?
   i. Si se considera que la distribución es simétrica y en forma de campana, aproximadamente 95% de los turistas utilizaron entre _____ y _____ rollos.

4. Las cantidades anuales gastadas en investigación y desarrollo por una muestra de fabricantes de componentes electrónicos son (en millones de dólares):

8	34	15	24	15	28	12	20	22	23
14	26	18	23	10	21	16	17	22	31
13	25	20	28	6	20	19	27	16	22

a. ¿Cuál es el nivel de medición?
b. Utilizando seis clases, organice los datos en una distribución de frecuencias
c. Represente la distribución en forma de histograma.
d. Represente la distribución con un polígono de frecuencias acumuladas "menor de".
e. Con base en el polígono anterior, ¿cuál es la media *estimada* de la cantidad gastada en investigación y desarrollo? Interprete su respuesta.
f. ¿Cuál es la media de la cantidad gastada en investigación y desarrollo?
g. Con base en el polígono de frecuencias acumuladas "menor de", ¿cuál es la amplitud cuartílica? ¿y la desviación de los cuartiles?

5. Las tasas de crecimiento de la empresa Bardeen Chemicals durante los últimos cinco años son 5.2%, 8.7%, 3.9%, 6.8% y 19.5%, respectivamente.
   a. ¿Cuál es la media aritmética de la tasa anual de crecimiento?
   b. ¿Cuál es la media geométrica de dicha tasa anual de crecimiento?
   c. ¿Cuál debería utilizarse para determinar la tasa promedio anual de crecimiento? ¿Por qué?
6. La compañía Kaiser Aluminum & Chemical Corporation observó en su informe del segundo trimestre de 1989 que hasta junio 30 de 1989, las facturas por pagar llegaban a $284.0 millones. Para la misma fecha en 1984, fueron de $113.0 millones. ¿Cuál es la media geométrica del incremento porcentual anual (de junio a junio) desde junio de 1984 a junio de 1989?
7. La IBM en su informe anual reveló que su capital operativo o de trabajo era (en miles de millones de dólares) $4.4, $3.4, $3.0, $4.8, $7.8 y $8.3, consecutivamente para los años 1984–1989. Presente estas cifras en una gráfica simple de líneas o una gráfica simple de barras.
8. Suponga que un ejecutivo de la firma Boise Cascade desea mostrar en forma gráfica en la reunión de consejo el cambio en los elementos seleccionados de las presentaciones de ingresos y otros informes financieros. Tomadas de la publicación *Quarterly* de Boise Cascade del mes de agosto, estos son los elementos de interés:

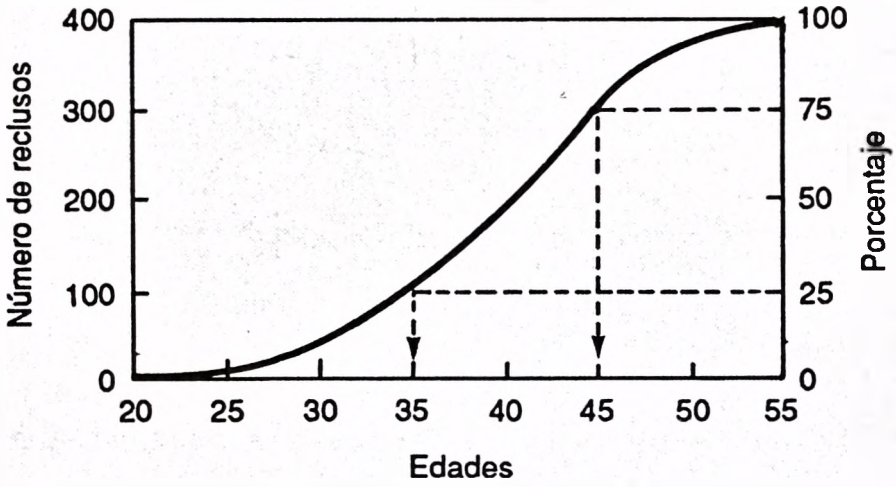
	Seis meses, hasta junio 30 (en millones de dólares)	
	1988	*1989*
Ingresos por las operaciones	$ 74.4	$123.1
Ingresos por intereses	2.7	3.3
Cuentas de participación	118.5	105.0
Inventario en registros	21.9	6.6
Rendimiento neto por acción común	0.54	1.16

Presente los cambios porcentuales de 1988 a 1989 en una gráfica bidireccional de barras.

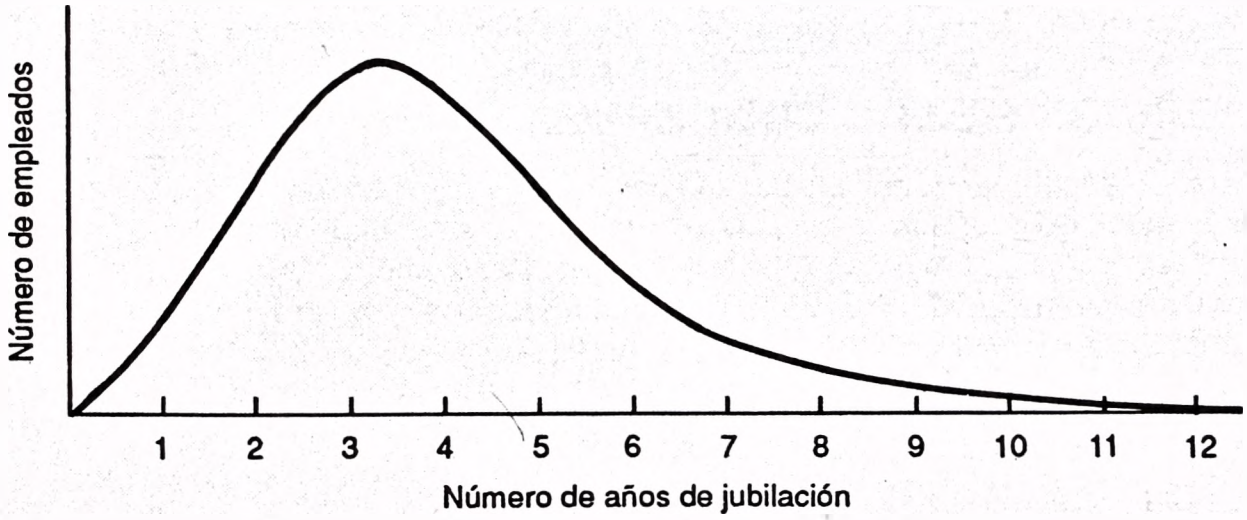
Para contestar los ejercicios 9–18, llene los espacios en blanco.

9. Se pidió a los empleados de una empresa que asisten a un curso de entrenamiento que lo clasificaran como notable, muy bueno, bueno, regular o deficiente. El nivel de medición es _____.

10. Una muestra de ciudadanos de la tercera edad reveló que su ingreso anual de retiro tiene una media de $16 900. Puesto que la media se basa en una muestra, se dice que $16 900 es _____.
11. Véase la gráfica siguiente. Es _____. El tercer cuartil es aproximadamente _____, el primer cuartil _____, la amplitud entre los cuartiles _____, la desviación cuartílica _____ y la amplitud total _____.



12. Consulte la gráfica que sigue, que se basa en una distribución de frecuencias. Se denomina _____. Describa el sesgo o asimetría de la distribución _____. Explique _____.



13. Media = $64, mediana = $61, moda = $60, desviación estándar = $6 y amplitud = $40. El coeficiente de variación es _____.
14. Véase el ejercicio 13. El coeficiente de asimetría es _____.
15. Una medida útil para comparar la dispersión relativa de dos o más distribuciones, si están en unidades distintas es _____.
16. Media = 100, mediana = 100, moda = 100 y s = 4. La amplitud total es, aproximadamente, _____.
17. Consulte el ejercicio 16. Aproximadamente 95% de los valores está entre _____ y _____.

18. Fine Furniture, Inc. produjo 2 460 escritorios en 1980, y 6 520 en 1990. Para encontrar el promedio del incremento porcentual anual en la producción, debe utilizarse _____.

Una muestra de las cantidades depositadas por los clientes en las cuentas mínimas de cheques (MCA) del First Federal Bank revelaron las siguientes cantidades.

$124	$ 14	$150	$289	$ 52	$156	$203	$ 82	$ 27	$248
39	52	103	58	136	249	110	298	251	157
186	107	142	185	75	202	119	219	156	78
116	152	206	117	52	299	58	153	219	148
145	187	165	147	158	146	185	186	149	140

Haga el ejercicio 19 o el 20.

19. Utilizando los datos originales anteriores y un paquete de informática estadística (como Statistical Package for the Social Sciences):
    a. Organice los datos en una distribución de frecuencias.
    b. Calcule la media, mediana y otras medidas descriptivas. Incluya gráficas, si están disponibles. El usuario decide cuál debe ser el intervalo de clase.
    c. Interprete los resultados de computadora; esto es, describa la tendencia central, dispersión, sesgo, etc.

20. Si no se dispone de computadora, organice las cantidades de las cuentas de cheques en una distribución de frecuencias. El usuario decide cuál debe ser el intervalo de clase. Represente la distribución en forma gráfica y calcule medidas de tendencia central, dispersión y sesgo. Después interprete las características importantes de las cuentas de cheques.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Desde 1789, 85 jueces han funcionado como magistrados adjuntos de la Suprema Corte de Estados Unidos. Sus tiempos de servicio se dan a continuación. (No se incluye a los que han trabajado en 1988.) Analice los datos. Por ejemplo, ¿cuál es un tiempo representativo de servicio? ¿cuál es la variación en los tiempos de servicio? ¿Se presenta sesgo en la distribución? Desarrolle una gráfica de "tallo y hoja".

8	1	20	5	9	0	13	15	30	3
30	16	18	23	33	20	2	31	14	32
4	28	14	18	27	5	23	5	8	23
18	28	14	34	10	21	9	33	6	7
20	11	5	20	15	10	2	16	13	26
29	19	3	4	5	26	4	10	26	22
5	15	16	7	16	15	6	34	19	23
36	9	1	13	6	13	17	7	16	5
23	2	3	15	14					

2. El ingreso personal per cápita por estado (incluyendo el Distrito de Columbia) en Estados Unidos, en miles de dólares, para el año de 1986, se presenta a continuación. Organice estos datos en una distribución adecuada. ¿Cuál es un ingreso per cápita "representativo" para un estado? ¿Cuánta variación hay en los datos de ingreso? ¿Es simétrica la distribución? ¿Qué otros comentarios podría hacer?

$11.1	$17.7	$13.2	$10.7	$16.8	$15.1	$19.2	$15.1
18.9	14.3	13.2	14.7	11.4	15.4	12.9	13.2
14.4	11.1	11.2	12.7	16.6	17.5	14.1	14.7
9.5	13.6	11.9	13.8	15.1	15.9	18.3	11.1
17.1	12.2	12.3	13.7	12.4	12.2	13.9	14.7
11.1	11.9	11.8	13.5	10.7	12.8	15.4	14.5
10.5	13.8	13.2					

3. Las distribuciones de frecuencia que siguen muestran los ingresos de trabajadores de tiempo completo que estuvieron durante todo el año en una empresa, clasificados por sexo para 1985. Compare las dos distribuciones y comente las diferencias. Tal vez desee realizar algunas gráficas. Una comparación interesante podría ser entre las ganancias del 25% superior y del 25% inferior; entre los ingresos mediano, medio y modal; y entre la dispersión de las dos distribuciones.

Grupo de ingresos	*Mujeres*	*Hombres*
$ 2 999 o menos	533	924
$ 3 000–$ 4 999	401	422
5 000– 6 999	1 108	814
7 000– 9 999	3 218	2 233
10 000– 14 999	7 527	5 872
15 000– 19 999	5 926	6 621
20 000– 24 999	4 085	6 425
25 000– 49 999	4 297	17 489
$50 000 o más	287	4 141
Total	27 382	44 941

4. A continuación se proporcionan las edades en que cada uno de los cuarenta presidentes de Estados Unidos empezaron a ejercer su cargo. Organice los datos en una gráfica de "tallo y hoja". Determine una edad representativa de inicio de funciones. Comente sobre la variación de las edades.

57	61	57	57	58	57	61	54	68	51
49	64	50	48	65	52	56	46	54	49
50	47	55	55	54	42	51	56	55	51
54	51	60	62	43	55	56	61	52	69

5

Estudio de conceptos probabilísticos

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Definir lo que es probabilidad.
2. Describir los enfoques clásico, de frecuencia relativa y subjetivo para la probabilidad.
3. Calcular probabilidades aplicando las reglas de adición y multiplicación.
4. Determinar el número de posibles permutaciones y combinaciones.
5. Calcular una probabilidad utilizando el teorema de Bayes.

Los capítulos 2 al 4 se centraron en **Estadística descriptiva.** En el capítulo 2 las rentas mensuales de condominios se organizaron en una distribución de frecuencias para mostrar los valores más bajos y los más altos en donde se encontraba la mayor concentración de datos. También presentamos en forma gráfica la distribución usando un histograma y varios polígonos. En los capítulos 3 y 4 cierto número de medidas de tendencia central y de dispersión se utilizaron para señalar una renta mensual representativa (aproximadamente $1 475) y para examinar la dispersión de los datos. La dispersión se describió empleando medidas como la amplitud total y la desviación estándar. Por tanto, el campo de la Estadística descriptiva se ocupa de *describir algo que ya ha ocurrido.*

Ahora pasamos a la segunda faceta de la Estadística, que es el *cálculo de la probabilidad de que algo ocurrirá.* Recuerde que este aspecto de la Estadística se denomina *Estadística inferencial o Inferencia Estadística.*

Rara vez el encargado de tomar decisiones dispone de información completa a partir de la cual puede realizar una determinación. Por ejemplo:

> Toys and Things, un fabricante de juguetes y rompecabezas, ha desarrollado un nuevo juego basado en información deportiva y desea saber si los aficionados a los deportes comprarán o no el juego. Dos de los posibles nombres son "Slam Dunk" y "Home Run". Una forma de minimizar el riesgo de tomar una decisión incorrecta consiste en contratar a una empresa de encuestas para que tome una muestra de, por ejemplo, 2 000 individuos de la población y pregunte a cada persona cómo reaccionaría ante el nuevo juego y a sus posibles títulos.
>
> El departamento de control de calidad de Bethlehem Steel debe asegurar a la dirección que el alambre de un cuarto de pulgada que se está produciendo tiene una resistencia aceptable a la tensión. Es obvio que no todo el alambre producido puede ser probado para determinar su resistencia porque la prueba exige que el alambre se estire hasta romperlo, destruyéndolo. De manera que se selecciona en forma aleatoria una muestra de, por ejemplo, 10 piezas. Con base en los resultados de prueba, todo el alambre producido se clasifica como satisfactorio o insatisfactorio.
>
> Otras preguntas relacionadas con la incertidumbre son: ¿Debe descontinuarse de inmediato la telenovela *Mamá lo sabe?* ¿Deberían los "Gigantes" de Nueva York seleccionar a Sammy Uwea o a Clint Murray en la primera contratación en las ligas colegiales? ¿Un cereal con sabor de menta de reciente desarrollo dará ganancias al lanzarse al mercado? ¿Debe alguien casarse con Jean? ¿Debería adquirir un Rolls Royce nuevo? ¿Debo votar por Charles Linden como representante de la ciudad en donde vivo?

La inferencia estadística se ocupa de deducciones acerca de una población con base en una muestra tomada a partir de aquélla. (Las poblaciones para los ejemplos anteriores son: todos los consumidores a los que les gustan los juegos electrónicos deportivos, todo el alambre producido de un cuarto de pulgada, todos los telespectadores aficionados a las telenovelas, todos los jugadores de futbol americano colegial que serán contratados por los equipos profesionales, y así sucesivamente.)

Debido a que existe una incertidumbre considerable al tomar decisiones, resulta importante que todos los riesgos implícitos conocidos se evalúen en forma científica.

Ayuda en esta evaluación la *teoría probabilística,* a la que a menudo se denomina "ciencia de la incertidumbre". El empleo de la probabilidad permite a quien toma decisiones, analizar los riesgos y minimizar el azar inherente, con información limitada, por ejemplo, al lanzar un nuevo producto o aceptar un embarque recién llegado que contenga partes defectuosas.

Como los conceptos probabilísticos son tan importantes en el campo de la inferencia estadística (cuyo análisis se iniciará en el capítulo 8), en este capítulo se presenta el lenguaje básico de la probabilidad, incluyendo términos como **experimento, evento, probabilidad subjetiva** y **reglas de adición y multiplicación.**

¿QUE ES UNA PROBABILIDAD?

Sin duda se está familiarizado con términos tales como *probabilidad, posibilidad* y *azar.* Con frecuencia son utilizados de manera intercambiable. El pronóstico meteorológico indica que hay un 70% de posibilidades de lluvia para un domingo en particular. Con base en una encuesta a consumidores que probaron un encurtido (pickle) de reciente desarrollo con sabor a plátano o banano, la probabilidad es 0.03 de que, si se lanza al mercado, tenga éxito financiero. (Esto significa que la posibilidad de que un encurtido con sabor a plátano sea aceptado por el público resulta muy remota.) ¿Qué cosa es una probabilidad?

Probabilidad Número entre 0 y 1 inclusive, que mide la creencia que se tiene de que llegue a ocurrir un evento específico que sea resultado de un experimento.

En la definición de **experimento** se trata de una actividad que se observa o mide. Algunos ejemplos de experimento son:

1. Preguntar a un grupo de estudiantes universitarios que probaron tres computadoras personales, cuál prefieren.
2. Medir el diámetro exterior de anillos de pistón para determinar el número de defectuosos.
3. Contar el número de reclusos en una prisión que tienen 60 años de edad o más.
4. Hacer girar la llave de encendido de un automóvil que sale de la línea de ensamble para determinar si el motor arrancará o no.

Puesto de otra forma, un experimento es algo que se planea hacer y de cuyo resultado no se está seguro. Por ejemplo, planeamos preguntar a los estudiantes de una universidad su preferencia sobre una computadora personal, pero no estamos seguros de cuál es la más popular. De manera semejante, al planear que se cuente el número de presos de una prisión que tengan más de 60 años, no estamos seguros si hay 0, o 1, o 2, o 3, . . . mayores de 60 años.

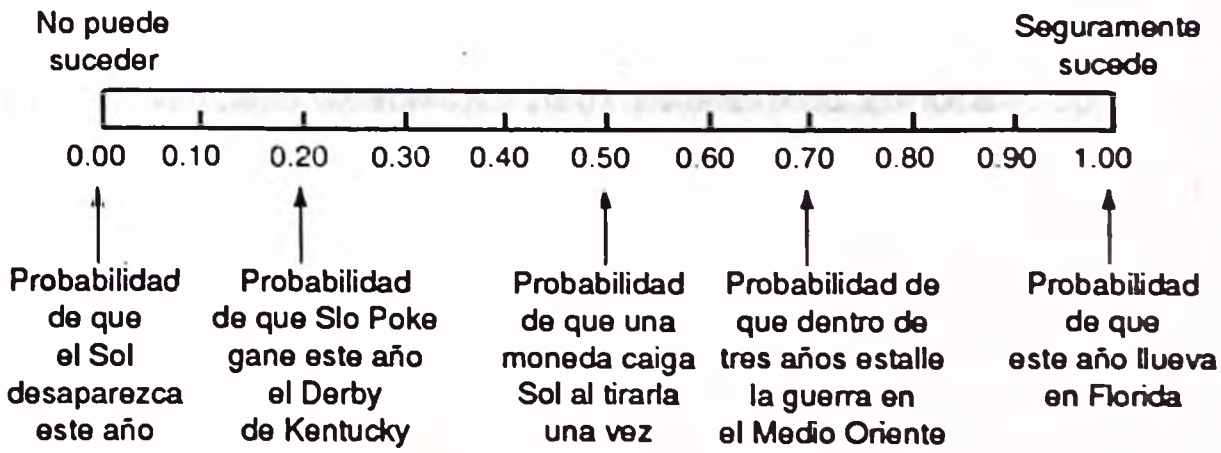
Un experimento puede tener uno o más resultados posibles, a los que se denomina **eventos.**

Evento	Un posible resultado de un experimento.

Experimento: Preguntar a estudiantes universitarios qué computadora personal prefieren.
Evento: 1. Prefieren PDQ.
2. Prefieren Izuo.
3. Prefieren YY4.
Experimento: Contar el número de reclusos de 60 años o más.
Evento: Se contaron 48 presos de 60 años o más.
Experimento: Observar si el automóvil arranca o no al girar la llave de encendido a la posición ON.
Evento: 1. Sí arranca
2. No arranca.
Experimento: Tirar un dado.
Evento: 1. Observar un 1
2. Observar un 2
3. Observar un 3
4. Observar un 4
5. Observar un 5
6. Observar un 6

Una probabilidad se expresa como un número decimal, del tipo 0.70, 0.27 o 0.50. Sin embargo, puede darse como una fracción; por ejemplo, $\frac{7}{10}$, $\frac{27}{100}$, o $\frac{1}{2}$, y ser un cierto número desde 0 a 1 inclusive. Si una empresa tiene sólo cinco regiones de ventas y el nombre o número de cada zona se escribe en un trozo de papel y éstos se colocan en una urna, la probabilidad de seleccionar una de las cinco regiones es 1. La probabilidad de seleccionar de la urna un trozo de papel que diga "Acereros de Pittsburgh" es 0. De esta forma, la probabilidad 1 representa algo que seguramente va a suceder, y la probabilidad 0 corresponde a algo que no puede suceder.

Cuanto más se acerca una probabilidad a 0, es más improbable que suceda el evento al que se asocia. Cuanto más se acerca la probabilidad a 1, tanto más seguros estamos de que sucederá. La relación se muestra en el diagrama que sigue junto con unas cuantas de nuestras creencias personales.



Tal vez se le dé una probabilidad diferente al caballo Slo Poke o a la declaración de guerra en el Medio Oriente.

AUTOEXAMEN 5-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Se ha desarrollado un nuevo juego de computadora. Su potencial de mercado lo van a probar 80 jugadores veteranos de este equipo de diversión.
   a. ¿Cuál es el experimento?
   b. ¿Cuál es un posible evento?

2. a. Suponga que 65 jugadores probaron el nuevo juego y afirmaron que les gustó. ¿65 es una probabilidad?
   b. La probabilidad de que el nuevo juego de computadora sea un éxito se calcula como −1. Comente esto.

¿POR QUE SE ESTUDIA LA PROBABILIDAD?

¿Qué papel desempeña la probabilidad en la toma de decisiones? Esta pregunta puede responderse al citar dos casos que se analizarán en futuros capítulos.

Caso 1

Con base en la experiencia, una empresa editorial determinó que al menos 20% de cierto grupo, como los músicos, debe suscribirse a una revista mensual para que ésta tenga éxito financiero. La empresa está considerando una revista mensual para aficionados a observar aves. Se diseñó un número especial y se envió a una muestra de 1 000 aficionados-observadores. En respuesta, 190 de 1 000, o sea 19%, afirmaron que se suscribirían a la revista si ésta se publicara. ¿Debe afirmarse que esta proporción es menor que 20% y tomar una decisión inmediata de no publicar la revista? ¿O podría atribuirse la diferencia entre el porcentaje necesario (20) y el porcentaje muestral (19) al muestreo, es decir, al azar? La probabilidad ayuda a tomar una decisión en este tipo de problemas, que se analizarán en el capítulo 10.

Caso 2

Para un gran proyecto de construcción se requieren miles de bloques de concreto. Las especificaciones indican que los bloques deben soportar presiones de 1 050 libras por pulgada cuadrada (lb/plg2, o psi) en promedio. Dos empresas que fabrican estos bloques presentaron muestras para probarlas. La resistencia de los bloques de la firma Strong Block Company presentó una media aritmética de 1 070 psi; los bloques de la Taylor Company en la prueba tuvieron una de 1 062 psi. Los funcionarios de Strong Block consideran que se les debe otorgar el contrato porque sus bloques tienen una resistencia mayor en psi. La compañía Taylor no está de acuerdo, afirmando que la diferencia de sólo 8 psi podría deberse al muestreo (al azar). Si la afirmación de la gente de Strong Block es correcta, se le debe otorgar el contrato. Si la afirmación de la gente de Taylor es correcta, el contrato se dividirá

entre las dos compañías. La probabilidad ayudará a tomar una decisión en problemas como éstos en el capítulo 9.

ENFOQUES DE LA PROBABILIDAD

Se analizarán dos enfoques de la teoría probabilística que son dos puntos de vista: **objetivo** y **subjetivo.** La probabilidad objetiva puede subdividirse en 1) *probabilidad clásica o a priori,* y 2) el concepto de *frecuencia relativa* o *probabilidad a posteriori.*

Probabilidad clásica

El enfoque **clásico** o a priori de la probabilidad se basa en la consideración de que los resultados de un experimento son *igualmente posibles.* Empleando el punto de vista clásico, la probabilidad de que suceda un evento se calcula dividiendo el número de resultados favorables, entre el número total de resultados posibles:

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

✱ Ejemplo

El experimento consiste en observar la cara que muestre hacia arriba al caer un dado (de seis caras). ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un "dos" (dos puntos) ⚁ ? Sólo hay un evento "favorable", la caída de la cara con el "dos".

✔ Solución

Los eventos posibles son:

"as" ⚀
un "dos" ⚁
un "tres" ⚂
un "cuatro" ⚃
un "cinco" ⚄ y
un "seis" ⚅

Los seis resultados de la tirada del dado son igualmente probables. Por tanto

$$\text{Probabilidad de un "dos"} = \frac{1 \leftarrow}{6 \leftarrow} \quad \boxed{\frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de eventos posibles}}}$$

$$= 0.167$$

Si *sólo* uno de varios eventos puede ocurrir cada vez, se dice que los eventos son *mutuamente excluyentes*. En el evento de tirar el dado, los seis posibles resultados son eventos mutuamente excluyentes. Si al tirar el dado cae un "dos", no puede ocurrir al mismo tiempo que caiga un "cinco".

Si un experimento tiene un conjunto de eventos que incluye cada uno de los posibles resultados, como en el caso de la tirada del dado, se dice que el conjunto de eventos es *colectivamente exhaustivo*. Para el ejemplo de la tirada del dado, el conjunto de eventos está formado por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El conjunto es exhaustivo en forma colectiva porque incluye todos los posibles resultados.

Si el conjunto de eventos es exhaustivo en forma colectiva y los eventos son mutuamente excluyentes, la suma de las probabilidades es igual a 1. Ejemplo:

Experimento: Lanzar una moneda	
	Probabilidad
Evento: Sol	0.50
Evento: Aguila	0.50
Total	1.00

Para que se pueda aplicar el enfoque clásico, los eventos deben tener la misma posibilidad de ocurrir (a lo que se denomina *eventos igualmente posibles*). Además, el conjunto de eventos debe ser mutuamente excluyente y exhaustivo en forma colectiva.

Desde un punto de vista histórico, el enfoque clásico de la probabilidad se desarrolló y aplicó en los siglos XVII y XVIII a juegos de azar, como cartas y dados. Obsérvese que no es necesario realizar ningún experimento para determinar la probabilidad de que ocurra un evento al utilizar el enfoque clásico. Por ejemplo, es posible llegar en forma lógica a la probabilidad de obtener un "sol"* en la tirada de una moneda o tres "águilas" en la tirada de tres monedas. Ni tenemos que realizar un experimento para determinar la probabilidad de que la declaración de impuestos sobre la renta que presentó, sea sometida a una auditoría si hay dos millones de declaraciones enviadas por correo a la oficina de su distrito y se va a efectuar una auditoría a 2 400. Suponiendo que cada forma tiene una probabilidad igual de ser sujeta a auditoría, su probabilidad sería 0.0012, que se obtiene al dividir 2 400 entre 2 millones. Es obvio que la probabilidad de que su declaración sea sometida a una auditoría es pequeña (o remota).

En muchas situaciones de negocios, la ocurrencia de posibles eventos no es igualmente probable ni mutuamente excluyente. Por ejemplo, las máquinas de alta velocidad no producen un número igual de partes aceptables y defectuosas. En situaciones en las que existen probabilidades que no sean igualmente posibles, se requiere otro enfoque. En la sección que sigue se examina uno de esos planteamientos.

* Se empleará el término "sol" y "águila" en lugar de "cara" y "cruz", por ser lo más representativo en México.

AUTOEXAMEN 5-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Featherstone tiene almacenes en cuatro regiones: sur, medio oeste, Montañas Rocosas y lejano oeste. Se va a seleccionar en forma aleatoria una de las regiones para almacenar un artículo de poco uso. ¿Cuál es la probabilidad de que la bodega seleccionada se encuentre en la región de las Montañas?
2. Una carta de una baraja americana de 52 naipes se va a seleccionar en forma aleatoria. Exprese como fracción y como decimal:
   a. La probabilidad de que la carta sea una de espadas.
   b. La probabilidad de que sea el sota (jack) de corazones.
   c. La probabilidad de que sea una reina.
3. ¿Qué enfoque de la probabilidad ilustran los dos ejemplos anteriores?

Concepto de frecuencia relativa

Otro concepto probabilístico se basa en las **frecuencias relativas.** La probabilidad de que un evento ocurra a largo plazo se determina observando en qué fracción de tiempo sucedieron eventos semejantes en el pasado. En términos de una fórmula, la probabilidad de que un evento suceda se calcula por medio de:

$$\text{Probabilidad de que suceda un evento} = \frac{\text{Número de veces que el evento ocurrió en el pasado}}{\text{Número total de observaciones}}$$

✱ Ejemplo

Se efectuó un estudio de 751 graduados en administración de empresas en la Universidad de Toledo. Este es el experimento. Reveló que 383 de los 751 *no* estaban empleados según su principal área de estudio en la universidad. Por ejemplo, una persona que tuvo un área principal en contabilidad, ahora es el gerente de ventas de una empresa de procesamiento de tomates. ¿Cuál es la probabilidad de que un graduado específico en administración esté empleado en un área distinta a la principal de sus estudios en la universidad?

✔ Solución

$$\text{Probabilidad de que suceda un evento} = \frac{\text{Número de veces que el evento ocurrió en el pasado}}{\text{Número total de observaciones}}$$

$$P(A) = \frac{383}{751}$$

$$= 0.51$$

Para simplificar, pueden utilizarse letras o números. *P* corresponde a probabilidad y en este caso *P(A)* indica la probabilidad de que un graduado no esté empleado en su área principal de estudios en la universidad.

Puesto que 383 de 751, o sea 0.51 en términos de probabilidad, están en un campo de empleo diferente al de su área principal de estudios, podemos emplear esto como una estimación de la probabilidad. En otras palabras, con base en la experiencia existe una probabilidad de 0.51 de que un graduado en administración esté empleado en un campo distinto al de su área principal de estudios.

AUTOEXAMEN 5-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

El Centro Nacional de Estadísticas de Salud (de Estados Unidos) informó que de cada 883 muertes en los últimos años, 24 se debieron a accidentes automovilísticos, 182 a cáncer y 333 a problemas cardiacos.

1. Utilizando el enfoque de frecuencia relativa, obtenga una probabilidad aproximada de que una muerte específica se deba a un accidente automovilístico. Exprésela en forma de fracción y decimal.
2. Utilizando el enfoque de frecuencia relativa, estime la probabilidad de que una muerte específica se deba al cáncer. Exprésela como una fracción y decimal.

PROBABILIDAD SUBJETIVA

Si existe poca o ninguna experiencia en la cual se pueda basar una probabilidad, de todas formas puede obtenerse una probabilidad en forma subjetiva. Fundamentalmente esto significa evaluar las opiniones disponibles y otra información subjetiva para después llegar a la probabilidad. Atinadamente a esta probabilidad se le denomina **probabilidad subjetiva.**

Concepto subjetivo de probabilidad La posibilidad (probabilidad) de que suceda un evento, asignado por una persona con base en cualquier información de que disponga.

Son ejemplos de probabilidad subjetiva:

1. Estimar la posibilidad de que el equipo de los Patriotas de Nueva Inglaterra jueguen en el Super Tazón de futbol americano el año próximo.
2. Estimar la probabilidad de que General Motors Corp. pierda su lugar de número 1 en unidades totales vendidas frente a Ford Motor Co. o Chrysler Corp. dentro de dos años.
3. Estimar la posibilidad de que usted tenga una calificación de *A* en este curso.

AUTOEXAMEN 5-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. ¿Qué probabilidad asignaría usted a la posibilidad de que el promedio industrial Dow Jones llegue a 3 000 este año?
2. ¿Qué probabilidad asignaría a su posibilidad de adquirir un nuevo automóvil este año?

En resumen, existen dos puntos de vista en lo que se refiere a probabilidad: el objetivo y el subjetivo. Observamos que una expresión probabilística siempre constituye una estimación de un valor desconocido que regirá un evento que todavía no ocurre. Desde luego, existe una gran diferencia en el grado de incertidumbre que rodea a esta estimación, con base principal en el conocimiento que posea la persona ocupada del proceso básico. El individuo puede poseer el conocimiento necesario acerca de la tirada de un dado, e indicar que la probabilidad de que caiga un "as" (un punto) al tirar un dado normal, es un sexto. Pero sabemos muy poco en lo que se refiere a la aceptación del mercado para un nuevo producto todavía no probado. Por ejemplo, aunque un director de investigación de mercado pruebe un producto de reciente desarrollo —por ejemplo, en 40 tiendas de venta al menudeo— e indique que hay 70% de probabilidad de que el producto tenga ventas de más de un millón de unidades, sigue teniendo muy poco conocimiento acerca de la forma en que reaccionarán los consumidores cuando se lance al mercado nacional. En ambos casos (la tirada de un dado y la prueba de un nuevo producto) la persona está asignando un valor a un evento que le interesa, y existe diferencia sólo en la confianza del pronóstico en cuanto a la precisión de la estimación. Sin embargo, a pesar del punto de vista, se aplicarán las mismas leyes de probabilidad (que se presentan en las secciones que siguen).

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Hay 52 cartas en una baraja americana normal.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta que se saque sea de espadas?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta seleccionada sea sota de espadas?
   c. ¿Qué concepto de probabilidad ilustran *a* y *b*?
2. Se tira un solo dado.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un dos?
   b. ¿Qué concepto de probabilidad se ilustra con esto?
   c. ¿Los eventos son igualmente probables y mutuamente excluyentes? Explíquelo.
3. Antes de efectuar una encuesta a nivel nacional se seleccionaron 40 personas para probar el cuestionario. Una pregunta acerca de si debe o no legalizarse el aborto requiere una respuesta de sí o no.
   a. ¿Cuál es el experimento?
   b. ¿Cuáles son los posibles eventos?
   c. Diez de las 40 personas se declararon a favor de legalizar el aborto. Con base en estas respuestas muestrales, ¿cuál es la probabilidad de que una persona específica esté a favor de tal legalización?
   d. ¿Qué concepto de probabilidad ilustra esto?
   e. ¿Los eventos son por igual probables, mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos?
4. Se seleccionó en forma aleatoria un gran número de conductores de automóvil y se registró el número de infracciones de tránsito que tenían.

Número de infracciones	*Número de conductores*
0	1 910
1	46
2	18
3	12
4	9
5 o más	5

a. ¿Cuál es el experimento?
b. ¿Cuales son los posibles eventos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor específico tenga exactamente dos infracciones?
d. ¿Qué concepto de probabilidad ilustra esto?

ALGUNAS REGLAS BASICAS DE PROBABILIDAD

Ahora que hemos definido la probabilidad y descrito los diferentes enfoques de ésta, se examinará la combinación de eventos con la aplicación de las reglas de adición y multiplicación.

REGLAS DE ADICION

Regla especial de adición

Para aplicar la **regla especial de adición** los eventos deben ser mutuamente excluyentes. Recuérdese que *mutuamente excluyente* significa que cuando ocurre un evento, ninguno de los otros puede ocurrir *al mismo tiempo*. Como ejemplos, si al tirar un dado cae un "dos", ninguna de las otras caras (1, 3, 4, 5, o 6) puede estar hacia arriba al mismo tiempo. Y un producto que sale de la línea de ensamble no puede ser defectuoso y satisfactorio al mismo tiempo.

Si dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, la regla especial de adición indica que la probabilidad de que ocurra uno *u* otro de los eventos es igual a la suma de sus probabilidades. Esta regla se expresa en la fórmula que sigue.

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)}$$

Para tres eventos mutuamente excluyentes denotados por A, B y C, la regla se escribe:

$$\boxed{P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)}$$

✱ Ejemplo

Una máquina automática llena bolsas de plástico con una mezcla de frijoles, brócolis y otras legumbres. La mayoría de las bolsas contiene el peso correcto, pero debido a ligeras variaciones en el tamaño de los frijoles y de las otras legumbres, un paquete

puede tener un peso ligeramente menor o mayor. Una verificación anterior de muchos paquetes indicó:

Peso	*Evento*	*Número de paquetes*	*Probabilidad de ocurrencia*
Con peso menor	*A*	100	0.025
Satisfactorio	*B*	3 600	0.900
Con peso mayor	*C*	300	0.075
		4 000	1.000

$\frac{100}{4\,000}$

¿Cuál es la probabilidad de que un paquete en especial tenga un peso menor o mayor?

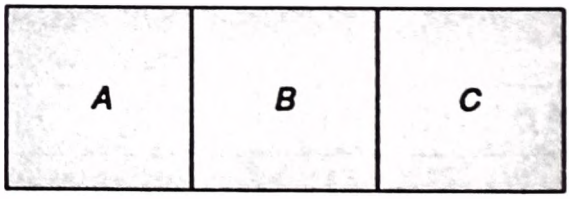
✔ Solución

El resultado "peso menor" es el evento *A*. El resultado "peso mayor" es el evento *C*. Aplicando la regla especial de adición:

$$\begin{aligned} P(A \text{ o } C) &= P(A) + P(C) \\ &= 0.025 + 0.07 \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

Obsérvese que los eventos son mutuamente excluyentes, lo cual significa que un paquete con mezcla de legumbres no puede tener peso menor, satisfactorio y mayor al mismo tiempo. (Observe que $P(A \text{ o } B \text{ o } C) = 1.000$.)

El investigador inglés J. Venn (1834–88) desarrolló un diagrama para representar en forma gráfica el resultado de un experimento. El concepto de *mutuamente excluyente* y otras reglas diversas para combinar probabilidades pueden visualizarse empleando este dispositivo. Para elaborar un diagrama de Venn, primero se delimita un espacio que representa todos los posibles resultados. A este espacio se le denomina *espacio muestral* y por lo general tiene forma de rectángulo.* Un evento específico (por ejemplo, el que la bolsa de legumbres tenga peso de más) se denomina *punto muestral*. El total de puntos muestrales es igual al *espacio muestral*. El diagrama de Venn que sigue representa el concepto de *mutuamente excluyente*. Los eventos no se traslapan, lo cual indica que son mutuamente excluyentes.



* **(N. del R.)** El calificativo "muestral" proviene del inglés *sample* que se aplica en estas nociones: *sample point, sample space*. Sin embargo, lo anterior es incorrecto porque aquí no interviene el concepto de muestra y muestreo. Se recomiendan mejor las expresiones *punto de resultado* y *espacio de resultados*.

AUTOEXAMEN 5-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Se va a entrevistar a un grupo selecto de empleados de Worldwide Enterprises con respecto a un nuevo plan de pensiones. Se efectuarán entrevistas detalladas a cada uno de los empleados seleccionados en la muestra. Los empleados se clasificaron como sigue:

Clasificación	*Evento*	*Número de empleados*
Supervisores	*A*	120
De mantenimiento	*B*	50
De producción	*C*	1 460
Gerencia	*D*	302
Secretarial	*E*	68

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona seleccionada sea un empleado de mantenimiento?
2. Cuál es la probabilidad de que la primera persona seleccionada sea una secretaria?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona seleccionada sea alguien de mantenimiento o una secretaria?
4. ¿Qué regla de probabilidad utilizó para determinar la respuesta al número 3?
5. Cuál es la probabilidad de que la primera persona que se elija para entrevistarla sea un supervisor o un empleado de mantenimiento o un trabajador de producción o un gerente o una secretaria?
6. Trace un diagrama de Venn para representar estos eventos.

La probabilidad de que una bolsa de legumbres mixtas tenga peso de menos, $P(A)$, más la probabilidad de que no sea una bolsa con peso de menos, que se escribe $P(\sim A)$ y se lee "no A", debe lógicamente ser igual a 1. Esto se expresa:

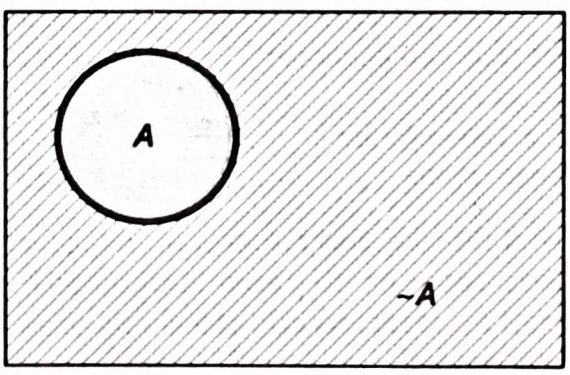
$$P(A) + P(\sim A) = 1$$

Esto puede ser expresado también como:

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\sim A)}$$

A esto se le denomina *regla del complemento.*

El diagrama de Venn se vería así:

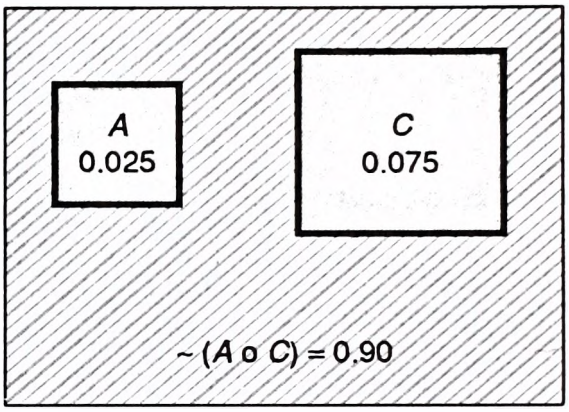


✱ Ejemplo

Recuérdese que la probabilidad de que una bolsa de legumbres mixtos tenga peso de menos es 0.025 y de que tenga peso de más es 0.075. ¿Cómo se representaría esta situación en un diagrama de Venn?

✔ Solución

El diagrama de Venn para representar esta situación podría ser:



AUTOEXAMEN 5-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Remítase al autoexamen 5-5. Presente lo que sigue en forma de un diagrama de Venn. En la primera selección, ¿cuál es la probabilidad de:

1. Seleccionar un empleado de mantenimiento (denotado evento *B*)?
2. Seleccionar una secretaria (denotado evento *E*)?
3. Seleccionar una persona de gerencia (denotado evento *D*)?
4. No seleccionar el evento *B*, o *D*, o *E?*

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Un estudio de 200 cadenas de tiendas de abarrotes reveló estos ingresos, después del pago de impuestos:

Ingreso después de impuestos	Número de empresas
Menos de $1 millón	102
$1 millón a $20 millones	61
$20 millones o más	37

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que una cadena en especial tenga menos de $1 millón (de dólares) en ingresos después de pagar impuestos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que una cadena de tiendas de abarrotes seleccionada al azar tenga un ingreso entre $1 millón y $20 millones, o un ingreso de $20 millones o más? ¿Qué regla de probabilidad se aplicó?

6. Un estudio de las opiniones de diseñadores en lo referente al color primario más conveniente para aplicar en oficinas ejecutivas indicó:

Color primario	Número de opiniones
Rojo	92
Naranja	86
Amarillo	46
Verde	91
Azul	37
Indigo	46
Violeta	2

a. ¿Cuál es el experimento?
b. ¿Cuál es un posible evento?
c. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una respuesta específica y descubrir que el diseñador prefiere rojo o verde?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que un diseñador no prefiera amarillo?
e. ¿Los eventos son mutuamente excluyentes? Explique su respuesta.

Regla general de adición

Los resultados de un experimento pueden no ser mutuamente excluyentes. Por ejemplo, suponga que la Comisión de Turismo de Florida seleccionó una muestra de 200 turistas que visitaron el estado durante el año. La encuesta reveló que 120 turistas fueron a Disney World y 100 a Busch Gardens cerca de Tampa. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada haya visitado Disney World o Busch Gardens? Si se emplea la regla especial de adición, la probabilidad de seleccionar un turista que fue a Disney World es 0.60, que se obtiene por 120/200. De manera semejante, la probabilidad de que un turista haya ido a Busch Gardens es 0.50. La suma de estas probabilidades es 1.10. Sin embargo, sabemos que esta probabilidad no puede ser mayor de 1. La explicación es que muchos turistas visitaron ambos lugares y se están contando dos veces. Una verificación a las respuestas de la encuesta reveló que 60 de los 200 turistas de la muestra en realidad visitaron ambos lugares.

Para responder a la pregunta: "¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada haya visitado Disney World o Busch Gardens?" 1) se suma la probabilidad de que el turista haya visitado Disney World y la probabilidad de que haya visitado Busch Gardens, y 2) se resta la probabilidad de visitar ambos lugares. De esta forma:

$$P(\text{Disney o Busch}) = P(\text{Disney}) + P(\text{Busch}) - P(\text{tanto Disney como Busch})$$

$$= \frac{120}{200} + \frac{100}{200} - \frac{60}{200}$$

$$= \frac{160}{200} = 0.80, \text{ o bien}$$

$$= 0.60 + 0.50 - 0.30 = 0.80$$

Cuando dos eventos se traslapan, a la probabilidad se le denomina **probabilidad conjunta**. La probabilidad de que el turista visite ambos lugares (0.30) es un ejemplo de probabilidad conjunta.

Probabilidad conjunta Probabilidad que mide la posibilidad de que dos o más eventos ocurran en forma simultánea.

En resumen, la regla general de adición se utiliza para combinar eventos que no son mutuamente excluyentes. Esta regla para dos eventos denotados *A* y *B* se escribe:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

✱ Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de que una carta elegida al azar de una baraja de 52 naipes sea un rey o una de corazones?

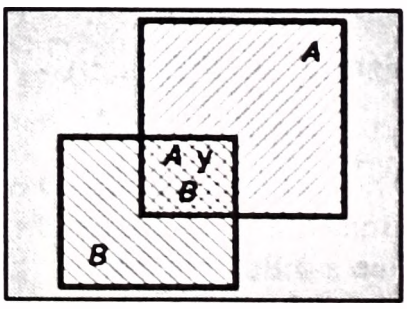
✔ Solución

Carta	*Probabilidad*	*Explicación*
Rey	$P(A) = 4/52$	Hay 4 reyes en una baraja regular
De corazones	$P(B) = 13/52$	Hay 13 naipes de corazones en una baraja regular
Rey de corazones	$P(A \text{ y } B) = 1/52$	Hay un rey de corazones en una baraja regular.

Resolviendo:

$$\begin{aligned} P(A \text{ o } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) \\ &= 4/52 + 13/52 - 1/52 \\ &= 16/52, \text{ o } 0.3077 \end{aligned}$$

Un diagrama de Venn presenta estos resultados que no son mutuamente excluyentes.



AUTOEXAMEN 5-7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Como parte de un programa de servicio a la salud para los empleados de General Cement, se efectúan anualmente exámenes físicos de rutina. Se descubrió que 8% de los empleados necesitaban zapatos correctivos, 15%, trabajos dentales importantes, y 3% necesitaban tanto zapatos correctivos como trabajo dental mayor.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar necesite o zapatos correctivos o trabajo dental mayor?
2. Muestre esta situación en forma de un diagrama de Venn.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Una encuesta a ejecutivos de alto nivel reveló que 35% leen con regularidad la revista Time, 20% leen *Newsweek* y 40% leen *U.S. News & World Report;* 10% leen tanto *Time* como *U.S. News & World Report.*
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un ejecutivo específico de nivel superior lea *Time* o *U.S. News & World Report* con regularidad?
   b. ¿Cómo se denomina a la probabilidad 0.10 ?
   c. ¿Los eventos son mutuamente excluyentes? Explique la respuesta.

8. Un estudio realizado por el Servicio de Parques Nacionales (de Estados Unidos) reveló que 50% de los vacacionistas que van a la región de las Montañas Rocosas visitan el Parque Yellowstone, 40% visitan Tetons y 35% visitan ambos.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un vacacionista visite al menos uno de estos sitios?
   b. ¿Cómo se denomina a la probabilidad 0.35?
   c. ¿Los eventos son mutuamente excluyentes? Explique su respuesta.

REGLAS DE MULTIPLICACION

Regla especial de multiplicación

Si hay dos eventos *independientes A* y *B,* la probabilidad de que ocurran *A* y *B* se obtiene al multiplicar las dos probabilidades. De este modo para dos eventos *A* y *B,* la **regla especial de multiplicación** expresada en forma simbólica es:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B) \text{ o}$$
$$= P(A) \cdot P(B)$$

Este punto alto indica *multiplicación.*

Esta regla para combinar probabilidades supone que un segundo resultado *no* depende del primero. Para ilustrar lo que significa independencia de eventos, suponga que se lanzan al aire (o se vuelan) dos monedas. El resultado de una moneda (sol o águila) no se ve afectado por el resultado de la otra moneda (sol o águila). Puesto de otra forma, dos eventos son independientes si el resultado de un segundo evento no depende del resultado del primero.

Para tres eventos independientes *A, B* y *C,* la regla especial de multiplicación utilizada para determinar la probabilidad de que ocurran todos los tres eventos es:

$$\boxed{P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}$$

✱ Ejemplo

Se lanzan dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas caigan águila?

✔ Solución

La probabilidad de que una de las dos monedas caiga águila, escrita $P(A)$, es un medio o 0.50. La probabilidad de que la otra moneda caiga igual, denotada $P(B)$, es un medio o 0.50. La probabilidad de que ocurran ambas cosas es un cuarto o 0.25, que se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{4}, \text{ o } 0.25 \end{aligned}$$

Esto puede mostrarse al enlistar todos los posibles resultados. Dos águilas (A) [o dos soles (S)] es sólo uno de los cuatro posibles resultados.

	A	A
o	A	S
o	S	A
o	S	S

Si dos eventos no son independientes, se dice que son *dependientes.* Para ilustrar la dependencia, suponga que hay 10 rollos de película en una caja y que se sabe que tres están defectuosos. Se selecciona de la caja un rollo. Es obvio que la probabilidad de seleccionar un rollo defectuoso es $\frac{3}{10}$, y que la probabilidad de seleccionar un rollo bueno es $\frac{7}{10}$. Después se selecciona un segundo rollo de la caja. La probabilidad que esté defectuoso *depende* de que el primer rollo seleccionado fuera uno de los defectuosos. La probabilidad de que el segundo rollo esté defectuoso también es:

AUTOEXAMEN 5-8

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Debido a su larga experiencia, en Teton Tire se sabe que la probabilidad de que su neumático XB-70 dure 40 000 millas antes de perder el dibujo o fallar es 0.80. Se hace un ajuste en cualquier neumático que no dure 40 000 millas. Usted compra cuatro XB-70. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro neumáticos duren al menos 40 000 millas?
2. Según se mencionó en un ejemplo anterior, una máquina automática coloca legumbres mixtas en una bolsa de plástico. La experiencia indica que algunos paquetes tuvieron menos peso y algunos más, pero la mayoría tenían un peso satisfactorio.

Peso	*Probabilidad*
Peso menor	0.025
Satisfactorio	0.900
Peso mayor	0.075

a. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar tres paquetes de la línea de procesamiento de alimentos el día de hoy y encontrar que a los tres les falta peso?
b. ¿Qué significa esta probabilidad?

$\frac{2}{9}$, si el primer rollo seleccionado fuera defectuoso. (Quedaban sólo dos rollos defectuosos más en la caja, que contenía nueve rollos.)
$\frac{3}{9}$, si el primer rollo seleccionado no estaba defectuoso. (Los tres rollos defectuosos siguen estando en la caja que contenía nueve rollos.)

A la fracción $\frac{2}{9}$ (o $\frac{3}{9}$) se le denomina justamente *probabilidad condicional* porque su valor es condicional (dependiente) sobre la primera selección de la caja: que se haya sacado un rollo de película defectuoso o no.

Si deseamos determinar la probabilidad de seleccionar dos rollos defectuosos uno después del otro, se aplica la regla general de multiplicación.

Regla general de multiplicación

La **regla general de multiplicación** se utiliza para determinar la *probabilidad conjunta* de que ocurran dos eventos, como seleccionar dos rollos defectuosos de la caja con 10, uno después del otro. En general, la regla indica que para dos eventos *A* y *B*, la probabilidad conjunta de que ambos eventos sucedan resulta al multiplicar la probabilidad de que el evento *A* suceda, por la probabilidad condicional de que ocurra el evento *B*. De manera simbólica, la probabilidad conjunta $P(A \text{ y } B)$ se obtiene por medio de

$$\boxed{P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A)}$$

en donde $P(B|A)$ expresa a la probabilidad de que ocurra *B dado que ya ocurrió* A. El trazo vertical significa "dado que".

✱ Ejemplo

Considérese otra vez la ilustración anterior: hay 10 rollos de película en una caja y tres son defectuosos. Se van a seleccionar dos rollos, uno después del otro. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un rollo defectuoso seguido por otro rollo también defectuoso?

✔ Solución

El primer rollo de película seleccionado de la caja es el evento A. Así, $P(A) = \frac{3}{10}$ porque tres de los 10 rollos son defectuosos. El segundo rollo seleccionado es el evento B. Si se considera que el segundo rollo es defectuoso, $P(B|A) = \frac{2}{9}$, porque después de descubrir que la primera selección era un rollo con defectos, sólo quedaron dos rollos defectuosos de película en la caja que contenía 9 rollos. Determinando la probabilidad de dos rollos defectuosos:

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{6}{90}, \text{ o aproximadamente } 0.07 \end{aligned}$$

Esto significa que si este experimento se repitiera 100 veces, a largo plazo, siete experimentos darían como resultado rollos defectuosos de película, tanto en la primera como en la segunda selecciones.

Por cierto que se considera que este experimento se realizó *sin reposición* (o impropiamente, "reemplazo"); es decir, el rollo defectuoso de película no se devolvió a la caja antes de seleccionar el siguiente. También debe observarse que la regla general de multiplicación puede ampliarse a más de dos eventos. Para tres eventos, A, B y C, la fórmula sería:

$$\boxed{P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \text{ y } B)}$$

Como ejemplo, la probabilidad de que los primeros tres rollos seleccionados de la caja sean todos defectuosos es 0.00833, que resulta al calcular:

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B \text{ y } C) &= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \text{ y } B) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{6}{720} \\ &= 0.00833, \text{ o bien} \\ &= 0.300 \times 0.222 \times 0.125 \\ &= 0.00833 \end{aligned}$$

AUTOEXAMEN 5-9

Las respuestas se dan al final del capítulo.

El consejo directivo de Tarbell Industries está formado por ocho hombres y cuatro mujeres. Se va a seleccionar un comité con cuatro elementos, en forma aleatoria, para recomendar a un nuevo presidente de la empresa.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro integrantes del comité de investigación sean mujeres?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que los cuatro integrantes sean hombres?
3. ¿La suma de las probabilidades para 1 y 2 es igual a 1? Explique su respuesta.

A continuación se presenta otra aplicación de la regla general de multiplicación. Una encuesta aplicada a ejecutivos se enfocó sobre su lealtad a la empresa. Una de las preguntas planteadas fue: "¿Si otra empresa le hiciera una oferta igual o ligeramente mejor a la de su puesto actual, permanecería usted con la empresa o se cambiaría?" Las respuestas de los 200 ejecutivos de la encuesta se clasificaron en forma cruzada con su tiempo de servicio en la empresa (véase la tabla 5-1). Al tipo de tabla que resultó, por lo general se le denomina *tabla de contingencias.*

TABLA 5-1

Lealtad de los ejecutivos y tiempo de servicio en la empresa

	Tiempo de servicio				
Lealtad	*Menos de 1 año*	*1–5 años*	*6–10 años*	*Más de 10 años*	*Total*
Se quedaría	10	30	5	75	120
No se quedaría	25	15	10	30	80
					200

✱ Ejemplo

¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un ejecutivo que es leal a la empresa (se quedaría) y que tiene más de 10 años de servicio?

✔ Solución

Obsérvese que ocurren dos eventos al mismo tiempo: el ejecutivo permanecería en la empresa y tiene más de 10 años de servicio.

1. El evento *A* consiste en un ejecutivo que permanecería con la empresa a pesar de que otra compañía le hiciera una oferta igual o ligeramente mejor. Para encontrar la probabilidad de que suceda el evento *A*, consúltese la tabla 5-1. Se observa que hay 120 ejecutivos de los 200 de la encuesta

que permanecerían con la empresa, de manera que $P(A) = 120/200$, o sea 60.

2. El evento B consiste en un ejecutivo con más de 10 años de servicio en la empresa. De esta forma, $P(B|A)$ es la probabilidad de que un ejecutivo con más de 10 años de servicio permanezca con la empresa a pesar de que otra compañía le haga una oferta igual o ligeramente mejor. Consultando la tabla de contingencia, tabla 5-1, 75 de los 120 ejecutivos que se quedarían tienen más de 10 años de servicio, de manera que $P(B|A) = 75/120$.

Determinando la probabilidad de que un ejecutivo seleccionado al azar sea uno de los que se quedarían con la empresa y con más de 10 años de servicio, y utilizando la regla general de multiplicación:

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{120}{200} \times \frac{75}{120} \\ &= \frac{9\,000}{24\,000} \\ &= 0.375 \end{aligned}$$

AUTOEXAMEN 5-10

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Consulte la tabla 5-1. Utilizando la regla general de multiplicación, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar aleatoriamente un ejecutivo que no permanecería con la empresa y que tenga menos de un año de servicio?

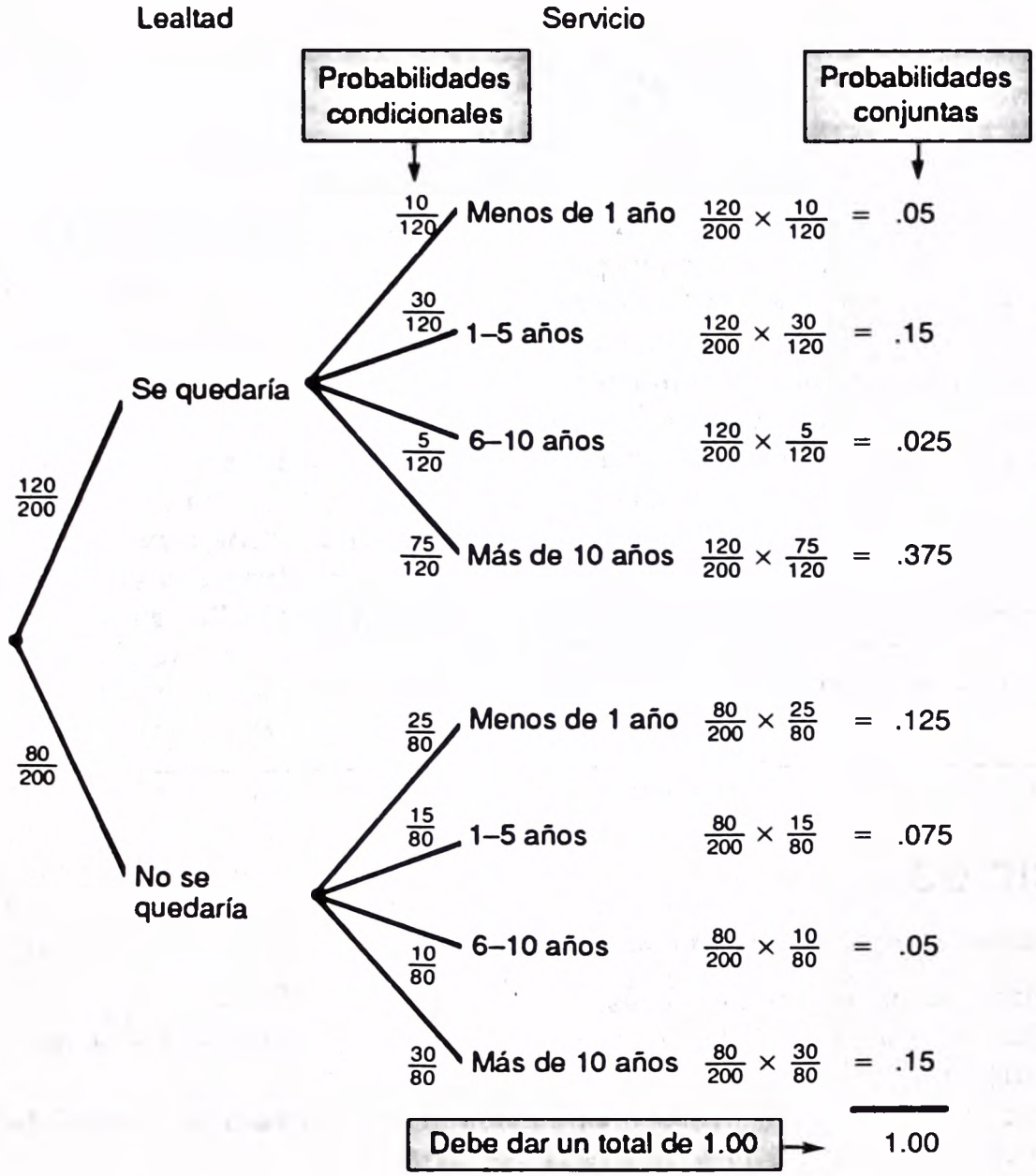
DIAGRAMAS DE ARBOL (O ARBORIGRAMAS)

Un *diagrama de árbol* (o arborigrama) es muy útil para representar probabilidades condicionales y conjuntas. La tabla de contingencia (tabla 5-1) se utiliza para mostrar la elaboración de un diagrama tal.

1. La preparación de un arborigrama se empieza trazando un pequeño círculo a la izquierda, que representa el tronco de un árbol (véase el diagrama 5-1).
2. Para este problema salen dos ramas principales del tronco, la superior representa "se quedarían" y la inferior "no se quedarían". Sus probabilidades se indican en la rama, esto es 120/200 y 80/200. Estas probabilidades son $P(A)$ y $P(\sim A)$.
3. Cuatro ramas más se desprenden de cada rama principal. Estas ramas representan el tiempo de servicio: menos de 1 año, 1–5 años, 6–10 años y más de 10 años. Las probabilidades condicionales 10/120, 30/120, 5/120 etc., están en las ramas adecuadas. Se trata de las probabilidades $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$ y así sucesivamente.

DIAGRAMA 5-1

Diagrama de árbol que indica la lealtad y los años de servicio



4. Por último, las probabilidades conjuntas de que A y B ocurran al mismo tiempo, se muestran al lado derecho. Se trata de $P(A \text{ y } B)$. Por ejemplo, la probabilidad conjunta de seleccionar al azar un ejecutivo que permanecería en la empresa y que tiene menos de un año de servicio es:

$$P(A \text{ y } B) = \frac{120}{200} \times \frac{10}{120}$$

$$= \frac{1\,200}{24\,000}$$

$$= 0.05$$

Debido a que las probabilidades conjuntas representan todas las posibles elecciones (permanecer, 6-10 años de servicio; no permanecer, más de 10 años de servicio; etc.), deben sumar 1.00.

AUTOEXAMEN 5-11

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Refiérase al diagrama de árbol del diagrama 5-1. Explique qué ruta seguiría para encontrar la probabilidad conjunta de seleccionar un ejecutivo al azar, que tenga de 6-10 años de servicio y que no permanecería con la empresa al recibir una oferta igual o ligeramente mejor, de otra compañía.
2. Una muestra aleatoria de los empleados de Hardware Manufacturing Company se seleccionó para determinar sus planes de retiro después de cumplir 65 años. Los seleccionados en la muestra se dividieron en gerencia y producción. Los resultados fueron:

	Planes después de los 65 años		
Empleados	*Se retira*	*No se retira*	*Total*
Gerencia	5	15	20
Producción	30	50	80
			100

a. ¿Cómo se denomina esta tabla?
b. Trace un diagrama de árbol y determine las probabilidades conjuntas.
c. ¿Las probabilidades conjuntas dan un total de 1.00? ¿Por qué?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Se lanza una moneda cuatro veces.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada una de las cuatro tiradas se obtenga como resultado sol?
   b. Utilizando las letras *A, B, C* y *D*, escriba la fórmula para la probabilidad de este resultado.
   c. Suponga que aparecieron cuatro soles al lanzar la moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga sol en la siguiente tirada de la moneda?

10. Tres niños se acercan a una máquina vendedora de goma de mascar, esférica de colores, cada uno dispuesto a gastar 25 centavos. La máquina se acaba de llenar con 50 bolillas negras, 150 blancas, 100 rojas y 100 amarillas, que están totalmente mezcladas.
    a. Susana y Jaime llegan primero a la máquina. Ambos dicen que desean gomas rojas. ¿Cuál es la posibilidad de que obtengan lo que desean?
    b. Susana y Jaime obtuvieron goma roja. Samuel se acerca después a la máquina y dice que no quiere una goma de mascar roja. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga lo que desea?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que Samuel no obtenga lo que desea?

11. Cleanbrush Products envió por accidente a una farmacia tres cepillos eléctricos para dientes, que tienen defectos junto con 17 en buen estado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros dos cepillos vendidos se devuelvan al establecimiento porque están defectuosos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros dos cepillos vendidos no estén defectuosos?

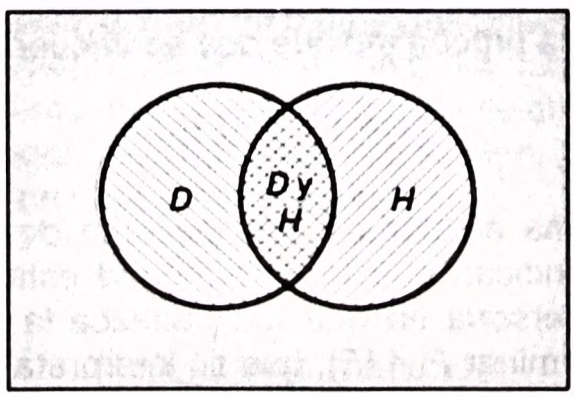
12. Cada vendedor en Stiles-Compton se califica como abajo del promedio, promedio o arriba del promedio, con respecto a su habilidad para las ventas. Además, cada vendedor también se clasifica con respecto a sus posibilidades de promoción: regular, buena o excelente. En la tabla que sigue se presentan las clasificaciones de estos rasgos para los 500 vendedores.

	Posibilidades de promoción		
Habilidad en ventas	*Regular*	*Buena*	*Excelente*
Por abajo del promedio	16	12	22
Promedio	45	60	45
Por arriba del promedio	93	72	135

a. ¿Cómo se denomina esta tabla?
b. Utilizando una de las reglas para combinar probabilidades, ¿cuál es la probabilidad de que un vendedor seleccionado al azar tenga habilidad de ventas por encima del promedio y excelentes posibilidades de promoción?
c. Trace un diagrama de árbol que muestre todas las probabilidades normales, condicionales y conjuntas.

13. En un programa de entrenamiento para la gerencia en Claremont Enterprises, 80% de los asistentes son mujeres y 20% hombres; 90% de las mujeres son egresadas de la universidad y 78% de los hombres, también.
a. Se selecciona al azar una de las personas en entrenamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de una mujer que no asistió a la universidad?
b. Trace un arborigrama que muestre todas las probabilidades normales, condicionales y conjuntas.
c. ¿Las probabilidades conjuntas dan un total de 1.00? ¿Por qué?

14. a. ¿Cómo se denomina a la siguiente representación?
b. ¿Cuál es el nombre del área total que abarca el rectángulo?
c. ¿Los eventos *D* y *H* son mutuamente excluyentes? Explique su respuesta.
d. ¿Cuál es la fórmula para llegar a la probabilidad de que suceda *D* o *H*?



TEOREMA DE BAYES

En el siglo XVIII el reverendo Thomas Bayes, ministro presbiteriano inglés, se planteó esta pregunta: ¿Existe Dios en realidad? Estando interesado en las matemáticas, intentó desarrollar una fórmula para llegar a evaluar la probabilidad de que Dios existe, con base en la evidencia de la que él disponía aquí en la Tierra. Más adelante, Laplace afinó el trabajo de Bayes y le dio el nombre de "teorema de Bayes". En una forma manejable, el **teorema de Bayes** es:

$$\boxed{P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}}$$

(El significado de estas letras se explicará en el ejemplo que sigue.)

Considere el problema que sigue. Suponga que 5% de la población de Umen, país hipotético del Tercer Mundo, padece una enfermedad originaria de ese país. Sea A_1 el evento "Tiene la enfermedad" y A_2 el evento "No tiene la enfermedad". Entonces, sabemos que si seleccionamos una persona de Umen al azar, la probabilidad de que el individuo elegido tenga la enfermedad es 0.05 o bien $P(A_1) = 0.05$. Esta probabilidad, $P(A_1) = P(\text{Tiene la enfermedad}) = 0.05$, se denomina *probabilidad a priori.* Se le da este nombre porque la probabilidad se asigna antes de haber obtenido datos empíricos. Por tanto, la probabilidad a priori de que una persona no padezca la enfermedad es 0.95, o bien, $P(A_2) = 0.95$, que se obtiene al calcular $1 - 0.05$.

Existe una técnica de diagnóstico para detectar la enfermedad, pero no es muy exacta. Sea B el evento "la prueba indica que la enfermedad está presente". Considere que la evidencia histórica muestra que si una persona en realidad padece la enfermedad, la probabilidad de que la prueba indique la presencia del padecimiento es 0.90. Utilizando las definiciones de probabilidad condicional desarrolladas antes en este capítulo, tal afirmación se escribe como:

$$P(B|A_1) = 0.90$$

Considérese que la probabilidad de que una persona en realidad no padezca la enfermedad, pero que la prueba indique que se encuentra presente es 0.15.

$$P(B|A_2) = 0.15$$

Selecciónese en forma aleatoria a una persona de Umen y aplíquesele la prueba. Los resultados indican que la enfermedad está presente. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona en realidad padezca la enfermedad? En forma simbólica, se desea determinar $P(A_1|B)$, que se interpreta como: P(Tiene la enfermedad | Los resultados de prueba son positivos). La probabilidad de $P(A_1|B)$, se

denomina *probabilidad a posteriori* (o *revisada*). Con ayuda del teorema de Bayes, es posible determinar la probabilidad revisada.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}$$

$$= \frac{(0.05)(0.90)}{(0.05)(0.90) + (0.95)(0.15)}$$

$$= \frac{0.0450}{0.1875}$$

$$= 0.24$$

La probabilidad revisada o a posteriori de que una persona tenga la enfermedad, dado que la prueba resultó positiva, es 0.24. ¿Cómo se interpreta este resultado? Si una persona se selecciona al azar de la población, la probabilidad de que padezca la enfermedad es 0.05. Si se aplica la prueba a la persona y resulta positiva, la probabilidad de que en realidad padezca la enfermedad aumenta aproximadamente cinco veces de 0.05 a 0.24.

El problema anterior estaba formado sólo por dos eventos, A_1 y A_2, como probabilidades a priori. Si hay más de dos probabilidades a priori, el denominador del teorema de Bayes necesita términos adicionales. Si la distribución probabilística a priori consiste en n eventos mutuamente excluyentes, el teorema de Bayes queda como sigue.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

en donde A_1 se refiere a cualesquiera de los n posibles resultados.

A continuación se presenta otro ejemplo de uso del teorema de Bayes.

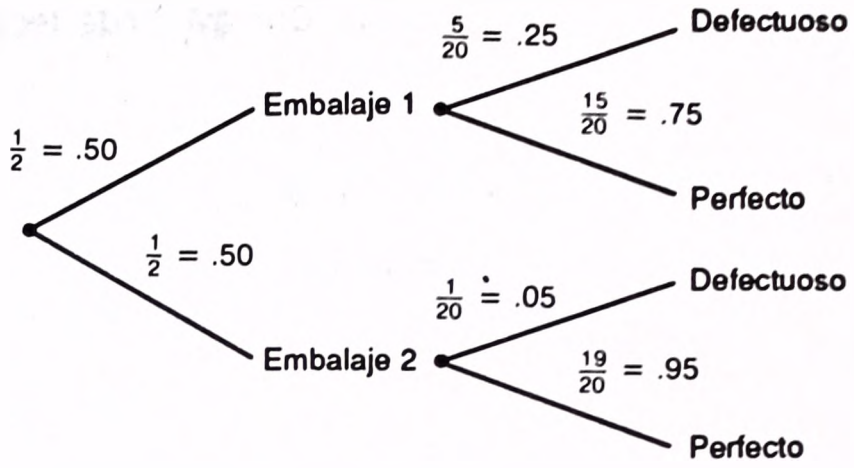
✱ Ejemplo

Para su embarque se han colocado en un embalaje de uso pesado 20 radios transoceánicos. Supóngase que un embalaje designado 1, contiene cinco radios defectuosos. Otro, el número dos, contiene un radio defectuoso.

Se eligió aleatoriamente un embalaje; después se eligió al azar un radio de ese contenedor. Estaba defectuoso. Dada esta información, ¿cuál es la probabilidad de que el radio defectuoso provenga del embalaje 1?

✔ Solución

Las facetas de este problema se muestran primero en un diagrama de árbol.



La fórmula para cálculo del teorema de Bayes se repite a continuación.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)}$$

En este caso B representa un radio defectuoso, A_1 corresponde al embalaje 1, y A_2 corresponde al 2. Las literales de la fórmula se reemplazan por palabras para que los términos se comprendan mejor.

P(embalaje|defectuoso)

$$\frac{P(\text{embalaje 1}) \cdot P(\text{defectuoso}|\text{embalaje1})}{P(\text{embalaje 1}) \cdot P(\text{defectuoso}|\text{embalaje1}) + P(\text{embalaje 2}) \cdot P(\text{defectuoso}|\text{embalaje2})}$$

Para explicar cada uno de los términos:

$P(A_1\|B)$ o bien P(embalaje 1|defectuoso)	Esta es la probabilidad que se va a determinar. Es la probabilidad de que se haya seleccionado el embalaje 1, dado que (|) el radio seleccionado resultó defectuoso.
$P(A_1)$ o bien P(embalaje 1)	Esta es la probabilidad de seleccionar aleatoriamente el embalaje 1. Como sólo hay dos, la probabilidad de seleccionar el número 1 es , o sea 0.50.
$P(A_2)$ o bien P(Embalaje 2)	Esta es la probabilidad de seleccionar el embalaje 2 en forma aleatoria. De nuevo, ya que sólo hay dos contenedores, la probabilidad de seleccionar el número 2 al azar también es 0.50.
$P(B\|A_1)$ o bien P(defectuoso|embalaje 1)	Esta es la probabilidad de seleccionar un radio defectuoso al azar y descubrir que proviene del embalaje 1.
$P(B\|A_2)$ o bien P(defectuoso|embalaje 2)	Esta es la probabilidad de seleccionar un radio defectuoso al azar y descubrir que proviene del embalaje 2.

Sustituyendo los valores adecuados en la fórmula:

$$P(\text{embalaje 1}|\text{defectuoso}) = \frac{(0.50)(0.25)}{(0.50)(0.25) + (0.50)(0.05)}$$

$$= \frac{0.125}{0.125 + 0.025} = \frac{0.125}{0.15}$$

$$= 0.83$$

Para interpretar la solución: si se selecciona aleatoriamente un embalaje, la probabilidad de seleccionar el 1 es 0.50. Sin embargo, hay más artículos defectuosos en el 1 que en el 2. De esta forma, es más probable que si se encuentra un radio defectuoso, provenga del embalaje 1. Se determina que la probabilidad revisada (a posteriori) es 0.83.

AUTOEXAMEN 5-12

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Consúltese el ejemplo y solución anteriores.

1. Designe una fórmula utilizando palabras, para determinar la probabilidad de que un radio transoceánico defectuoso seleccionado al azar provenga del embalaje 2.
2. Calcule la probabilidad utilizando el teorema de Bayes.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

15. Un equipo de beisbol juega 70% de sus partidos por la noche y 30% durante el día. El equipo gana 50% de sus juegos nocturnos y 90% de los diurnos. De acuerdo con el diario del día de hoy, ganó ayer. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se haya desarrollado por la noche?
16. Una profesora ha estado enseñando Estadística durante muchos años. Sabe que 80% de los estudiantes completan los problemas asignados. Determinó que de los alumnos que hacen las tareas, 90% aprobarán el curso. De aquellos estudiantes que no realizan la tarea, 60% aprobarán. Miguel Sánchez tomó Estadística el último semestre con la profesora y tuvo calificación aprobatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que sí haya hecho las tareas?
17. El departamento de crédito de una negociación comercial, informó que 30% de sus ventas son en efectivo, 30% se pagan con cheque en el momento de la adquisición y 40% son a crédito. Se tiene que 20% de las compras en efectivo, 90% en cheques y 60% de las compras a crédito son por más de $50. Tina Septién acaba de comprar un vestido nuevo que cuesta $120. ¿Cuál es la probabilidad de que haya pagado en efectivo?

18. Una empresa tiene cuatro proveedores de materia prima. En la tabla que sigue se muestran las cantidades adquiridas de cada proveedor y el porcentaje de materia prima defectuosa que cada uno proporciona.

Proveedor	*Porcentaje adquirido*	*Porcentaje defectuoso*
Roberts, Inc.	30.0	2.50
Asmus Mfg.	20.0	1.75
Lewis, Ltd.	25.0	3.00
Melvin, Inc.	25.0	1.00

El material empleado esta mañana resultó defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya adquirido de la Compañía B?

ALGUNOS PRINCIPIOS DE CONTEO

Si el número de posibles resultados de un experimento es pequeño, resulta relativamente fácil enlistar y contar todos los eventos posibles. Por ejemplo, hay seis eventos resultantes de la tirada de un dado, que son:

Sin embargo, si existe un gran número de posibles resultados, como podría ser el número de niños y niñas en familias con 10 hijos, resultaría tedioso enlistar y contar todas las posibilidades. Podrían tener sólo niños, un niño y nueve niñas, dos niños y ocho niñas, y así sucesivamente. Para facilitar el conteo, se examinarán tres fórmulas respectivas: 1) la **fórmula de la multiplicación,** 2) la **fórmula de la permutación** y 3) la **fórmula de la combinación.**

Fórmula de la multiplicación

Fórmula de la multiplicación Si hay m formas de hacer una cosa y n formas de hacer otra, hay $m \times n$ formas de realizar ambas.

En términos de una fórmula:

$$\text{Número total de arreglos} = m \times n$$

Esto puede ampliarse a más de dos eventos. Para tres eventos m, n y o:

$$\text{Número total de arreglos} = m \times n \times o$$

* Ejemplo

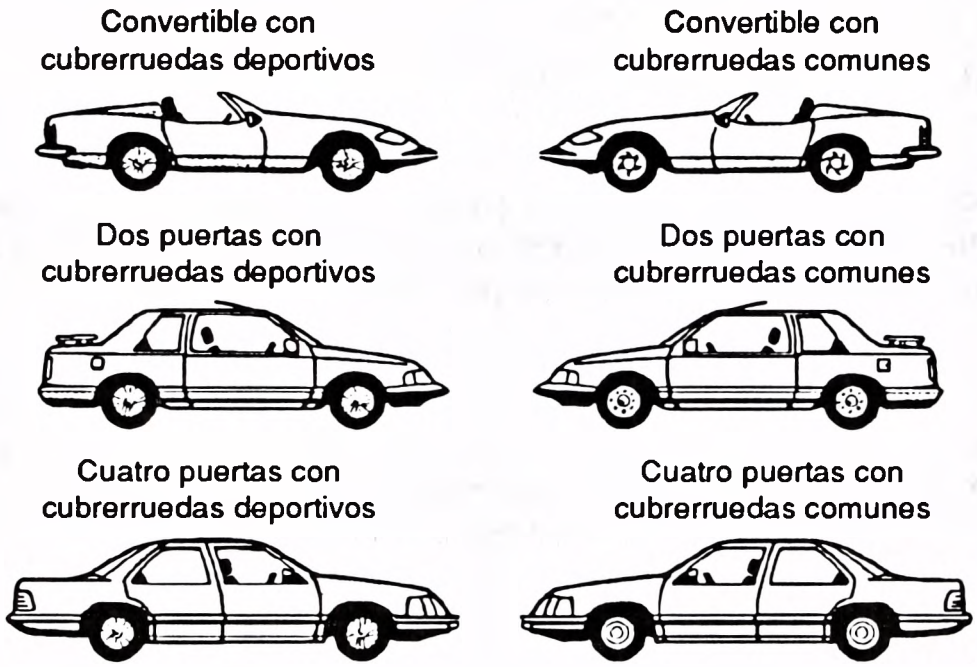
Un establecimiento de venta de automóviles desea anunciar que por $19 999 (dólares) usted puede adquirir un convertible, un dos puertas o un modelo de cuatro

puertas, con elección de cubrerruedas deportivos o comunes. ¿Cuántos arreglos diferentes de modelos y cubrerruedas puede ofrecer el establecimiento?

✔ Solución

Desde luego, el vendedor podría determinar el número total de arreglos representándolos y contándolos. Hay seis.

Por $19 999 (dólares) usted puede elegir entre seis posibilidades. Apresúrese y compre ahora.



Utilizando la fórmula de multiplicación para verificar (m es el número de modelos, n el tipo de cubrerruedas):

$$\begin{aligned} \text{Total posible de arreglos} &= m \times n \\ &= 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

No fue difícil representar y contar todos los posibles arreglos entre modelos de auto y cubrerruedas en este ejemplo. Sin embargo, suponga que el vendedor decidiera ofrecer ocho modelos y seis tipos de cubrerruedas. Resultaría tedioso dibujar y contar todas las posibles alternativas. En vez de esto, puede utilizarse la fórmula de multiplicación. En tal caso $m \times n = 8 \times 6 = 48$ arreglos posibles.

Obsérvese en las aplicaciones precedentes de las fórmulas de multiplicación que había *dos o más grupos.* Por ejemplo, el vendedor de automóviles ofrecía una selección de modelos y una selección de cubrerruedas. Si un constructor ofreciera cuatro distintos estilos de exterior para casa y tres estilos para el interior, la fórmula de multiplicación se utlizaría para determinar cuántos arreglos son posibles.

AUTOEXAMEN 5-13

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Un fabricante desarrolló cinco bases para lámpara y cuatro pantallas que pueden usarse juntas. ¿Cuántos arreglos distintos de base y pantalla pueden ofrecerse?
2. Una industria fabrica tres modelos de receptores estéreo, dos aparatos de casete, cuatro bocinas y tres tornamesas. Cuando los cuatro tipos de componentes compatibles se venden juntos, forman un "sistema". ¿Cuántos sistemas distintos puede ofrecer esta empresa electrónica?

Fórmula de la permutación

Según se observó, la fórmula de multiplicación se aplica para determinar el número de posibles arreglos para dos o más grupos. La **fórmula de permutación** sirve para determinar el número posible de arreglos cuando sólo hay un grupo de objetos. Como ejemplos de este tipo de problema:

1. Un grupo de tres elementos electrónicos se va a ensamblar en una unidad de enchufe para un aparato de televisión. Las partes pueden ensamblarse en cualquier orden. La pregunta relacionada con conteo es: ¿De cuántas formas pueden ensamblarse las tres partes?
2. Un operador de máquina debe realizar cuatro verificaciones de seguridad antes de activar la máquina. Debe oprimir dos botones de manera simultánea, y así sucesivamente. No importa en qué orden realice las verificaciones. ¿De cuántas formas distintas puede realizar las verificaciones el operador?

Un orden para la primera ilustración podría ser: transistores primero, diodos fotoemisores, (LED) en segundo lugar, y el sintetizador en tercero. Al arreglo u ordenación se le denomina **permutación.**

Permutación Disposición en orden de un conjunto de objetos en el que hay un primero, un segundo, un tercero, etc., hasta *n*.

Obsérvese que los arreglos *a, b, c* y *b, a, c* son *distintas* permutaciones. La **fórmula** que se utiliza para contar el número total de permutaciones distintas es:

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

en donde:

P es el número de permutaciones o formas en que pueden ordenarse los objetos.

n es el número total de objetos. En el primer ejemplo, hay tres elementos electrónicos, de manera que $n = 3$.

r es el número de objetos que se van a disponer cada vez. En el problema de las partes electrónicas, todos los objetos se van a ensamblar, de manera que $r = 3$. Si sólo se fueran a insertar en la unidad de enchufe dos de las tres partes electrónicas, r sería 2.

Antes de resolver los dos problemas de ejemplo debe observarse que las permutaciones y combinaciones (que se analizarán en breve) utilizan una notación denominada de factorial. *Factorial* n se escribe $n!$, y significa el producto de $n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots [(n - (n - 1)]$. Por ejemplo, 5! se evaluaría por $5(5 - 1)(5 - 2)(5 - 3)[5 - (5 - 1)]$. Entonces, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Según se muestra a continuación, los números pueden simplificarse cuando se tienen las mismas cifras en numerador y denominador.

$$\frac{6!3!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}(3 \cdot 2 \cdot 1)}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 180$$

Por definición, factorial cero, escrito 0!, es igual a 1. Es decir, $0! = 1$.

✱ Ejemplo

Siguiendo con el grupo de tres elementos electrónicos que deben ensamblarse en cualquier orden, ¿de cuántas formas diferentes pueden reunirse?

✔ Solución

$n = 3$ porque hay tres partes electrónicas que se van a ensamblar; $r = 3$ porque todas las tres partes van a insertarse en la unidad de enchufe. Resolviendo:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!} = \frac{3!}{(3 - 3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 6$$

AUTOEXAMEN 5-14

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. ¿A qué es igual 6!?
2. ¿A qué es igual (6! 2!)/(4! 3!)?
3. Considerando el segundo ejemplo: un operador debe realizar cuatro verificaciones de seguridad antes de activar una máquina. No importa en qué orden se realicen las verificaciones. ¿De cuántas formas diferentes puede realizar las verificaciones el operador?
4. Se van a utilizar 10 números del 0 al 9 para crear grupos de código de cuatro cifras a fin de identificar un artículo de ropa. El código 1083 podría identificar una blusa azul, talla media. El grupo de código 2031 podría identificar unos pantalones, talla 18, etc. No se permiten repeticiones de los números. Es decir, el mismo número no puede utilizarse dos veces (o más) en una secuencia total. Por ejemplo, 2256, 2562 o 5559 no se permitirían. ¿Cuántos grupos distintos de código pueden establecerse?

Puede realizarse una verificación del número de ordenaciones obtenidas utilizando la fórmula de las permutaciones. Para verificar tan sólo determinamos cuántos espacios deben llenarse y las posibilidades para cada espacio. En el problema relacionado con tres partes electrónicas, hay tres lugares en la unidad de enchufe para las tres partes. Existen tres posibilidades para el primer espacio, dos para el segundo (ya se utilizó una) y una para el tercero, como sigue:

$$(3)(2)(1) = 6 \text{ permutaciones}$$

Las seis formas como las tres partes electrónicas, denotadas *A, B, C,* que pueden disponerse son:

ABC	*BAC*	*CAB*
ACB	*BCA*	*CBA*

Veamos otro ejemplo:

✱ Ejemplo

Supóngase que hay ocho máquinas pero sólo tres espacios en el piso del taller en donde se van a instalar las máquinas. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse ocho máquinas en los tres espacios disponibles?

✔ Solución

Hay ocho posibilidades para el primer espacio, siete para el segundo (una ya se utilizó) y seis para el tercer espacio. Entonces:

$$(8)(7)(6) = 336 \text{ permutaciones}$$

Como antes, esto también puede expresarse en forma matemática al decir que el número de permutaciones, *P,* de *n* elementos depende del número de espacios, *r,* disponibles:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{(8)(7)(6)\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336 \text{ permutaciones}$$

AUTOEXAMEN 5-15

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un músico desea escribir una partitura basada solamente en cinco notas (la sostenido, si natural, do bemol, re sostenido y mi bemol). Sin embargo, sólo tres notas de las cinco se utilizarán en sucesión, como do bemol la sostenido y mi bemol. No se permitirán repeticiones como la sostenido, la sostenido y mi bemol.

1. ¿Cuántas permutaciones de las cinco notas, tomadas tres cada vez, son posibles?
2. Utilizando la fórmula para permutaciones, ¿cuántas permutaciones son posibles?

Permutaciones con repetición

En el análisis previo sobre permutaciones no se permitía ninguna repetición. Si se permiten las repeticiones, la fórmula de las permutaciones es:

$$\boxed{{}_nP_r = n^r}$$

Para ilustrar esto, considérese que dos letras, *A* y *B*, se van a tomar dos cada vez. Con repeticiones, como *AA*, existen cuatro posibles permutaciones, que se obtienen por $P = n^r = 2^2$. Las cuatro permutaciones son *AA, AB, BA* y *BB*.

AUTOEXAMEN 5-16

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En el autoexamen 5-15, el músico decidió utilizar cinco notas tomadas tres cada vez. No se permitían repeticiones, como la sostenido, la sostenido y mi bemol. Hay 60 posibles arreglos (permutaciones) de tres notas. Si se permiten las repeticiones, ¿cuántas permutaciones son posibles?

En un breve repaso de las permutaciones, si un conjunto de objetos denotados por *a, b, c, d* y *e* también pueden ordenarse como *a, c, d, e, b;* y si pueden disponerse como *c, a, e, b, d,* y así sucesivamente, entonces hay 120 permutaciones de estos cinco objetos, tomados cinco cada vez, valor que se obtiene por:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-5)!} = 120$$

en donde:

n es el número total de objetos.
r es el número de objetos considerados para cada permutación.

Si sólo dos de los cinco objetos se consideraron (como *a, b; d, a; c, e*) entonces existe un total de 20 posibles permutaciones, lo que se obtiene al calcular

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

Obsérvese que en las permutaciones *el orden como se enlistan los objetos difiere de un arreglo a otro* (esto es, *a, b* es diferente de *b, a* y también *e, a* es distinto de *a, e;* y así sucesivamente). Cada arreglo se cuenta.

Si se permiten repeticiones, como *a, a , a, b, b;* o bien *a, a, b, b, d,* el número de permutaciones puede determinarse con la fórmula ${}_nP_r = n^r$. Para los cinco objetos ($n = 5$), tomados cinco cada vez ($r = 5$), hay 3 125 posibles arreglos, que se obtienen por ${}_nP_r = n^r = 5^5$.

Fórmula de la combinación

Al determinar el número de permutaciones de n objetos diferentes tomados r cada vez, el orden de los objetos es de interés. Por ejemplo, al pintar tres puntos de color en un resistor, el orden podría ser rojo, naranja y azul (lo que podría significar un resistor de 500 ohms). O bien el orden podría ser naranja, azul y rojo (lo cual indica un resistor de 1000 ohms), y así sucesivamente. Existen seis permutaciones de tres colores que se obtienen por:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(3-3)!} = 6$$

Sin embargo, supóngase que se ha decidido que *cualquier combinación* de rojo, naranja y azul se utilizará en un resistor para identificar que se trata de uno de 750 ohms; *el orden no es importante.* En realidad, las distintas formas de ordenar los tres colores no se toman en cuenta; esto es, la combinación rojo, azul y naranja en un resistor se considera igual que naranja, azul y rojo; ambas identifican un resistor de 750 ohms. Esto significa que la combinación de rojo, naranja y azul sólo puede utilizarse una vez con fines de identificación. La **fórmula de la combinación** es:

$$\boxed{_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

✱ Ejemplo

A un departamento de pinturas se le ha solicitado que diseñe códigos de color para 42 elementos distintos. Se van a utilizar tres colores en cada uno, pero una combinación de tres colores utilizados para una parte no puede reordenarse y utilizarse para identificar una parte distinta. Esto significa que si se utilizaran verde, amarillo y violeta para identificar una leva, amarillo, violeta y verde (o cualquier otra combinación de estos tres colores) no podrían utilizarse para identificar un engrane. ¿Serán adecuados siete colores tomados tres cada vez para codificar por color las 42 partes mecánicas?

✔ Solución

Hay 35 combinaciones, que se obtienen al calcular

$$_7C_3 = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Los siete colores tomados tres cada vez (esto es, tres colores para cada parte) no serían adecuados para codificar por color los 42 elementos porque sólo permiten 35 combinaciones. Ocho colores tomados tres cada vez darían 56 combinaciones distintas. Esto sería más que adecuado para codificar por color las 42 partes.

AUTOEXAMEN 5-17

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Verifique las 56 combinaciones mencionadas en el párrafo anterior.
2. Como un plan alternativo para codificar por color las 42 partes, se sugirió que se colocaran sólo dos colores en cada una. ¿Serían adecuados 10 colores para codificar las 42 partes? (De nuevo, una combinación de dos colores sólo podría utilizarse una vez; es decir, si para una parte el código fuera rosa y azul, azul y rosa no podría servir para identificar un elemento distinto).

Resumen sobre la diferencia entre una permutación y una combinación

Para que se trate de una *permutación,* el *orden de los objetos para cada posible resultado es diferente.* Considerando tres objetos *a, b, c,* la ordenación *a, b, c* corresponde a una permutación; *b, a, c* es otra; *c, a, b* es otra más; y así sucesivamente. Existen seis posibles arreglos de estos tres objetos tomados tres cada vez. Utilizando la fórmula de la permutación:

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6 $$

Si no importa el orden de los objetos, al número total de ordenaciones se le denomina *combinación.* Por ejemplo, si los ejecutivos Abel, Báez y Campos se van a elegir como un comité para negociar una fusión de empresas, sólo existe una posible combinación de ellos: el comité formado por Abel, Báez y Campos es el mismo que el constituido por Báez, Campos y Abel. Utilizando la fórmula de combinación:

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1(1)} = 1 $$

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

19. La Reynolds Construction Company ha acordado no construir casas totalmente iguales en un nuevo fraccionamiento. Se ofrecen cinco diseños exteriores a los posibles compradores. El constructor ha estandarizado tres diseños interiores que pueden incorporarse a cualquiera de los cinco exteriores. ¿De cuántas formas diferentes pueden ofrecerse los diseños exteriores e interiores a los posibles compradores de casas?
20. Se van a utilizar seis colores básicos para decorar un nuevo condominio. Deben aplicarse a una unidad en grupos de cuatro colores. Una unidad podría tener dorado como color principal, azul como color complementario, rojo como color de contraste y toques de blanco. Otra unidad podría tener azul como color principal, blanco como color complementario, dorado como color de contraste y toques de rojo.

a. Si no se permiten repeticiones (como dorado, dorado, dorado y blanco), ¿cuántas unidades pueden decorarse en forma distinta?
b. SI se permiten repeticiones, ¿cuántas unidades pueden decorarse en forma diferente? (Desde luego, éste no sería un buen sistema).

21. Una tejedora de alfombras ha decidido utilizar siete colores compatibles en su nueva línea de productos. Sin embargo, al tejer una alfombra, sólo pueden utilizarse cinco husos. En su publicidad desea indicar el número de distintos grupos de colores que están a la venta. ¿Cuántos grupos de colores utilizando los siete disponibles, tomados cinco cada vez, puede ofrecer? (En esto se considera que cinco colores distintos irán en cada alfombra; es decir, no hay repeticiones de color.)
22. Se está considerando la posibilidad de formar un torneo de futbol americano de los Super Diez. Los 10 principales equipos de futbol de Estados Unidos, con base en registros pasados, serían integrantes de la Conferencia de los Super Diez. Cada equipo jugaría con cada uno de los otros en el torneo durante la temporada. El equipo que ganara más partidos sería declarado campeón nacional. ¿Cuántos partidos tendría que programar cada año el dirigente del torneo? (Recuerde que Oklahoma contra Michigan es lo mismo que Michigan contra Oklahoma.)

RESUMEN

Una *probabilidad* se expresa como un número e indica la posibilidad de que suceda un evento específico. La mayor probabilidad, 1, significa que es seguro que el evento ocurra, y 0.00 significa que no ocurrirá. Una probabilidad 0.90 de lluvia indica que la posibilidad de que suceda el evento (lluvia) es muy elevada. Por otra parte, una probabilidad de 0.02 indica que la posibilidad de que el evento ocurra es casi nula.

Se analizaron tres puntos de vista sobre la probabilidad, que son el *clásico* (objetivo), el de *frecuencia relativa* (histórico) y el *subjetivo*. El punto de vista clásico se basa en la consideración de que los resultados de un experimento son igualmente posibles. El punto de vista de frecuencia relativa sobre la probabilidad se basa en la experiencia. El punto de vista subjetivo o personal se funda en cualquier información disponible, juicio subjetivo, corazonadas, etc.

Se presentaron reglas para combinar probabilidades: *reglas de adición y multiplicación.*

El investigador Thomas Bayes desarrolló un teorema para determinar la probabilidad de que ocurra un evento A dado que ha ocurrido un evento B.

Las fórmulas de la *multiplicación,* la *permutación* y la *combinación* facilitan el conteo del número total de disposiciones.

Recapitulación

I. Existen dos métodos para combinar eventos: las reglas de adición y las reglas de multiplicación.

   A. La *regla especial de adición* indica que si hay dos eventos mutuamente excluyentes denotados A y B, entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$. Para aplicar la regla, deben cumplirse dos condiciones: *a*) debe suceder uno de dos resultados, *b*) los eventos deben ser mutuamente excluyentes. Si hay tres eventos la fórmula se escribe $P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

B. La regla general de adición indica que si los eventos no son mutuamente excluyentes, $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$, en donde $P(A \text{ y } B)$ se denomina *probabilidad conjunta* y por lo general se considera un *evento compuesto*. Existe una posibilidad de que lleguen a suceder tanto el evento A como el B.

C. La regla especial de multiplicación se escribe $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$. Esta regla exige independencia, lo cual significa que el resultado de un evento de ninguna forma afecta al resultado de otro evento.

D. La regla general de multiplicación es aplicable cuando las probabilidades no son independientes, lo cual significa que el resultado de un evento es condicional al resultado de otro. Para dos eventos la regla se escribe como $P(A \text{ y } B) = P(A)$ $P(B|A)$

II. El teorema de Bayes es un método para revisar probabilidades con base en información nueva o adicional.

A. Una probabilidad a priori indica la probabilidad evaluada antes de contar con información adicional.

B. La probabilidad revisada o a posteriori se calcula después de que se ha incorporado la información adicional o nueva.

C. La fórmula para el teorema de Bayes es:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

III. Existen tres métodos para contar posibles eventos.

A. La regla de multiplicación indica que si hay m formas de hacer una cosa y n formas de hacer otra, entonces existen $m \cdot n$ formas de realizar ambas.

B. Para determinar el número de permutaciones, se cuenta cada arreglo distinto de un grupo de objetos. Si no se permiten repeticiones, la fórmula de permutación es

$${}_nP_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

en donde:

P es el número de permutaciones o formas como pueden disponerse los objetos.
n es el número total de objetos.
r es el número de objetos que se van a usar cada vez.

Si se permiten repeticiones como a, a, entonces el número de permutaciones se determina calculando ${}_nP_r = n^r$.

C. Si no importa la forma como se disponen r objetos, entonces el número de arreglos se denomina combinación.

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

23. El departamento de investigación de mercado de Vernors planea realizar una encuesta a adolescentes en lo referente a sus reacciones ante una nueva bebida de reciente elaboración. Se les pedirá compararla con su refresco favorito.

a. ¿Cuál es el experimento?
b. ¿Cuál es un posible evento?

24. El número de veces que ocurrió un evento en el pasado se divide entre el número total de ocurrencias. ¿Cómo se denomina a este enfoque de probabilidad?
25. La probabilidad de que la causa y la cura del cáncer se descubran antes del año 2000 es 0.02. ¿Qué punto de vista sobre la probabilidad se ilustra con esta afirmación?
26. Si es verdad que no existe ninguna posibilidad de que una persona se recupere de heridas causadas por 50 proyectiles, ¿la probabilidad asignada a este evento es –1.00?
27. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que caiga un as o un dos o un seis?

Los ejercicios 28–32 se basan en un estudio de los donativos semanales recolectados en una iglesia.

Donativo en sobre	*Número*
$ 0 hasta $ 5	200
5 hasta 10	100
10 hasta 20	75
20 hasta 50	75
50 o más	50
Total	500

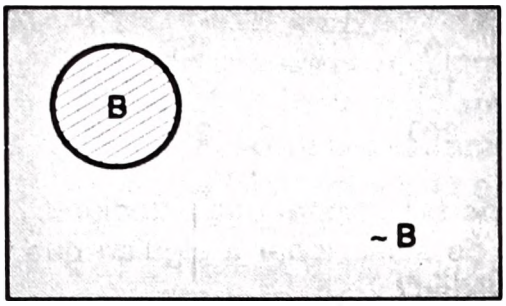
28. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un sobre al azar y descubrir que contiene $50 (dólares) o más?
29. ¿Las clases $0 a $5, $5 a $10, etc., pueden considerarse como mutuamente excluyentes? ¿Por qué sí o por qué no?
30. Si las probabilidades asociadas con cada clase se totalizaran, ¿cuál sería el total?
31. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un sobre al azar y descubrir que contiene hasta $10 (dólares)?
32. ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de $50 en un sobre elegido al azar?
33. Defina cada uno de los siguientes términos:
    a. probabilidad condicional
    b. evento
    c. probabilidad conjunta

34. La primera carta seleccionada de una baraja americana de 52 naipes fue un rey.
    a. Si se devuelve a la baraja completa, ¿cuál es la probabilidad de que se seleccione un rey en la segunda toma?
    b. Si no se repone la carta del rey, ¿cuál es la probabilidad de que se seleccione un rey en la segunda toma?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga en la primera toma un rey y otro en la segunda (considerando que el primer rey no se repuso)?

Los ejercicios 35–37 se basan en lo siguiente: Armco, un fabricante de sistemas de semáforos, determinó que bajo pruebas aceleradas de duración, 95% de un sistema de reciente desarrollo duraba tres años, antes de empezar a fallar en el cambio adecuado de las señales.

35. Si una ciudad adquirió cuatro de estos sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro operen adecuadamente por lo menos tres años?
36. ¿Qué regla de probabilidad ilustra esto?
37. Utilizando letras para representar los cuatro sistemas, formule una ecuación que muestre la forma como obtuvo la respuesta al ejercicio 35.

Los ejercicios 38-41 se basan en el diagrama que siguen



38. ¿Cómo se denomina a tal representación?
39. ¿Cómo se designa al área total?
40. ¿Qué regla de probabilidad se ilustra?
41. *B* representa el evento de elegir una familia que recibe pagos de seguro social. ¿A qué es igual $P(B) + P(\sim B)$?
42. De cada 100 trabajadores en Kiddie Carts, 57 son de producción (denotados *A*), 40 son supervisores (denotados *B*), 2 son secretarias (denotados *C*) y 1 pertenece a la gerencia media o superior (denotado *D*). Si se selecciona un empleado al azar, ¿a qué es igual $P(A \text{ o } B \text{ o } C)$?
43. En una tarjeta perforable hay 50 cuadrados numerados 1, 2, 3, . . . , 50. Se anunció que hay tres números ganadores en la tarjeta.
    a. Utilizando letras, diseñe una fórmula para indicar cómo evaluar la probabilidad de que se halle un número ganador tanto en la primera como en la segunda perforaciones de la tarjeta.
    b. Calcule la probabilidad.
44. Harvey Kuenn jugó beisbol en la liga mayor de 1954 hasta 1966. Durante ese tiempo su "promedio" (índice) de bateo fue 0.308. En un juego específico bateó tres veces.
    a. ¿Cual es la probabilidad de que obtuviera tres hits?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya obtenido ningún hit en el juego?
45. La probabilidad de que un avión B-52 dé en el blanco en una operación de bombardeo es 0.80. Si se envían cuatro aviones al mismo blanco, ¿cuál es la probabilidad de que todos den en el blanco? ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los bombarderos dé en el blanco?
46. Este año se graduarán 90 estudiantes de una escuela. Cincuenta planean asistir a la universidad. Se seleccionan dos estudiantes al azar para que lleven la bandera durante la graduación. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos seleccionados para eso tengan planes para asistir a la universidad?
47. El consejo directivo de Saner Automatic Door Company está formado por 12 integrantes, 3 de los cuales son mujeres. Se va a redactar un nuevo manual de políticas y procedimientos para la empresa. Debe seleccionarse un comité de 3 en forma aleatoria entre el Consejo, para que escriban el manual.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los integrantes del comité sean hombres?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 elemento del comité sea mujer?

Los ejercicios 48 a 52 se basan en lo que sigue: una encuesta de estudiantes de licenciatura en una universidad reveló lo siguiente en lo que se refiere al sexo y área principal de interés de los estudiantes:

	Area principal de interés			
Sexo	*Contabilidad*	*Administración*	*Finanzas*	*Total*
Hombres	100	150	50	300
Mujeres	100	50	50	200
Total	200	200	100	500

48. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una estudiante?
49. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a alguien que tenga como área principal de interés finanzas o contabilidad?
50. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una estudiante o alguien con área principal de interés en contabilidad? ¿Qué regla de adición aplicó?
51. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar alguien cuya área de principal interés sea contabilidad, dado que la persona seleccionada es de sexo masculino?
52. Suponga que se seleccionan dos estudiantes al azar para asistir a un almuerzo con el presidente de la universidad. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos seleccionados tengan como área de principal interés la contabilidad?

Los ejercicios 53 a 57 se basan en los siguientes datos de delincuencia. El comisario de policía de Wood County clasifica los delitos por edad (en años) del delincuente y si el delito es con violencia o no. Según se muestra a continuación, al comisario se le informó de un total de 150 delitos durante el último año.

	Edad (en años)			
Tipo de delito	*Menos de 20*	*20 a 40*	*40 o más*	*Total*
Con violencia	27	41	14	82
Sin violencia	12	34	22	68
Total	39	75	36	150

53. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un caso para analizarlo y descubrir que se trató de un delito con violencia?
54. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un caso para analizarlo y descubrir que el delito lo cometió alguien de menos de 40 años de edad?
55. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un caso relacionado con un delito violento o un delincuente de menos de 20 años de edad? ¿Qué regla de adición aplicó?
56. Dado que se selecciona para análisis un delito con violencia, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya cometido una persona de menos de 20 años?
57. Un juez seleccionó dos casos para revisarlos. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean con violencia?

Los ejercicios 58 a 60 se basan en lo siguiente: El señor. y la señora Wilhelms están retirados ambos y viven en una comunidad de personas jubiladas en Arizona. Suponga que la probabilidad de que un hombre retirado viva durante otros 10 años es 0.60. La probabilidad de que una mujer retirada viva otros 10 años es 0.70.

58. ¿Cuál es la probabilidad de que tanto el señor como la señora Wilhelms vivan dentro de 10 años?
59. ¿Cuál es la probabilidad de que dentro de 10 años el Sr. Wilhelms no viva y la Sra. Wilhelms sí?
60. ¿Cuál es la probabilidad de que dentro de 10 años al menos uno de los dos viva?

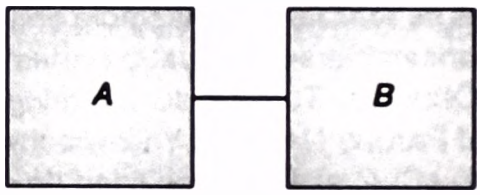
61. Flashner Marketing Research, Inc. se especializa en proporcionar evaluaciones de las posibilidades de productos para tiendas de artículos femeninos en centros comerciales. Al Flashner, el director, informa que evalúa las posibilidades como buenas, regulares o malas. Los registros de evaluaciones anteriores muestran que de 60% de las posibilidades se clasificaron como buenas, 30% como regulares y 10% como malas. De las clasificadas como buenas, 80% dieron utilidades durante el primer año; de las clasificadas como regulares, 60% dieron utilidades el primer año; y de las clasificadas como malas, 20% arrojaron beneficios durante el primer año. Connie's Apparel fue uno de los clientes de Flashner, el cual tuvo ganancias durante el año pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que se le haya dado una clasificación inicial de mala?
62. Una prueba contiene cinco preguntas de opción múltiple. Cada pregunta tiene cuatro respuestas, marcadas *a, b, c, d*. Sólo una respuesta es correcta. ¿Cuál es la probabilidad de contestar correctamente todas las cinco preguntas, si la persona que está contestando el examen no sabe nada acerca del tema y sólo adivinó las respuestas?
63. Se va a programar un torneo de ajedrez para los 10 integrantes de un club. (El torneo es del tipo round-robin en el que cada integrante jugará con cada uno de los demás). ¿Cuántos partidos se deben programar? (Desde luego, si Sánchez juega contra Pérez, es lo mismo que si Pérez juega contra Sánchez.)
64. Un nuevo trabajo consiste en ensamblar cuatro partes diferentes. Las cuatro tienen distintos códigos de color y pueden ensamblarse en cualquier orden. El departamento de producción desea determinar la forma más eficiente de ensamblar los cuatro elementos. Los supervisores realizarán algunos experimentos para resolver el problema. Primero, planean ensamblar las partes en este orden: verde, negro, amarillo y azul, y registrar el tiempo. Después se realizará el ensamble en un orden distinto. ¿De cuántas formas diferentes pueden ensamblarse las cuatro partes?
65. Un estudio realizado por la Oficina de Turismo de Wyoming reveló que 60% de los turistas que visitan el estado van al Parque Nacional Yellowstone, 40% visitan Jackson Hole y 30% visitan ambos lugares. ¿Cuál es la probabilidad de que un turista específico visite al menos uno de los sitios?
66. Se recibieron dos cajas de camisas para hombre, provenientes de la fábrica. La caja 1 contenía 25 camisas deportivas y 15 camisas de vestir. La caja 2 contenía 30 camisas deportivas y 10 camisas de vestir. Se seleccionó al azar una de las cajas y se eligió aleatoriamente una camisa de esa caja para inspeccionarla. La camisa era deportiva. Dada esta información, ¿cuál es la probabilidad de que la caja de la que proviene la camisa deportiva sea la 1?
67. En relación al ejercicio 66. ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa deportiva provenga de la caja 2?
68. En relación al ejercicio 66. Suponga que la camisa seleccionada de la caja fue una camisa de vestir (en vez de una deportiva). ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa de vestir provenga de la caja 1?
69. En relación ejercicio 66. Suponga que la camisa seleccionada al azar de la caja fue una camisa de vestir (en vez de una camisa deportiva). ¿Cuál es la probabilidad de que la camisa de vestir provenga de la caja 2?
70. Los servidores de un restaurante anuncian que tienen un gran número de selecciones. Ofrecen 4 sopas, 3 ensaladas, 12 entradas, 6 platillos de legumbres y 5 postres. ¿Cuántos servicios distintos ofrece? En el restaurante tienen una oferta especial para "listos". Se puede omitir cualquier parte de un servicio, excepto las entradas, y pagar un precio reducido. ¿Cuántos distintos servicios tienen para esos clientes?

71. Un establecimiento anunció que tiene 256 distintas formas de preparar una hamburguesa. Usted puede elegir, u omitir, cualquier combinación de lo que sigue para su hamburguesa: mostaza, salsa de tomate, cebolla, pepinillos, tomate en rebanadas, aderezo, mayonesa y lechuga. ¿Es verdadero el anuncio?

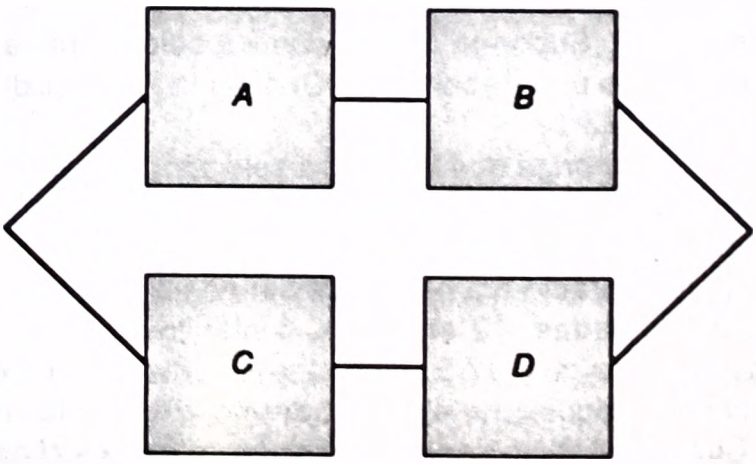
APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Betts Electronic, Inc. adquiere cinescopios para televisores de cuatro proveedores. Tyson Wholesale proporciona 20% de los cinescopios; Fuji Importers, 30%; Kirkpatricks, 25%; y Parts, Inc., 25%. Tyson Wholesale tiende a dar la mejor calidad ya que sólo 3% de sus productos llegan defectuosos. Los de Fuji Importers tienen 4% de defectuosos, Kirkpatricks, 7%, y Parts, Inc., 6.5% defectuosos.
   a. ¿Cuál es el porcentaje general (promedio) de defectuosos?
   b. En el último envío se descubrió un cinescopio defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya enviado Tyson Wholesale?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo defectuoso provenga de Fuji Importers? ¿De Kirkpatricks? ¿De Parts, Inc.?

2. En el diagrama que sigue se representa un sistema de dos componentes, *A* y *B*, que están en serie. (Estar en serie significa que para que el sistema opere, deben funcionar tanto el componente *A* como el *B*). Suponga que la probabilidad de que *A* funcione es 0.90. y de que *B* lo haga es también 0.90. Considere que estos dos componentes son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema opere?



3. Refiérase al problema anterior. En el diagrama que sigue se representa un sistema con dos subsistemas en paralelo, *A-B* y *C-D*. Si uno de los subsistemas falla, el otro entra en funcionamiento. De esta forma, el sistema falla sólo si ambos subsistemas no funcionan. Si *C* es equivalente a *A*, y *D* lo es a *B*, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione? Considere que los dos subsistemas son independientes. Utilizando una probabilidad de 0.95, ¿cuántos subsistemas se necesitan para asegurar que el sistema opere?



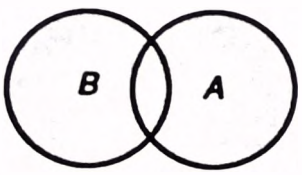
4. Un acertijo en un diario presenta un problema de pareamiento. Los nombres de 10 presidentes de Estados Unidos se enlistan en una columna y sus vicepresidentes se enlistan aleatoriamente en la segunda columna. El acertijo pide al lector que asocie cada presidente con su vicepresidente. Si se realizan las asociaciones al azar, ¿cuántas asociaciones son posibles? ¿Cuál es la probabilidad de que las 10 asociaciones sean correctas?
5. Para reducir los robos, en una compañía se hace pasar a todos los empleados una prueba con un detector de mentiras que se sabe tiene una corrección de 90% de las veces (tanto para sujetos culpables como inocentes), el director decide despedir a todos los empleados que fallen en la prueba. Suponga que 5% de los empleados son culpables de robo.
   a. ¿Qué proporción de los trabajadores se despide?
   b. De los trabajadores despedidos, ¿qué proporción son culpables en realidad?
   c. De los trabajadores no despedidos, ¿qué proporción son culpables.
   d. ¿Qué piensa usted de la política del director?

EXAMEN CAPITULO 5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para las preguntas 1–7 indique si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, corríjalo.

1. Se tiran al aire dos monedas. A la tirada de las monedas se le denomina experimento y un posible evento es que caiga sol.
2. Los resultados deben ser igualmente probables para que pueda utilizar el enfoque probabilístico de frecuencia relativa.
3. La regla de complemento indica que la probabilidad de que un evento no ocurra es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra.
4. El enfoque clásico a la probabilidad se basa en el grado de creencia y corazonada de una persona acerca de que ocurra un evento específico.
5. Si dos eventos son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.
6. Hay cinco lugares vacíos para estacionamiento. Cinco automóviles llegan al mismo tiempo. Existen 25 formas distintas como pueden estacionarse.
7. En el siguiente diagrama de Venn se muestra que los eventos son mutuamente excluyentes.



Las preguntas 8–11 se basan en la tabulación que sigue sobre el estatus de los empleados de una empresa. Indique si los enunciados son verdaderos o falsos. Si son falsos, corríjalos.

Estatus	*Hombre*	*Mujer*	*Total*
Ejecutivos	80	20	100
Supervisores	100	300	400
De producción	150	250	400
De oficina	40	60	100
Total	370	630	1 000

8. La probabilidad de seleccionar al azar una ejecutiva es 20.0
9. La probabilidad de seleccionar un supervisor o una mujer es aproximadamente 0.716.
10. La probabilidad de seleccionar un supervisor dado que se seleccionó una empleada es 0.476.
11. La probabilidad de seleccionar un empleado de oficina es 0.10.

Las preguntas 12 y 13 se basan en el problema que sigue. Un operador de máquina debe cortar un disco muy delgado del tamaño de una moneda. Un lado del disco es liso, pero el operario hace una ranura del otro lado. Los discos se envuelven de inmediato para su embarque. El operario de pronto se da cuenta de que no hizo la ranura en uno de los últimos cuatro discos pero no puede recordar en cuál.

12. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las cuatro piezas seleccionada al azar (por ejemplo la del extremo derecho) sea defectuosa? ¿Cómo se denomina a esta probabilidad?
13. Como experimento, el operador desenvolvió el disco del extremo derecho y lo tiró al aire. Si cae con la ranura hacia arriba, él sabrá que no es el disco defectuoso. Sin embargo, si el disco cae con la cara lisa, el operario no estará seguro de si ese disco está defectuoso o no. El disco cayó con la cara lisa hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el disco defectuoso? ¿Cómo se denomina a esta probabilidad?
14. Un banco tiene dos computadoras. La probabilidad de que la más nueva deje de operar en cualquier mes específico es 0.05. La probabilidad de que la de más tiempo deje de operar también en algún mes específico es 0.10. Considerando que estos eventos son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que las dos computadoras dejen de funcionar durante el mismo mes?
15. El departamento de embarques acaba de recibir 20 perdidos. A un empleado se le darán 8 pedidos para que los surta. ¿Cuántos distintos grupos de 8 pedidos podrían darse al empleado para que los surta?
16. Una empresa vendedora de motocicletas Swatzi está promoviendo dos de las mejores al ofrecer al comprador una de tres opciones gratuitas. ¿De cuántas formas diferentes pueden disponerse las dos motocicletas y las tres opciones?

Autoexámenes

5-1 1. a. Prueba del nuevo juego de computadora.
b. A 73 jugadores les agradó el juego.
2. a. No. La probabilidad no puede ser mayor de 1. La probabilidad de que el juego, al lanzarse al mercado, tenga éxito es 65/80, o 0.8125.
b. No puede ser menos de 0. Tal vez hubo un error con los cálculos.

5-2 1. $\frac{1}{4} = 0.25$
2. a. $\frac{\text{13 espadas en total}}{\text{52 cartas totales}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25.$
b. $\frac{\text{1 sota de corazones en total}}{\text{52 cartas totales}} = \frac{1}{52} = 0.0192.$
c. $\frac{\text{4 reinas en total}}{\text{52 cartas totales}} = \frac{4}{52} = 0.0769.$
3. Clásico.

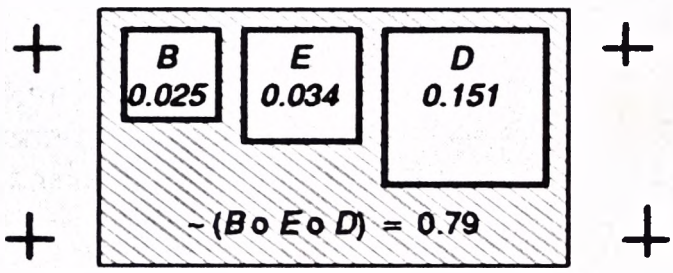
5-3 1. $\frac{24}{883} = 0.027.$
2. $\frac{182}{883} = 0.206.$

5-4 1. El autor cree que la posibilidad de que el índice Dow Jones suba a 3 000 es 0.25. Usted puede ser más o menos optimista.
2. 0.90 si usted ha estado buscando un automóvil nuevo o, por ejemplo, 0.01 si no tiene intención de comprar o cambiar.

5-5 1. 0.025, que se obtiene por 50/2 000.
2. 0.034, que se evalúa con 68/2 000.
3. 0.059, que se obtiene por $P(B \text{ o } E) = 0.025 + 0.034$.
4. La regla especial de adición.
5. 1.
6.

A	*B*	*C*	*D*	*E*

5-6 Para 1, 2, 3 y 4, el diagrama de Venn podría ser así:

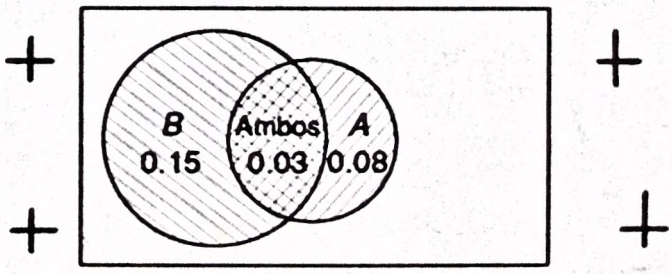


Se obtuvo 0.79 al calcular 1 − (0.025 + 0.034 + 0.151).

5-7 1. La necesidad de zapatos especiales es el evento *A*. La necesidad de un arreglo dental es *B*.

$$\begin{aligned} P(A \text{ o } B) &= P(A) + P(B) \\ &= - P(A \text{ y } B) \\ &= 0.08 + 0.15 - 0.03 \\ &= 0.20 \end{aligned}$$

2. Una posibilidad es:



5-8 1. (0.80)(0.80)(0.80)(0.80) = 0.4096.
2. a. 0.0000156, que se obtiene por 0.025 × 0.025 × 0.025.

b. La probabilidad de seleccionar tres bolsas y encontrar que a todas les falta peso es muy remota.

5-9 1. 0.002, que se obtiene por:

$$\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{24}{11\ 880} = 0.002$$

2. 0.14, que se obtiene por:

$$\frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{1\ 680}{11\ 880} = 0.1414$$

3. No, porque existen otras posibilidades, como tres mujeres y un hombre.

5-10

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{80}{200} \times \frac{25}{80} \\ &= 0.125 \end{aligned}$$

5-11 1. Salir del tronco en la rama inferior, "no se quedaría". La probabilidad de ese evento es 80/200. Siguiendo la misma ruta, se encuentra la rama con la etiqueta "6–10 años". La probabilidad condicional es 10/80. Para obtener la probabilidad conjunta:

$$\begin{aligned} P(A \text{ y } B) &= \frac{80}{200} \times \frac{10}{80} \\ &= \frac{800}{16\ 000} \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

2. a. Tabla de contingencias
b.

c. Si, se incluyen todas las posibilidades.

5-12 1. P(Embalaje 2|defectuoso) =

$$\frac{P(\text{embalaje 2}) \cdot P(\text{defectuoso}|\text{embalaje 2})}{P(\text{embalaje 2}) \cdot P(\text{defectuoso}|\text{embalaje 2}) + P(\text{embalaje 1}) \cdot P(\text{defectuoso}|\text{embalaje 1})}$$

2.
$$= \frac{(0.50)(0.05)}{(0.50)(0.05) + (0.50)(0.25)}$$
$$= 0.17$$

5-13 1. Hay 20, que resulta de 5 × 4.
2. Hay 72, que se obtiene por 3 × 2 × 4 × 3.

5-14 1. 720, que se obtiene al calcular 6 × 5 x 4 x 3 x 2 x 1.
2. 10, que resulta de:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1(2 \cdot 1)}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}(3 \cdot \cancel{2 \cdot 1})}$$

3. 24, que se obtiene al calcular:

$$\frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!}$$
$$= \frac{4!}{1}$$
$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1}$$

4. 5 040, que se evalúa por:

$$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$
$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

5-15 1. 60, que resulta de (5)(4)(3).
2. 60, que se obtiene al calcular:

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}}$$

5-16 125, que se obtiene calculando ${}_nP_r = n^r = 5^3$.

5-17 1. 56 es correcto, obtenido por:

$${}_8C_3 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$= \frac{8!}{3!(8-3)!}$$
$$= \frac{8!}{3!5!}$$
$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{5!}}$$
$$= 56$$

2. Sí. Hay 45 combinaciones, que se obtienen por medio de:

$${}_{10}C_2 = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$= \frac{10!}{2!(10-2)!}$$
$$= \frac{10!}{2!8!}$$
$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{8!}}$$
$$= 45$$

Examen capítulo 5

1. Verdadero.
2. Falso. Los resultados son igualmente posibles en el enfoque clásico.
3. Verdadero.
4. Falso. Esta es la definición del enfoque subjetivo.
5. Verdadero.
6. Falso. Hay 120, que se obtiene por 5!/0!.
7. Falso. Los eventos no son mutuamente excluyentes. Es decir, no hay eventos que se traslapen, superpongan.
8. Falso. Es 0.020, que se obtiene al calcular 20/1 000.
9. Falso. Es aproximadamente 0.730, que resulta de

$$P(S \text{ o } F) = P(S) + P(F) - P(S \text{ y } F)$$
$$= \frac{400}{1\,000} + \frac{630}{1\,000} - \frac{300}{1\,000} = 0.730$$

10. Verdadero.
11. Verdadero.
12. 0.25. Probabilidad a priori.
13. 0.40, que resulta de aplicar el teorema de Bayes:

$$\frac{(0.25)(1.00)}{0.25(1.00) + 0.75(0.50)}$$

Al valor 0.40 se le denomina probabilidad a posteriori.

14. 0.005, que se obtiene por $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) = (0.05)(0.10)$.
15. 125 970, que se obtiene por 20!/8!(20 − 8)!.
16. 6, que se obtiene por 2 × 3.

6

Distribuciones probabilísticas discretas

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Definir una distribución de probabilidad o probabilística.
2. Distinguir entre una distribución probabilística discreta y una distribución probabilística continua.
3. Calcular la media, la variancia y la desviación estándar de una distribución de probabilidad.
4. Elaborar una distribución binomial, una distribución hipergeométrica y una distribución de Poisson.
5. Determinar qué distribución probabilística emplear en una situación dada.

Los capítulos del 2 al 4 se dedicaron a la **Estadística descriptiva.** Se describieron datos originales organizándolos en una distribución de frecuencias y representando gráficamente la distribución. También se calcularon promedios como media aritmética, mediana y moda, para especificar un valor representativo cercano al centro de la distribución. Se utilizaron la amplitud total y la desviación estándar para describir la dispersión de los datos. Por tanto, estos capítulos se centraron en la descripción de *algo que ya había sucedido.*

A partir del capítulo 5, el punto de interés cambió: se inició examinando *algo que tal vez sucedería.* Observamos que esta faceta de la Estadística se denomina *inferencia estadística.* El objetivo es realizar inferencias o deducciones (enunciados) con respecto a una población basándose en un pequeño número —llamado muestra— seleccionado de la población. En el capítulo 5, se indicó que una probabilidad es un valor entre 0 y 1 inclusive, y se examinó la forma como pueden combinarse las probabilidades utilizando las reglas de adición y multiplicación.

En este capítulo se iniciará el estudio de distribuciones de probabilidades. Una distribución probabilística da toda la gama de valores que pueden ocurrir con base en un experimento. En este capítulo se considera la *distribución discreta,* en donde el resultado de un experimento puede tomar sólo ciertos valores. Por ejemplo, para la tirada de un dado sólo pueden resultar uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis puntos. Se examinan tres distribuciones discretas que son la *binomial,* la *hipergeométrica* y la de *Poisson.*

¿QUE ES UNA DISTRIBUCION PROBABILISTICA?

Una distribución probabilística muestra los resultados esperados de un experimento y la probabilidad de cada uno de estos resultados.

Distribución probabilística Enumeración de todos los resultados de un experimento junto con la probabilidad asociada a cada uno.

¿Cómo se puede generar una distribución de probabilidad?

✱ Ejemplo

Supóngase que se está interesado en el número de soles que caen al lanzar tres veces una moneda. Este es el experimento. Los posibles resultados son cero, uno, dos y tres soles. ¿Cuál es la distribución de probabilidades para el número de soles?

✔ Solución

Hay ocho posibles resultados. En la primera tirada podría caer águila, otra águila en la segunda tirada y otra más en la tercera. O podría caer águila, águila y sol, en

ese orden. En la tabla que sigue se muestran las ocho posibilidades (en México A representa un águila y S un sol).

Resultado posible	*Tirada de la moneda*			*Número de soles*
	Primera	*Segunda*	*Tercera*	
1	A	A	A	0
2	A	A	S	1
3	A	S	A	1
4	A	S	S	2
5	S	A	A	1
6	S	A	S	2
7	S	S	A	2
8	S	S	S	3

Obsérvese que el resultado "cero soles" ocurrió sólo una vez, "un sol" ocurrió tres veces, "dos soles", tres veces, y el resultado "tres soles", sólo una vez. Es decir, "cero soles" apareció una de ocho veces. De esta forma, la probabilidad de cero soles es un octavo $\frac{1}{8}$. La probabilidad de un sol es $\frac{3}{8}$, y así sucesivamente. La distribución de probabilidades se muestra en la tabla 6-1. Obsérvese que el total de las probabilidades de todos los posibles eventos es 1.000. Esto siempre se verifica.

TABLA 6-1

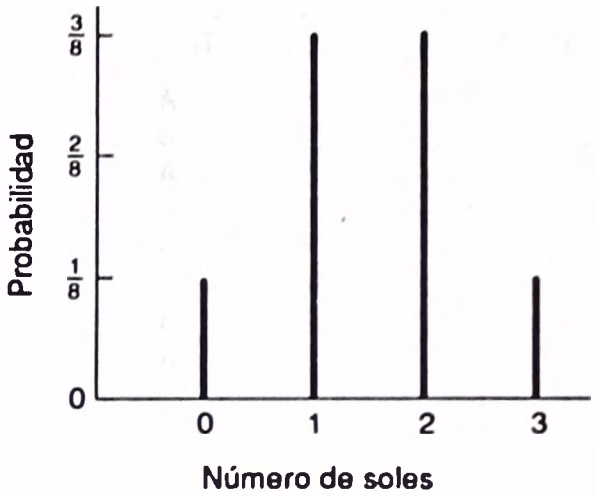
Distribución probabilística para los resultados de cero, uno, dos y tres soles resultantes en tres tiradas de una moneda

Número de soles r	*Probabilidad del resultado* $P(r)$
0	$\frac{1}{8} = 0.125$
1	$\frac{3}{8} = 0.375$
2	$\frac{3}{8} = 0.375$
3	$\frac{1}{8} = 0.125$
Total	$\frac{8}{8} = 1.000$

La misma información puede representarse de manera gráfica, como puede verse en el diagrama 6-1.

DIAGRAMA 6-1

Representación gráfica del número de soles y la probabilidad asociada resultante de tres tiradas de una moneda



Antes de continuar, se deben observar dos características importantes de una distribución probabilística.

1. La probabilidad de un resultado específico debe estar siempre entre 0 y 1, inclusive. (Las probabilidades de r, que se escribe $P(r)$ en el ejemplo de la tirada de una moneda, fueron 0.125, 0.375, etc.)
2. La suma de las probabilidades de todos los resultados mutuamente excluyentes es 1.000. (Con referencia a la tabla 6-1: 0.125 + 0.375 + 0.375 + 0.125 = 1.000).

AUTOEXAMEN 6-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los posibles resultados de un experimento relacionado con la tirada de un dado son: uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos.
1. Elabore una distribución de probabilidad para estos resultados.
2. Represente la distribución probabilística en forma gráfica.
3. ¿Cuál es el total de las probabilidades?

VARIABLES ALEATORIAS

Unos cuantos ejemplos ilustrarán mejor lo que significa **variable aleatoria**.

Si se considera el número de empleados ausentes los lunes, el mismo podría ser 0, 1, 2, 3, ... El número de inasistentes es la variable aleatoria.

Si se pesa un lingote de acero, el resultado (en libras) podría ser 2500, 2500.1, 2500.13 etc., dependiendo de la exactitud de la báscula.
Si se tiran dos monedas y se considera el número de caras, el mismo podría ser cero, una o dos. Puesto que el número exacto de caras resultante de este experimento se debe al azar, el número de caras que aparezcan es la variable aleatoria.
Otras variables aleatorias podrían ser: el número de lámparas defectuosas producidas durante la semana, las estaturas de las jóvenes integrantes de un equipo de basquetbol femenil, el número de corredores en la Maratón de Boston y el número diario de conductores que cometieran infracciones. En el último caso podría ser 0, 1, 2, 3, 4, . . . conductores.

Variable aleatoria Cantidad que es resultado de un experimento aleatorio que, debido al azar, puede tomar distintos valores.

Una variable aleatoria puede ser *discreta* o *continua*.

Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria discreta sólo es válida para cierto número de valores definidos y distantes. Si hay 100 empleados, entonces el conteo del número de empleados ausentes el lunes puede ser sólo de 0, 1, 2, 3, . . . , 100. Por lo general una variable aleatoria discreta es el resultado de contar algo. Por definición:

Variable aleatoria discreta Variable que sólo puede tener ciertos valores claramente separados y que es el resultado de contar algún elemento de interés.

Debe observarse que una variable discreta puede, en algunos casos, ser de valores fraccionarios o decimales. Estos valores deben estar separados, es decir, tener cierta distancia entre ellos. Como ejemplo, las puntuaciones otorgadas por los jueces en lo referente a aspectos técnicos y forma artística en el patinaje sobre hielo son valores decimales, como 7.2, 8.9 y 9.7. Estos valores son discretos porque existe una distancia entre las calificaciones, por ejemplo entre 8.3 y 8.4. (Una puntuación no puede ser 8.34, o bien, 8.347.)

Variable aleatoria continua

Si se mide algo, como el ancho de una habitación, la altura de una persona o el diámetro exterior de una pieza, se dice que la variable es una *variable aleatoria continua*. Puede tomar uno de una cantidad infinitamente grande de valores, dentro de ciertas limitaciones. Como ejemplos:

La distancia (en millas) entre Atlanta y Los Angeles podría ser 2 254, 2 254.1, 2 254.16, 2 254.162 etc., dependiendo de la exactitud del dispositivo de medición.

La presión de un neumático en (lb/pulg^2) podría ser 28, 28.6, 28.62, 28.624 y así sucesivamente, dependiendo de la exactitud del medidor.

Es lógico que si se organiza un conjunto de variables aleatorias discretas en una distribución de probabilidad, la distribución será una **distribución probabilística discreta**. En este capítulo se mostrarán varias distribuciones de probabilidad discreta. El capítulo 7 examinará una distribución de probabilidad continua muy importante: la distribución probabilística normal.

MEDIA Y VARIANCIA DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

En los capítulos 3 y 4 se analizaron medidas de localización y variación para una distribución de frecuencias. La media indica la ubicación central de los datos y la variancia describe la dispersión de éstos. De manera semejante, una distribución probabilística se resume por su media y su variancia. La media de una distribución probabilística se denota con la letra griega mu (μ) y la variancia por la letra griega sigma (minúscula) elevada al cuadrado (σ^2).

Media

La media es un valor representativo que sirve para representar una distribución probabilística. También es el valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria. La media se denomina también valor esperado, o expectativa, $E(X)$, de la variable. Es un promedio ponderado en el que las ponderaciones son las probabilidades correspondientes de los valores posibles.

La media de una distribución de probabilidad se calcula por la fórmula:

$$\boxed{\mu = E(X) = \Sigma[X \cdot P(X)]}$$

donde $P(X)$ es la probabilidad de los diversos resultados X. En otras palabras, se multiplica el valor de cada X por su probabilidad de ocurrencia, y luego se suman estos productos.

Variancia

Como se observó, la media es un valor característico utilizado para representar una distribución. Sin embargo, no describe el grado de dispersión (o variación) en una distribución. La variancia sí lo hace. Como se explicó en el capítulo 4, una comparación de dos variancias permite comparar la variación en dos distribuciones que tengan la misma media, pero diferente dispersión. La fórmula para la variancia de una probabilidad es:

$$\boxed{\sigma^2 = \Sigma[(X - \mu)^2 \cdot P(X)]}$$

Los pasos de cálculo son:

1. Restar la media a cada valor y elevar al cuadrado la diferencia.
2. Multiplicar cada diferencia al cuadrado por su probabilidad.
3. Sumar los productos resultantes para llegar a la variancia.

✱ Ejemplo

Una persona vende automóviles nuevos para una empresa. Generalmente negocia el mayor número de autos los sábados. Ha establecido la siguiente distribución de probabilidad para el número de autos que espera vender en un sábado en particular.

Número de automóviles vendidos X	*Probabilidad* $P(X)$
0	0.10
1	0.20
2	0.30
3	0.30
4	0.10
Total	1.00

1. ¿Qué tipo de distribución es ésta?
2. En un sábado común, ¿cuántos autos espera vender?
3. ¿Cuál es la variancia de la distribución?

✔ Solución

1. Este es un ejemplo de distribución de probabilidad discreta. Obsérvese que el vendedor espera la venta en sólo un cierto intervalo; no espera vender 5 o 50 autos. Además no puede vender la mitad de un vehículo. Puede vender sólo 0, 1, 2, 3 o 4 autos. Obsérvese que las respuestas son mutuamente excluyentes; no puede venderse un total de 3 y 4 autos en el mismo día.
2. El número medio de autos vendidos se calcula ponderando tal número con probabilidad de vender ese número, y se totalizan luego los productos.

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \Sigma[X \cdot P(X)] \\ &= 0(0.10) + 1(0.20) + 2(0.30) + 3(0.30) + 4(0.10) \\ &= 2.1\end{aligned}$$

Estos cálculos se resumen en la siguiente tabla.

Número de automóviles vendidos X	*Probabilidad* $P(X)$	$X \cdot P(X)$
0	0.10	0.00
1	0.20	0.20
2	0.30	0.60
3	0.30	0.90
4	0.10	0.40
	1.00	$E(X) = 2.10$

3. De nuevo es útil una tabla para sistematizar los cálculos para la variancia. Su valor es 1.290.

Número de automóviles vendidos X	*Probabilidad* $P(X)$	$(X - \mu)$	$(X - \mu)^2$	$(X - \mu)^2 \cdot P(X)$
0	0.10	0 − 2.1	4.41	0.441
1	0.20	1 − 2.1	1.21	0.242
2	0.30	2 − 2.1	0.01	0.003
3	0.30	3 − 2.1	0.81	0.243
4	0.10	4 − 2.1	3.61	0.361
				$\sigma^2 = 1.290$

Recuérdese que la desviación estándar, σ es la raíz cuadrada de la variancia. En este problema $\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.290} = 1.136$ autos.

AUTOEXAMEN 6-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una empresa ofrece tres tamaños de un refresco (pequeño, mediano y grande) como complemento de pizzas. Las bebidas se venden a 50, 75, y 90 centavos (de dólar), respectivamente. De los pedidos, 30% son para el tamaño pequeño, 50% para el mediano y 20% para el grande.

1. ¿Es ésta una distribución probabilística discreta? Indique por qué sí o por qué no.
2. Calcule la cantidad media cobrada por el refresco.
3. ¿Cuál es la variancia del cobro por la bebida? ¿La desviación estándar?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. David Jara es el propietario y gerente de una cafetería. Ofrece servir tazas extra gratuitamente, después de la primera taza de café. Recopiló la información que sigue sobre el número de tazas adicionales servidas.

Tazas extra	*Porcentaje*
0	30.0
1	40.0
2	20.0
3	10.0

   Calcule la media y la desviación estándar para el número de tazas extra.

2. El director de admisiones en Kinzua University, en Nueva Escocia, estimó la admisión de estudiantes para el semestre de otoño con base en la experiencia:

Admisión	*Probabilidad*
1 000	0.60
1 200	0.30
1 500	0.10

   ¿Cuál es el número esperado de admisiones para el semestre de otoño? Calcule la desviación estándar e interprétela.

3. En los departamentos Penn-Glade se dispone de una gran cantidad de unidades para renta cada mes. A la gerencia le preocupa el número de departamentos vacantes (o vacíos) cada mes. Un estudio reciente reveló el número que sigue de departamentos desocupados y el porcentaje de tiempo que están libres.

Número de unidades vacantes	*Probabilidad*
0	0.10
1	0.20
2	0.30
3	0.40

   Calcule la media y la desviación estándar del número de departamentos sin ocupar. Interprételas.

4. Una inversión especulativa de $1 500 puede valer $1 000, $2 000 o $5 000 al final del año. Las probabilidades de estos valores son 0.25, 0.60 y 0.15, respectivamente.
   a. ¿Cuál es la ganancia esperada en la inversión? ¿Cuál es la variancia?
   b. ¿Cuál es el valor esperado de la inversión dentro de un año?

DISTRIBUCION PROBABILISTICA BINOMIAL

La **distribución probabilística binomial** es una distribución de probabilidad discreta. Las características de esta distribución binomial (o binómica) es que se ocupa de experimentos en donde cada resultado puede tomar sólo una de dos formas. Por ejemplo, la respuesta a una pregunta del tipo verdadero o falso es precisamente

"verdadero" o "falso". Cada resultado es *mutuamente excluyente*, lo cual significa en este caso, que la respuesta a una pregunta de verdadero o falso no puede ser correcta y estar equivocada *al mismo tiempo*. Una forma común de denotar los dos resultados es como "éxito" y "fracaso". Por ejemplo, si adivinara la respuesta correcta a una pregunta de verdadero o falso el resultado se clasificaría como éxito. En caso contrario, es un fracaso. Otros ejemplos de experimentos que tienen esta característica (tener sólo dos resultados) son:

Experimento:	Seleccionar un juguete mecánico de la línea de producción.
Resultados:	El juguete funciona de manera correcta (éxito).
	El juguete no funciona en forma correcta (fracaso).
Experimento:	Preguntar a un niño de cinco años si le gusta un cereal de reciente producción.
Resultados:	Le gusta (éxito).
	No le gusta (fracaso).

Una segunda característica de una distribución binomial es que los datos recopilados son *resultado de conteos*. Esta es una razón por la que la distribución binomial se clasifica como distribución discreta.

Una tercera peculiaridad de esta distribución es que la probabilidad de un éxito permanece igual de un ensayo a otro. Ejemplos:

La probabilidad de que se adivine la primera pregunta de una prueba de verdadero o falso en forma correcta (éxito) es $^1/_2$. Este es el primer "ensayo". La probabilidad de adivinar en forma correcta la segunda pregunta (segundo ensayo) también es $^1/_2$; la probabilidad de éxito en el tercer ensayo es $^1/_2$, y así sucesivamente.

Si la experiencia revela que el puente levadizo sobre un río (Gulf Intracoastal Waterway) estaba levantado una de cada cinco veces que llegó a él, entonces la probabilidad de que esté levantado (éxito) la siguiente vez que llegue ahí, es $^1/_5$; para la siguiente vez, $^1/_5$, etc.

Una cuarta característica de una distribución probabilística binomial es que un ensayo es *independiente* de cualquier otro. En realidad, esto es lo mismo que decir que no existe un patrón rítmico con respecto a los resultados. Como ejemplo, las respuestas a una prueba de verdadero o falso no están dispuestas como *V, V, V, F, F, F, V, V, V*, etc.

En resumen, una distribución binomial tiene las siguientes características:

1. Un resultado de un experimento se clasifica en una de dos categorías mutuamente excluyentes —que son éxito o fracaso.
2. Los datos recopilados son el resultado de conteos.
3. La probabilidad de un éxito permanece igual para cada ensayo. Lo mismo sucede con la probabilidad de fracaso.
4. Los ensayos son independientes, lo cual significa que el resultado de un ensayo no afecta al resultado de algún otro.

AUTOEXAMEN 6-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un profesor que imparte la materia de horticultura dejó una tarea relacionada con memorizar en latín los nombres de flores. Desafortunadamente, ninguno de los estudiantes estudió el capítulo. Al día siguiente una prueba rápida estuvo formada por 20 preguntas de opción múltiple, cada una con cinco opciones. Todos los estudiantes adivinaron la respuesta a cada pregunta.

1. ¿Por qué podría utilizarse la distribución probabilística binomial para determinar las probabilidades de adivinar 0, 1, 2, . . . , 20 preguntas en forma correcta?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante adivine las 20 preguntas en forma correcta? (No es necesario calcular esta probabilidad. En vez de esto, muestre en forma fraccionaria cómo podría determinarse.)

¿Cómo se elabora una distribución probabilística binomial?

Para elaborar una distribución binomial, se debe saber 1) el número de ensayos, y 2) la probabilidad de éxito en cada ensayo. Por ejemplo, si un cuestionario de investigación de mercado tiene 20 preguntas de opción múltiple, el número de ensayos es 20. Si cada pregunta del cuestionario tiene cinco opciones y sólo una es correcta, la probabilidad de éxito en cada ensayo es 1/5, o sea 0.20. De esta forma, la probabilidad de que una persona sin conocimientos sobre el tema adivine la respuesta a una pregunta en forma correcta es 0.20.

La distribución probabilística binomial puede describirse utilizando la fórmula:

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}(p)^r(q)^{n-r}$$

en donde:

- n es el número de ensayos.
- r es el número de éxitos observados.
- p es la probabilidad de éxito en cada ensayo.
- q es la probabilidad de fracaso, que se obtiene por $1 - p$.

* Ejemplo

Como se sabe, la respuesta a una pregunta de verdadero o falso es correcta o incorrecta. Considérese que 1) un examen está formado por cuatro preguntas de verdadero o falso, y 2) un estudiante no sabe nada sobre el tema. La posibilidad (probabilidad) que el estudiante adivine la respuesta correcta a la primera pregunta

es $^1/_2$ o sea 0.50. De manera semejante, la probabilidad de adivinar en forma correcta cada una de las preguntas restantes es 0.50. ¿Cuál es la probabilidad de:

1. ¿Obtener exactamente ninguna de las cuatro en forma correcta?
2. ¿Obtener exactamente una de las cuatro correcta?

✔ Solución

1. La probabilidad de adivinar exactamente ninguna de las cuatro en forma correcta es 0.0625, que se obtiene resolviendo la ecuación que sigue. (Recuérdese del capítulo 5 que 0! es igual a 1.)

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}(p)^r(q)^{n-r}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{4!}{0!(4 - 0)!}(0.50)^0(1 - 0.50)^{4-0} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}(1)(0.50)^4 \\ &= (1)(1)(0.50)^4 \\ &= 0.0625 \end{aligned}$$

2. La probabilidad de obtener exactamente una de las cuatro respuestas correcta es 0.2500, que se obtiene por medio de:

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{4!}{1!(4 - 1)!}(0.50)^0(1 - 0.50)^{4-1} \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1(3 \cdot 2 \cdot 1)}(0.50)^1(0.50)^3 \\ &= (4)(0.50)(0.125) \\ &= 0.2500 \end{aligned}$$

AUTOEXAMEN 6-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase el ejemplo y solución anteriores. Observe que hay cuatro preguntas de verdadero o falso. ¿Cuál es la probabilidad de contestar exactamente dos de las cuatro preguntas en forma correcta?

La probabilidad de contestar exactamente cero, una, dos, tres y cuatro preguntas en forma correcta de un total de cuatro se muestran en la tabla 6-2.

TABLA 6-2

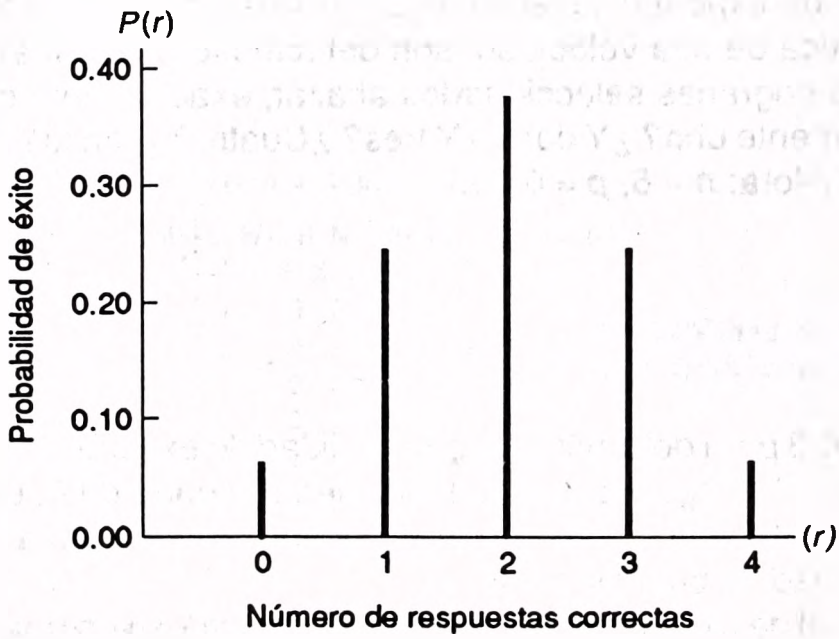
Distribución de probabilidad binomial para $n = 4$, $p = 0.50$

Número de conjeturas correctas	*Probabilidad*	
	Fracción	*Decimal*
0	$\frac{1}{16}$	0.0625
1	$\frac{4}{16}$	0.2500
2	$\frac{6}{16}$	0.3750
3	$\frac{4}{16}$	0.2500
4	$\frac{1}{16}$	0.0625
Total	$\frac{16}{16}$	1.0000

Los datos de la citada tabla 6-2 están representados en un diagrama más que nada para mostrar la naturaleza simétrica de la distribución probabilística binomial cuando $p = 0.50$ (véase el diagrama 6-2).

DIAGRAMA 6-2

Distribución binomial para $n = 4$, $p = 0.50$



Uso de tablas de probabilidad binomial

Una distribución probabilística binomial es una distribución teórica que, según se mostró, puede generarse en forma matemática. Sin embargo, con la excepción de problemas en los que n es pequeña (por ejemplo, n de 3 o 4), los cálculos para las probabilidades de 0, 1, 2, . . . éxitos pueden ser muy tediosos. Como auxiliar para determinar las probabilidades necesarias, se ha formado una amplia tabla que da las probabilidades de 0, 1, 2, 3, . . . éxitos para diferentes valores de n y p. Esta tabla se tiene en el apéndice A, y una pequeña parte de la misma, necesaria para el ejemplo que sigue se presenta en la tabla 6-3.

TABLA 6-3

Probabilidades binomiales para n = 6

r	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002	0.000	0.000
2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	0.000
3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.313	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
4	0.000	0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
5	0.000	0.000	0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
6	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735

✱ Ejemplo

Juzgando a partir de experiencia reciente, 5% de los engranes producidos por una máquina automática de alta velocidad, son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre seis engranes seleccionados al azar, exactamente cero sean defectuosos? ¿Exactamente uno? ¿Y dos? ¿Y tres? ¿Cuatro? ¿Cinco? ¿O exactamente seis de los seis? (Nota: $n = 6$, $p = 0.05$.)

✔ Solución

Consulte la tabla 6-3 para determinar la probabilidad de exactamente cero engranes defectuosos. Vaya al margen izquierdo hasta llegar a una r de 0. Luego trasládese en dirección horizontal a la columna con el encabezado p igual a 0.05 para determinar la probabilidad, la cual es 0.735.

La probabilidad de exactamente un engrane defectuoso en una muestra de seis es 0.232. La distribución de probabilidad binomial completa es ($n = 6$, $p = 0.05$):

Número de engranes defectuosos r	*Probabilidad de ocurrencia* $P(r)$
0	0.735
1	0.232
2	0.031
3	0.002
4	0.000
5	0.000
6	0.000

Desde luego, existe cierta posibilidad de obtener exactamente cinco engranes defectuosos de seis selecciones aleatorias. Es 0.00000178, que se obtiene al sustituir los valores adecuados en la fórmula binomial:

$$
\begin{aligned}
P(5) &= \frac{6!}{5!(6-5)!}(0.05)^5(0.95)^1 \\
&= (6)(0.05)^5(0.95) \\
&= 0.00000178
\end{aligned}
$$

Para tener seis engranes defectuosos de una muestra de seis, la probabilidad es 0.000000016. Es decir, existe una probabilidad muy pequeña de seleccionar cinco o seis engranes defectuosos en una muestra de seis.

Este problema también puede resolverse en el sistema MINITAB. Se utiliza el comando PDF para tener acceso a la función de densidad probabilística. Se emplea el subcomando BINOMIAL con n, número de ensayos (o tamaño de muestra), y *p*, probabilidad de éxito. El resultado es como sigue.

```
MTB >pdf ;
SUBC> binomial n = 6 p  =.05.

    BINOMIAL WITH N = 6 P = 0.050000
    K          P(X = K)
    0          0.7351
    1          0.2321      ———— Probabilidad de
    2          0.0305            uno defectuoso
    3          0.0021
    4          0.0001
    5          0.0000
```

El resultado es el mismo que en la tabla 6-3, excepto por la diferencia en el número de dígitos después del punto decimal.

AUTOEXAMEN 6-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una de cada cinco veces que se llegó al puente levadizo sobre la Gulf Intracoastal Waterway, éste estaba levantado y se tuvo que esperar. Utilizando la tabla probabilística binomial del apéndice A:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que en sus siguientes siete aproximaciones al puente, éste no se halle levantado?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que esté levantado exactamente una de las siete veces que se acerque?
3. ¿Cuál es la probabilidad que esté levantado exactamente dos veces? ¿Tres veces? ¿Cuatro veces? ¿Cinco veces? ¿Y exactamente seis veces? ¿Las siete veces?
4. ¿Cuál es el total que deben dar las probabilidades en las partes 1, 2 y 3?

El apéndice A tiene ciertas limitaciones, ya que sólo proporciona probabilidades para una n de 1 a 25 y valores de p de 0.05, 0.10, 0.20, . . ., 95. Existen dos métodos para llegar a una distribución binomial para n mayor de 25 y/o p que no esté en la tabla, por ejemplo 0.07: 1) Puede utilizarse la aproximación normal a la binomial. Esto se presentará en el capítulo 7. 2) Una computadora puede generar las probabilidades para un número específico de éxitos, dadas n y p. Como ejemplo, a continuación se presentan dos listados MINITAB: uno para $n = 40$ y $p = 0.09$, y otro para $n = 27$ y $p = 0.376$.

```
MTB > pdf;
SUBC> binomial n=40 p=.09.

     BINOMIAL WITH N = 40 P = 0.090000
        K        P(X = K)
        0        0.0230
        1        0.0910
        2        0.1754
        3        0.2198
        4        0.2011
        5        0.1432
        6        0.0826
        7        0.0397
        8        0.0162
        9        0.0057
       10        0.0017
       11        0.0005
       12        0.0001
       13        0.0000
```

```
MTB > pdf ;
SUBC> binomial n=27 p=.376.

    BINOMIAL WITH N = 27 P = 0.376000
        K        P(X = K)
        1        0.0000
        2        0.0004
        3        0.0019
        4        0.0068
        5        0.0189
        6        0.0418
        7        0.0756
        8        0.1139
        9        0.1448
       10        0.1571
       11        0.1463
       12        0.1175
       13        0.0817
       14        0.0492
       15        0.0257
       16        0.0116
       17        0.0045
       18        0.0015
       19        0.0004
       20        0.0001
       21        0.0000
```

Es necesario hacer varias observaciones adicionales acerca de las distribuciones binomiales:

1. Si *n* permanece constante pero *p* es cada vez más grande, hasta 0.50, la forma de la distribución probabilística binomial se vuelve más simétrica. En la tabla 6-4 se proporcionan las probabilidades para una *n* de 10 y proba-

TABLA 6-4

Probabilidad de 0, 1, 2, . . . Exitos para una *p* de 0.05, 0.10, 0.20 y 0.50, y una *n* de 10

r	*0.05*	*0.1*	*0.2*	*0.3*	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*	*0.95*
0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000
3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001	0.000	0.000
4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006	0.000	0.000
5	0.000	0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	0.000
6	0.000	0.000	0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
7	0.000	0.000	0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
8	0.000	0.000	0.000	0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599

DIAGRAMA 6-3

Representación de la distribución probabilística binomial para una *p* de 0.05, 0.10, 0.20 y 0.50 y una *n* de 10

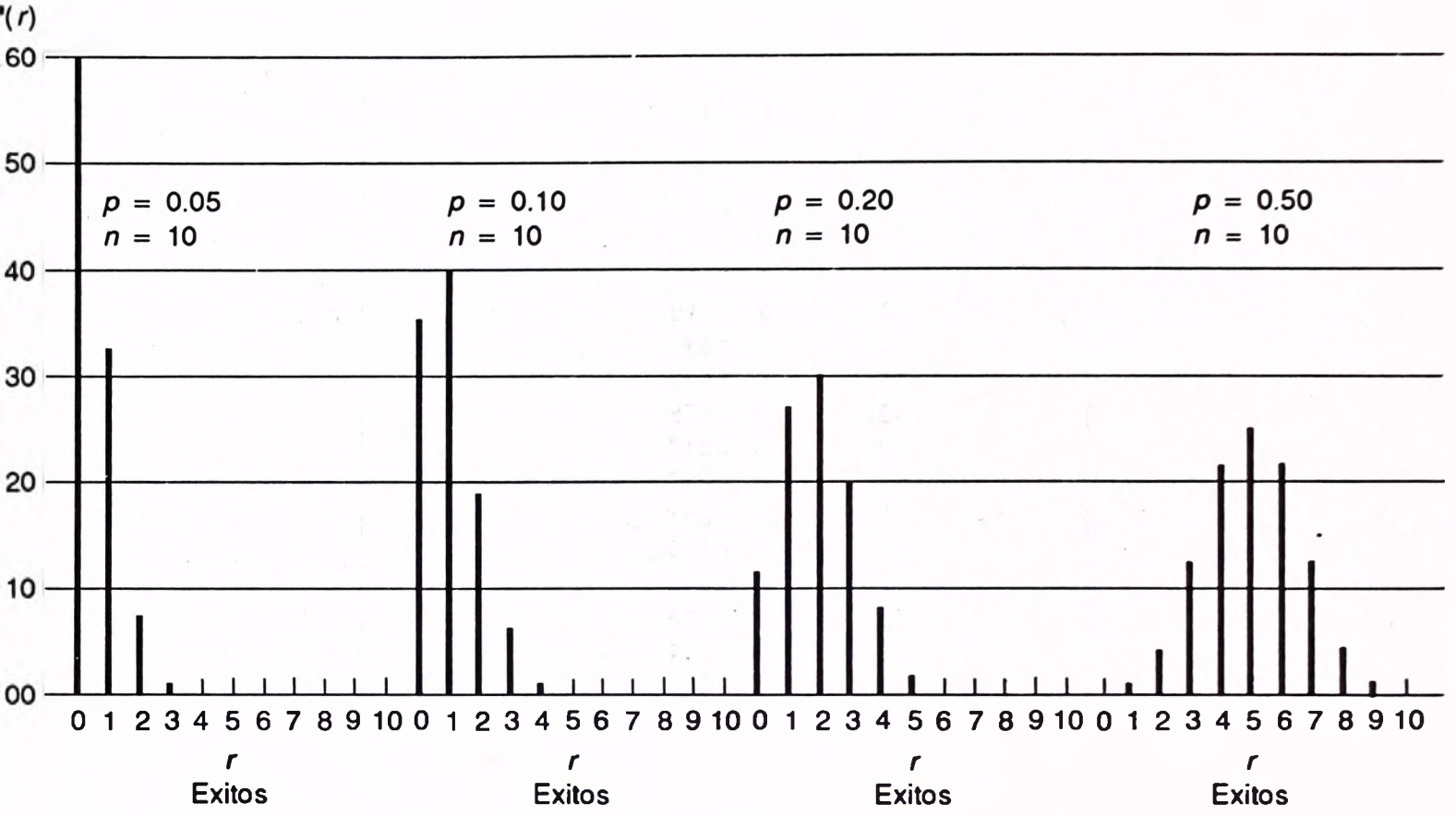
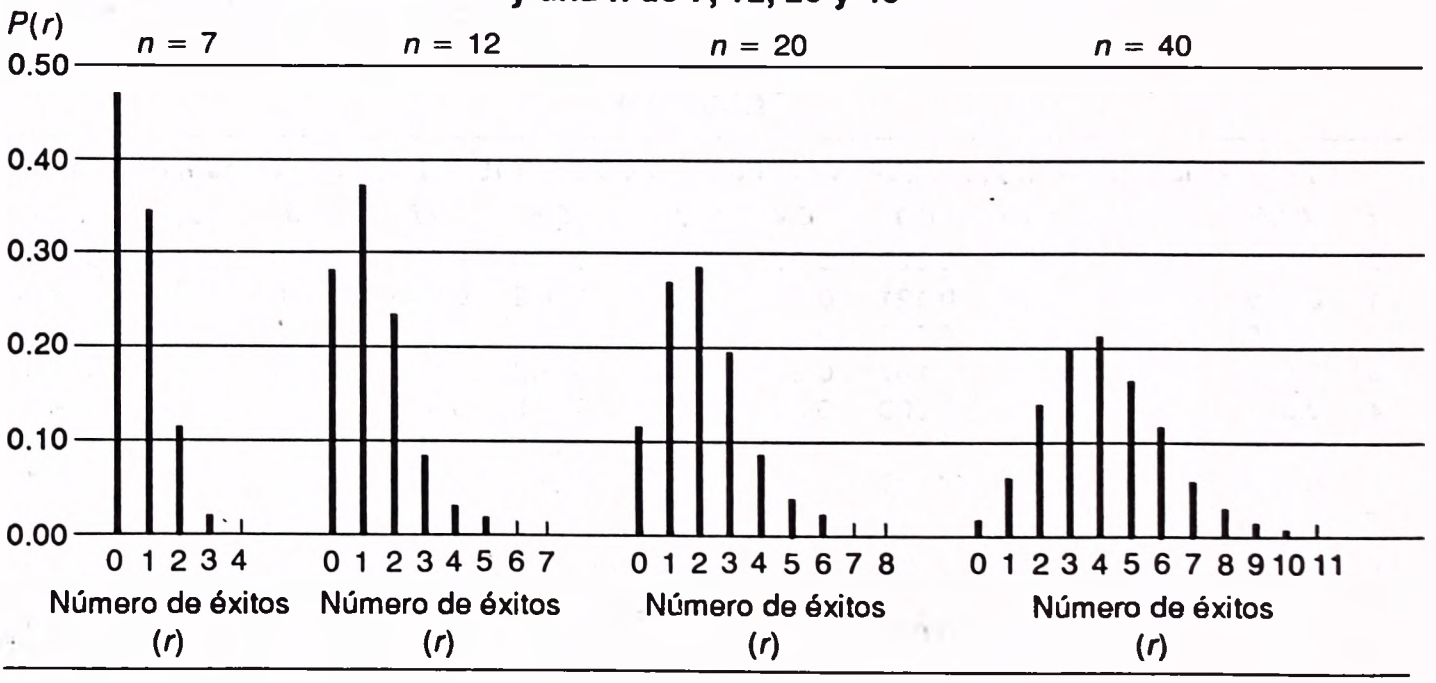


DIAGRAMA 6-4

Representación de la distribución probabilística binomial para una *p* de 0.10 y una *n* de 7, 12, 20 y 40



bilidades de éxito de 0.05, 0.10, 0.20 y 0.50. Se presentan en el diagrama 6-3. Obsérvese que para la probabilidad de éxito de 0.05, la distribución tiene un alto sesgo, pero para p de 0.50, es simétrica.

2. Si p, probabilidad de éxito, permanece igual, pero n se vuelve cada vez mayor, la forma de la distribución binomial es cada vez más simétrica. En el diagrama 6-4 se muestra una situación en la que p permanece constante en 0.10, pero n aumenta de 7 a 40.
3. La media (μ) y la variancia (σ^2) de una distribución binomial puede calcularse por:

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1 - p)$$

Para el ejemplo anterior sobre los engranes defectuosos, recuérdese que $p = 0.05$ y $n = 6$. Entonces:

$$\mu = np = 6(0.05) = 0.30$$
$$\sigma^2 = np(1 - p) = 6(0.05)(1 - 0.05) = 0.285$$

La variancia de 0.285 puede verificarse utilizando la distribución de la tabla 6-3.

Número de defectos r	$P(r)$	$r \cdot P(r)$	$r - \mu$	$(r - \mu)^2$	$(r - \mu)^2 \cdot P(r)$
0	0.735	0	−0.30	0.09	0.06615
1	0.232	0.232	0.70	0.49	0.11368
2	0.031	0.062	1.70	2.89	0.08959
3	0.002	0.006	2.70	7.29	0.01458
4	0.000	0	3.70	13.69	0
5	0.000	0	4.70	22.09	0
6	0.000	0	5.70	32.49	0
		0.30			0.284*

* La ligera discrepancia entre 0.285 y 0.284 se debe al redondeo.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. En un día veraniego muy caluroso, 10% de los trabajadores de producción de una empresa están ausentes del trabajo. Se van a seleccionar al azar 10 obreros para un estudio especial a profundidad sobre el ausentismo.
   a. ¿Cuál es la variable aleatoria en este problema?
   b. ¿Tal variable es discreta o continua? ¿Por qué?
   c. Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar 10 trabajadores de producción en un día caluroso de verano y descubrir que ninguno de ellos está ausente?
   d. Idee una distribución probabilística binomial para este experimento.

e. Calcule la media, la variancia y la desviación estándar de la distribución.
f. Represente la distribución probabilística binomial por medio de una gráfica.
g. ¿Por qué tal distribución es adecuada para este tipo de problema?

6. El departamento de mercadeo de una compañía planea realizar una encuesta nacional para determinar si los consumidores de cereales en hojuelas pueden o no distinguir uno de sus productos favorito, de los otros del mismo tipo. Para probar el cuestionario y el procedimiento que se van a emplear, se pidió a ocho personas que cooperaran en un experimento. Se colocaron frente a una persona cinco tazones muy pequeños de cereales en hojuelas, y los recipientes se marcaron como A, B, C, D y E. A la persona se le informó que sólo uno de sus tazones tenía su producto favorito.
   a. Supóngase que una persona no pudo identificar su cereal favorito, y sólo conjeturó que estaba en el tazón C. ¿Cuál es la probabilidad de que haya adivinado correctamente?
   b. ¿Cuál es la variable aleatoria en este problema?
   c. ¿Tal variable es discreta o continua? ¿Por qué?
   d. Suponga que las ocho personas que participaron en el experimento fueron incapaces de identificar su cereal favorito, y sólo adivinaron en qué tazón se encontraba. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los ocho haya adivinado en forma correcta?
   e. Idee una distribución probabilística binomial para este experimento.
   f. Calcule la media, la variancia y desviación estándar de la distribución.
   g. Represente la distribución en un diagrama.
   h. Supóngase que siete de las ocho personas identificaron el cereal que más les gustaba. ¿Es razonable considerar que sólo estaban adivinando? Explique su respuesta. ¿Cuál sería la conclusión?
   i. ¿Por qué la distribución probabilística binomial es adecuada para este problema?

Usos e importancia de la distribución probabilística binomial

En este capítulo se han citado varios ejemplos del uso e importancia de una distribución probabilística. Resumiendo, se observa que cualquier distribución de probabilidad es una distribución teórica que muestra cómo se espera que se distribuyan los resultados de un experimento. De manera específica, una distribución probabilística binomial muestra la forma como es de esperar se distribuya un experimento relacionado sólo con dos resultados (un éxito o un fracaso). En los ejemplos, los ejercicios del capítulo y los autoexámenes, también se consideraron algunos usos de la distribución probabilística binomial. Estos son otros dos casos:

Caso 1 Supóngase que la experiencia reveló que 5% de las puertas de automóvil que salen de la línea de producción, son defectuosas. El control de calidad define una puerta defectuosa como aquella que tiene uno o más defectos como una rayadura fuerte, una falla en la pintura o una parte sumida. El personal de calidad va a seleccionar al azar diez puertas. En la tabla 6-5 se muestra la distribución binomial para el número de defectos en 10 puertas con $p = 0.05$.

Obsérvese que el número probable de puertas defectuosas en la muestra de 10 es 0 o bien 1. Tres o más puertas defectuosas es muy poco probable. Si hubiera

TABLA 6-5

Distribución probabilística binomial para una *n* de 10 y una *p* de 0.05

Número de defectos	*Probabilidad de ocurrencia*	
0	0.599	Más probable
1	0.315	
2	0.075	
3	0.010	Completamente improbable
4	0.001	
5	0.000	
6	0.000	
7	0.000	
8	0.000	
9	0.000	
10	0.000	

6 puertas defectuosas de las 10, sin duda el control de calidad investigaría las causas de los defectos y haría que se tomaran medidas correctivas. De esta forma, el conocimiento sobre la distribución indica, antes del experimento, lo que debe esperarse que ocurra y cuáles son resultados inusitados.

Caso 2 Varios grupos de investigación efectúan encuestas en forma continua acerca de la preferencia política al votar, las normas de protección al consumidor, la preferencia de productos, etc. Con frecuencia se utiliza un conjunto de preguntas de opción múltiple. El entrevistado marca lo que considera como respuesta correcta. Al investigador siempre le preocupa que los entrevistados poco informados tan sólo adivinen las respuestas para evitar apenarse. Por tanto, el investigador genera una distribución probabilística binomial y la compara con las *respuestas reales*, a fin de ayudar a identificar las respuestas adivinadas. Por ejemplo, un cuestionario se forma por seis preguntas, y cada pregunta tiene cinco posibilidades. Sólo una respuesta es correcta. La distribución probabilística binomial para el número de respuestas correctas obtenido *al azar* se muestra en la tabla 6-6. Si el entrevistado sólo estuviera adivinando las respuestas para evitarse problemas, el número probable que habría

TABLA 6-6

Distribución probabilística binomial para una *n* de 6 y una *p* de 0.20

Número de respuestas correctas	*Probabilidad de ocurrencia*	
0	0.262	Más probable
1	0.393	
2	0.246	
3	0.082	
4	0.015	Menos probable
5	0.001	
6	0.000	

adivinado en forma correcta es cero, uno o dos. Sin embargo, si la mayoría de los entrevistados tuvieran cinco o seis respuestas correctas de seis, podríamos considerar que sabían las respuestas a la mayoría de las preguntas, debido a que la probabilidad de adivinar en forma correcta cinco o seis de las seis preguntas sólo es 0.001, o aproximadamente 1 de 1 000.

En resumen, se genera una distribución probabilística teórica adecuada, primero para determinar cómo se comportarán los resultados esperados de un experimento. Después se comparan los resultados reales con los esperados para evaluar los resultados reales del experimento.

DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS ACUMULATIVAS

Puede ser conveniente determinar la probabilidad de conjeturar (o adivinar) en forma correcta las respuestas a seis *o más* preguntas de verdadero o falso de un total de 10. O tal vez interese la probabilidad de seleccionar *menos de* dos defectuosas al azar de la producción de la hora anterior. En apariencia se necesitan distribuciones de frecuencias acumuladas semejantes a las que se hicieron en el capítulo 2, y así es.

Supóngase que se desea convertir la distribución probabilística binomial de la tabla 6-6 en distribuciones probabilísticas binomiales de los tipos "menor que" y "mayor que". Recuérdese del capítulo 2 que para una distribución "menor que" se suman las probabilidades en forma sucesiva hacia abajo, y para la distribución "mayor que", las probabilidades se suman hacia arriba. (Véase la tabla 6-7).

TABLA 6-7

Distribución binomial acumulada "menor de" y "mayor de"
(n = 6, p = 0.20)

Número de respuestas correctas r	*Probabilidad de ocurrencia* $P(r)$		*Probabilidades "menor de"*		*Probabilidades "mayor de"*
0	0.262	Se suma	0.262		1.000*
1	0.393	hacia	0.655		0.737
2	0.246	abajo	0.901	↑	0.344
3	0.082		0.983		0.098
4	0.015	↓	0.998	Se suma	0.016
5	0.001		0.999	hacia	0.001
6	0.000		1.000*	arriba	0.000

* El total real es 0.999. La ligera discrepancia se debe al redondeo.

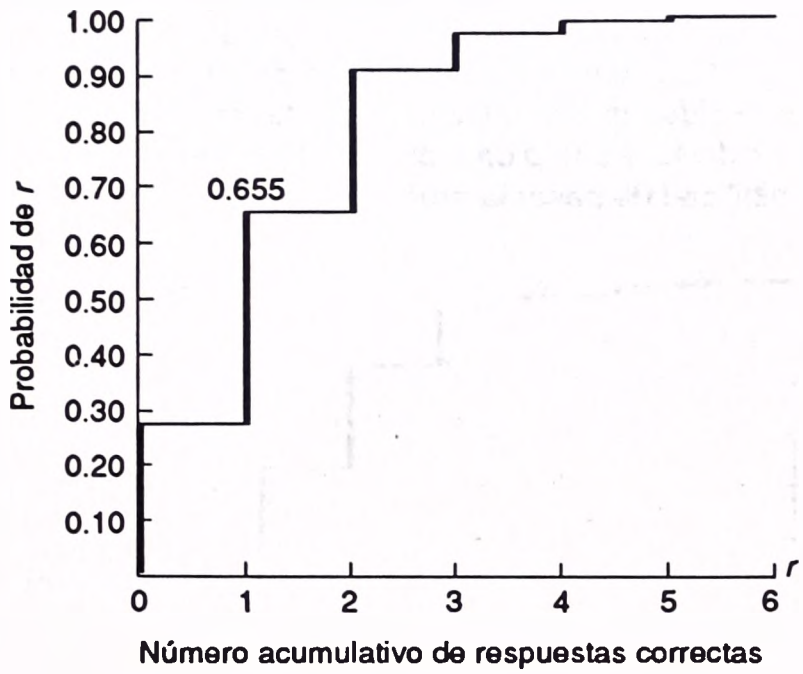
¿Cuál es la probabilidad de seleccionar las respuestas de seis personas entrevistadas y hallar *por casualidad* dos o menos respuestas correctas? La probabilidad es 0.901. ¿Cuál es la probabilidad de tres o más respuestas correctas? Es 0.098.

¿Cuál es la probabilidad de más de tres respuestas acertadas? Es 0.016. (La probabilidad de "más de tres" significa cuatro o más.)

En el diagrama 6-5 se representa la distribución probabilística acumulativa "menor que". Para trazarla, se inicia en 0 sobre el eje X, y se traza ahí una raya vertical hasta 0.262. Después se avanza horizontalmente hasta 1 sobre el eje X, y se traza una vertical hasta 0.655, y así sucesivamente. Obsérvese que la probabilidad de una o menos respuestas correctas se lee utilizando la parte *superior* de la vertical. Considérese también que la gráfica que representa la distribución probabilística acumulativa "menor que" va hacia arriba y a la derecha, en forma escalonada. No es posible conectar en forma sucesiva los puntos utilizando rectas porque los datos son discretos, es decir, no hay valores entre 0 y 1, 1 y 2, etc.

DIAGRAMA 6-5

Representación de una distribución binomial acumulativa "menor de" (n = 6, p = 0.20)



Una distribución binomial acumulativa "mayor que" se representa gráficamente de la misma manera. Sin embargo, las probabilidades acumuladas se leen a partir del punto *más bajo* de las líneas verticales. (Se tendrá oportunidad de trazar un diagrama "menor que" y uno "mayor que" en el siguiente autoexamen y en los ejercicios del capítulo.) En el apéndice B se tiene una tabla probabilística binomial acumulativa para valores seleccionados de n.

Debe observarse que si se necesitan valores exactos, deben provenir del apéndice A o del apéndice B. Sin embargo, si sólo son necesarias probabilidades aproximadas, pueden estimarse a partir de un diagrama.

AUTOEXAMEN 6-6

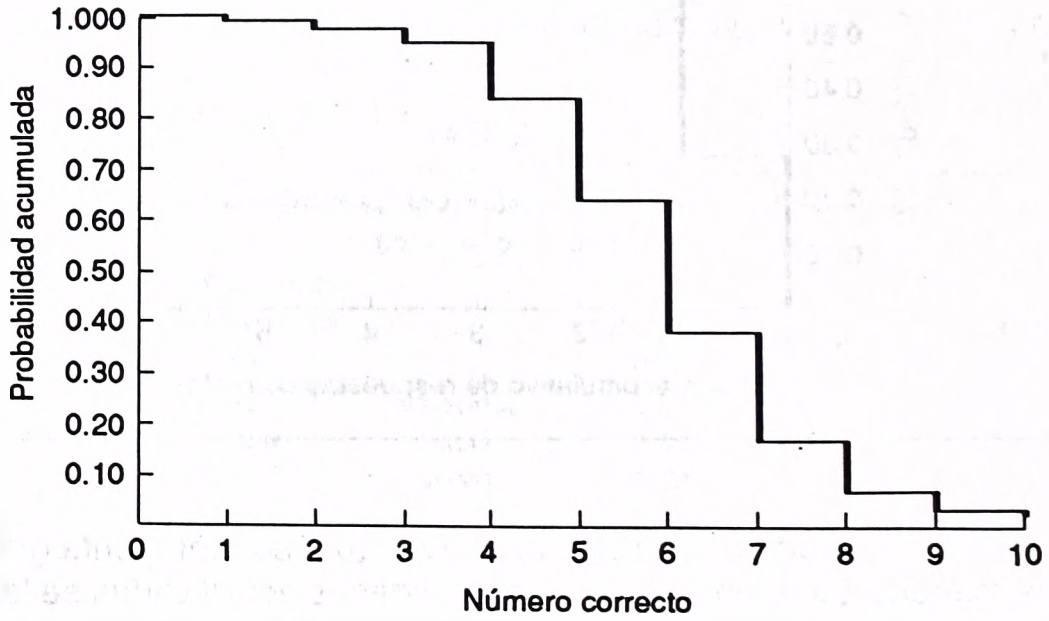
Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. a. Elabore una distribución probabilística binomial acumulativa "menor que" para una *n* de 5 y una *p* de 0.50.
   b. Represente la distribución "menor que" en un diagrama.
2. a. Para *n* igual a 4 y *p* de 0.60, genere una distribución probabilística binomial acumulativa "mayor que".
   b. Represente la distribución "mayor que" en un diagrama.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Se le entrega un cuestionario formado por 10 preguntas de verdadero o falso durante la segunda semana de una clase. Desafortunadamente, no asistió a las clases anteriores ni estudio en el texto (lo cual suele suceder). Sin embargo, usted decide presentarse a examen y tratar de adivinar la respuesta a cada pregunta. El profesor indica que se necesitan seis o más respuestas correctas para pasar la prueba.
   a. Para cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de adivinar la respuesta correcta?
   b. El diagrama que sigue muestra las probabilidades binomiales acumuladas "mayor que" para una *n* de 10 y una *p* de 0.50. Con base en la gráfica, ¿aproximadamente cuál es su posibilidad de pasar la prueba?



   c. ¿Cuál es la probabilidad exacta de pasar con seis o más respuestas correctas? (Consulte el apéndice A o B para el caso de las probabilidades de 6, 7, 8, 9 y 10 de 10 correctas.)

8. Los patrocinadores de la sociedad Cancer Research tuvieron una idea para atraer donadores ricos a una cena en la cual cada platillo cuesta $500 (dólares). Se anunció que después de la cena, cada donador asistente podría comprar un juego de 20 boletos

para participar en mesas de juego (como la ruleta). La probabilidad de ganar un premio en cada uno de los 20 juegos es 50-50. Usted adquirió un juego de 20 boletos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de ganar 15 o más premios?
b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar exactamente cuatro premios?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que usted no tenga éxito, es decir, que no gane ningún premio?
d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cinco o menos premios?
e. ¿Cuál es la probabilidad de ganar menos de cinco premios?

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

Se observó que para aplicar la distribución binomial, la probabilidad de un éxito debe permanecer igual para cada ensayo sucesivo. Por ejemplo, la probabilidad de adivinar la respuesta correcta para una pregunta de verdadero o falso es 0.50. Esta probabilidad permanece igual para cada pregunta en un examen. De manera semejante, supóngase que 40% de los votantes registrados en una zona son del partido republicano, por ejemplo. Si se van a seleccionar al azar 27 votantes registrados, la probabilidad de elegir un republicano en la primera selección es 0.40. La de obtener un republicano en la siguiente selección también es 0.40, considerando que el muestreo se hace *con reposición**, lo cual significa que la persona seleccionada se pone de nuevo en la población antes de elegir a la siguiente.

La mayoría del muestreo se realiza *sin reposición.* Es decir, los resultados no son independientes, y ello significa que la probabilidad para cada observación sucesiva cambiará. Por ejemplo, si la población está formada por 20 elementos, la probabilidad de seleccionar un elemento particular de esa población es $\frac{1}{20}$. Si el muestreo se hace sin reposición, sólo quedan 19 elementos; la probabilidad de seleccionar un elemento específico en la segunda selección es sólo $\frac{1}{19}$. Para la tercera selección la probabilidad es $\frac{1}{18}$, etc. Esto considerando que la población es *finita,* es decir, que se conoce el número de elementos en la población.

Población finita Población formada por un número fijo de personas, objetos o medidas conocidos.

Son ejemplos de población finita los 2 842 afiliados de un partido en una zona, las 9 241 solicitudes para ingreso en una escuela y los 18 autos Sunbird de Pontiac, que están en este momento almacenados en una planta.

Recuérdese que uno de los criterios para utilizar la distribución binomial es que la probabilidad de éxito permanece igual de un ensayo a otro. Cuando el muestreo se realiza sin reposición la probabilidad de éxito no permanece igual de un ensayo a otro, y no debe utilizarse la distribución binomial. En vez de esto, debe aplicarse

* **(N. del R.)** Erróneamente suele decirse "reemplazo" en vez de reposición, por una traducción impropia del término inglés replacement, que en este caso corresponde a la acción de reponer y no de sustituir o reemplazar.

la *distribución hipergeométrica*. Por tanto, 1) si se selecciona una muestra de una población finita sin reposición, y 2) si el tamaño de la muestra n es mayor que 5% del tamaño de la población N, entonces se utiliza la distribución hipergeométrica para determinar la probabilidad de un número específico de éxitos y/o fracasos. Resulta muy adecuada cuando el tamaño de la población es pequeño.

La fórmula para la distribución hipergeométrica es:

$$\boxed{P(r) = \frac{({}_S C_r)({}_{N-S} C_{n-r})}{{}_N C_n}}$$

en donde:

- N es el tamaño de la población.
- S es el número de éxitos en la población.
- r es el número de éxitos que interesan. Puede ser 0, 1, 2, 3, ...
- n es el tamaño de la muestra o el número de ensayos.
- C es el símbolo para combinación.

✱ Ejemplo

Supóngase que durante la semana se fabricaron 50 radiotransceptores ($N = 50$). Operaron sin problemas 40 ($S = 40$) y 10 tuvieron al menos un defecto. Se selecciona al azar una muestra de 5 ($n = 5$). Utilizando la fórmula hipergeométrica, ¿cuál es la probabilidad que cuatro ($r = 4$) de los cinco operarán sin problemas? (Observe que el muestreo se hace sin reposición y que el tamaño de muestra de 5 es $\frac{5}{50}$, o 10% de la población. Esto es mayor que la condición de 5%.)

✔ Solución

En este problema,

- N = 50, número de transceptores fabricados.
- n = 5, tamaño de la muestra.
- S = 40, número de transceptores en la población que opera sin problemas.
- r = 4, número en la muestra que opera sin problemas.

Se desea determinar la probabilidad que cuatro transceptores de los cinco seleccionados operen sin problemas.

Sustituyendo estos valores en la fórmula hipergeométrica, y resolviéndola para evaluar la probabilidad que cuatro de los cinco transceptores de la muestra operen sin problemas, resulta

$$P(r) = \frac{({}_S C_r)({}_{N-S} C_{n-r})}{{}_N C_n}$$

$$P(4) = \frac{({}_{40}C_4)({}_{50-40}C_{5-4})}{{}_{50}C_5}$$

$$= \frac{\left(\frac{40!}{4!36!}\right)\left(\frac{10!}{1!9!}\right)}{\frac{50!}{5!45!}}$$

Podemos invertir el denominador y después multiplicar:

$$P(4) = \left(\frac{40!}{4!36!}\right)\left(\frac{10!}{1!9!}\right)\left(\frac{5!45!}{50!}\right)$$

$$= \frac{40(39)(38)(37)(\cancel{36!})}{4!\cancel{36!}} \cdot \frac{10(\cancel{9!})}{1(\cancel{9!})} \cdot \frac{5!(\cancel{45!})}{50(49)(48)(47)(46)(\cancel{45!})}$$

$$= 91\,390 \times 10 \times .000000471$$

$$= 0.431337197, \text{ o bien } 0.431, \text{ redondeado}$$

De esta forma, la probabilidad de seleccionar al azar 5 transceptores de 50, y descubrir que 4 de los 5 operan sin problemas es 0.431.

Las probabilidades hipergeométricas de encontrar que cero, uno, dos, tres, cuatro y cinco transceptores de los seleccionados al azar, funcionan, se dan en la tabla 6-8.

TABLA 6-8

Probabilidades hipergeométricas ($n = 5$, $N = 50$, $S = 40$) que los transceptores operen correctamente

Número que funcionó correctamente	*Probabilidad*
0	0.000*
1	0.004
2	0.044
3	0.210
4	0.431
5	0.311

* En realidad, 0.0001.

Las probabilidades hipergeométricas se aproximan muy de cerca a las probabilidades binomiales. Para comparar, en la tabla 6-9 se proporcionan las probabilidades hipergeométrica y binomial para el problema de los transceptores. (Puesto que 40 de los 50 transceptores operaron en forma correcta, la probabilidad binomial de seleccionar un transceptor perfecto es $\frac{40}{50} = 0.80$. Las probabilidades binomiales para la tabla que sigue provienen de la tabla binomial del apéndice A, $n = 5$, $p = 0.80$.)

TABLA 6-9

Probabilidades hipergeométricas y binomiales para el problema de los transceptores

Número de transceptores en la muestra que funcionan correctamente r	*Probabilidad hipergeométrica* $P(r)$	*Probabilidad binomial** $(n = 5, p = 40/50 = 0.80)$
0	0.000	0.000
1	0.004	0.006
2	0.044	0.051
3	0.210	0.205
4	0.431	0.410
5	0.311	0.328

* Del apéndice A para n = 5 y p = 0.80, obtenido de 40/50.

Señalamos que cuando la condición binomial de una probabilidad constante de éxito no puede cumplirse, hay que utilizar la distribución hipergeométrica en su lugar. Sin embargo, según lo muestra la tabla 6-9, bajo muchas condiciones los resultados de la binomial se aproximan mucho a los de la hipergeométrica. Como regla empírica, si los elementos seleccionados no se devuelven a la población y el tamaño de la muestra es menor que 5% de la población, puede utilizarse la distribución binomial para aproximar la distribución hipergeométrica. Esto es, cuando $n < 0.05N$, la aproximación binomial debe ser suficiente.

AUTOEXAMEN 6-7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Consulte el ejemplo de los transceptores y la tabla 6-8. Verifique la probabilidad hipergeométrica de 0.210, que tres de los cinco transceptores seleccionados al azar operen en forma correcta.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de números impar se dan al final del libro.

9. En Kolzak Appliance se acaba de recibir un embarque de 10 aparatos de TV. Poco después de recibirlos, el fabricante llamó para informar que por descuido se habían enviado tres aparatos defectuosos. Se decidió probar dos de éstos. ¿Cuál es la probabilidad que ninguno de los dos esté defectuoso?
10. El Departamento de sistemas de cómputo de una institución está formado por ocho profesores, seis de los cuales son de base. El Dr. Vonder, el director, desea establecer un comité de tres miembros del profesorado del departamento para revisar el plan de estudios. Si selecciona el comité al azar, ¿cuál es la probabilidad que todos los integrantes del comité sean de base? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un elemento no sea de base? (Sugerencia: para este caso utilice la regla del complemento.)

11. Una florería tiene 15 vehículos de reparto que se utilizan principalmente para llevar flores y arreglos florales en una ciudad. Supóngase que 6 de los 15 camiones tienen problemas con los frenos. Se seleccionaron cinco vehículos al azar para probarlos. ¿Cuál es la probabilidad que dos de los camiones probados tengan frenos defectuosos?
12. Un profesor tiene un conjunto de 15 preguntas de opción múltiple referentes a distribuciones probabilísticas. Cuatro de estas preguntas se relacionan con la distribución hipergeométrica. ¿Cuál es la probabilidad que al menos una de estas preguntas sobre la distribución hipergeométrica aparezca en el examen de cinco preguntas del próximo lunes?

DISTRIBUCION PROBABILISTICA DE POISSON

Las distribuciones probabilísticas binomiales para probabilidades de éxito (p) menores de 0.05 podrían calcularse, pero esto tomaría demasiado tiempo (en especial para una n grande de, por ejemplo, 100 o más). La distribución de probabilidades se volvería cada vez más sesgada conforme la probabilidad de éxito fuera más pequeña. La forma límite de la distribución binomial cuando la probabilidad de éxito es muy pequeña y n es grande, se denomina **distribución probabilística de Poisson**. La distribución recibe su nombre en honor de Simeon Poisson, quien la estudió y dio a conocer en 1837. Con frecuencia se denomina *ley de eventos improbables*, lo cual significa que la probabilidad p que suceda un evento específico es bastante pequeña. La distribución de Poisson es una distribución probabilística discreta porque *se forma contando algo*.

La distribución tiene muchas aplicaciones. Se utiliza como modelo para describir fenómenos como la distribución de errores en captura de datos, el número de rayaduras y otras imperfecciones en piezas recientemente pintadas, el número de partes defectuosas en embarques de salida, el número de clientes en espera de servicio en un restaurante, o en espera de entrar a una de las atracciones en una feria, y el número de accidentes en una carretera durante un periodo de tres meses.

La distribución de Poisson puede describirse matemáticamente utilizando la fórmula:

$$\boxed{P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{P(x) = \frac{\mu^x}{x!e^{\mu}}}$$

en donde

- μ (mu) es la media aritmética del número de ocurrencias (éxitos) en un intervalo de tiempo dado.
- e es la constante 2.71828 (base del sistema logarítmico neperiano).
- x es el número de ocurrencias (éxitos).
- $P(x)$ es la probabilidad que se va a calcular para un valor dado de x.

El número medio de éxitos μ puede determinarse en situaciones binomiales por medio de np, en donde n es el número total de ensayos, y p la probabilidad de éxito.

$$\boxed{\mu = np}$$

Si, por ejemplo, la probabilidad de que sea devuelto un cheque girado contra un banco es 0.0003, y se cambian a efectivo 10 000 cheques, el número medio de documentos no aceptables es 3.0, que se obtiene por $\mu = np = 10\,000\,(0.0003) = 3.0$.

Recuérdese que para una distribución binomial existe un número determinable de éxitos. Por ejemplo, en el caso de una prueba de opción múltiple de cuatro preguntas puede haber sólo cero, uno, dos, tres o cuatro éxitos (número correcto). Sin embargo, la variable aleatoria x para una distribución de Poisson puede tomar un *número infinito de valores*, esto es, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Pero las probabilidades se *vuelven muy pequeñas después de las primeras ocurrencias (éxitos).*

Para ilustrar el cálculo de una probabilidad de Poisson, considérese que los empleados de facturación rara vez cometen errores en la captura de datos de facturas. Desde luego, muchas de éstas no tienen errores; algunas tienen uno; unas cuantas tienen dos; rara vez una factura tendrá tres errores; y así sucesivamente. Una muestra aleatoria de 1 000 facturas reveló 300 errores. De esta forma, la media aritmética del número de errores por factura es 0.3, que se obtiene por 300/1 000. Esta es una media muestral, $\overline{X}$, que se utiliza para estimar la media poblacional, μ, para un modelo (de Poisson) del proceso.

La probabilidad que no aparezcan errores (0) en una factura se calcula por

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!e^{\mu}}$$

Sustituyendo:

$$P(0) = \frac{0.3^0}{0!(2.71828)^{0.3}} \quad 0.7408$$

Sin embargo, calcular las probabilidades para una distribución de Poisson utilizando la fórmula toma mucho tiempo. Como ayuda, en el apéndice C se presenta una tabla de probabilidades de Poisson para varios valores de μ.

✱ Ejemplo

Recuérdese del ejemplo anterior que el número medio de errores por factura se estimó en 0.3. Esto es, $\mu = 0.3$. ¿Cuál es la probabilidad de no encontrar errores en una factura seleccionada al azar? ¿Cuál es la probabilidad de hallar exactamente un error?

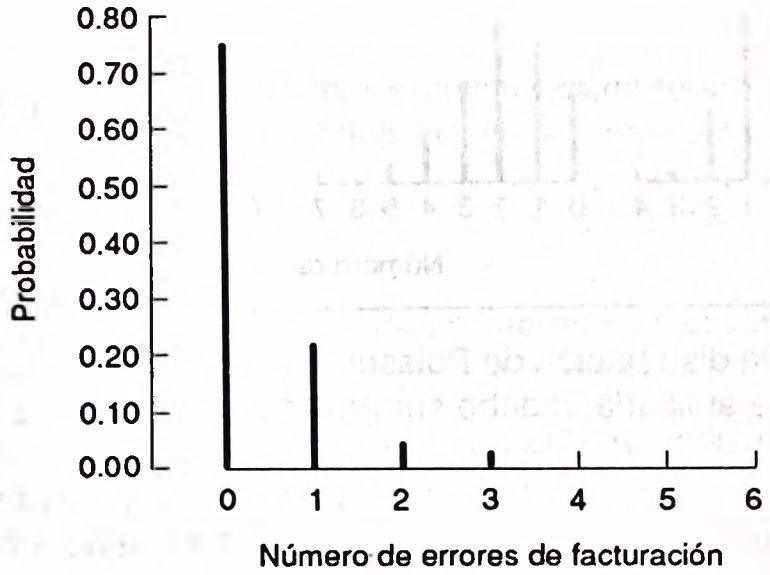
✔ Solución

Consulte el apéndice C. Localice la columna con el encabezado $\mu = 0.3$. Leyendo hacia abajo en esa columna, la probabilidad de cero éxitos (ningún error) es 0.7408. La probabilidad de exactamente un error es 0.2222. La distribución de Poisson para cero, uno, dos, tres y cuatro éxitos (errores) se da a continuación utilizando el sistema MINITAB. Los resultados se presentan en el diagrama 6-6.

```
MTB > pdf ;
SUBC> poisson mu = .3 .

POISSON WITH MEAN = 0.300
K          P(X = K)
0          0.7408
1          0.2222
2          0.0333
3          0.0033
4          0.0003
5          0.0000
```

DIAGRAMA 6-6

Distribución de Poisson, probabilística binomial, para μ = 0.3



AUTOEXAMEN 6-8

Las respuestas se dan al final del capítulo.

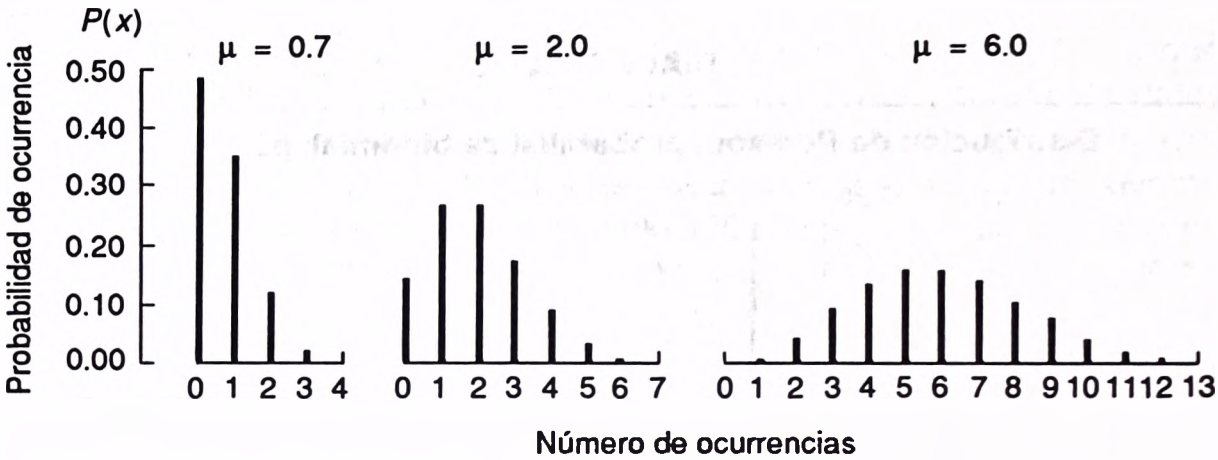
Un productor de semillas híbridas tiene problemas con gusanos barrenadores del maíz. Una verificación aleatoria de 5 000 mazorcas reveló estos datos: Muchas de las mazorcas no contenían gusanos. Algunas tenían uno; unas cuantas tenían dos; etc. La distribución del número de barrenadores por mazorca se aproximó a la distribución de Poisson. El productor contó 3 500 gusanos en las 5 000 mazorcas.

1. ¿Cuál es la probabilidad que una mazorca seleccionada al azar no contenga gusanos?
2. Idee una distribución probabilística de Poisson para este experimento.
3. Grafique la distribución.

La distribución probabilística de Poisson siempre tiene sesgo positivo. Además, la variable aleatoria de Poisson no tiene límite superior específico. Las distribuciones de Poisson para el ejemplo de captura de datos, en donde $\mu = 0.3$, y para el experimento de los gusanos barrenadores de maíz, en donde $\mu = 0.7$ tienen gran asimetría. Conforme μ se vuelve mayor, la distribución de Poisson se vuelve casi simétrica. Como ejemplos, en el diagrama 6-7 se muestran las distribuciones para medias de 0.7, 2.0 y 6.0.

DIAGRAMA 6-7

Distribución probabilística de Poisson para medias de 0.7, 2.0 y 6.0



Resumiendo, la distribución de Poisson en realidad es un grupo de distribuciones discretas. Para aplicarla, *n* debe ser grande, como 1 000 piezas cortadas. Por lo contrario, la probabilidad *p* de un defecto, error, y similares, debe ser pequeña. Todo lo que se necesita para elaborar una distribución probabilística de Poisson es el número promedio de defectos, errores, etc., que se denota por μ. Esta cantidad se calcula por medio de *np*.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. La Sra. García está encargada de los préstamos en un banco. Con base en sus años de experiencia, estima que la probabilidad de que un solicitante no sea capaz de pagar oportunamente su préstamo es 0.025. El mes pasado realizó 40 préstamos.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que 3 préstamos no se paguen oportunamente?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que al menos 3 préstamos no se liquiden a tiempo?
14. Los automóviles llegan a una salida (Stoney Ridge) de una carretera a razón de dos por minuto. La distribución de llegadas se aproxima a una distribución de Poisson.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que en un minuto específico no lleguen automóviles?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que al menos un automóvil llegue durante un minuto específico?
15. Se estima que 0.5% de las llamadas telefónicas a la Southwest Insurance Company reciben la señal de ocupado. ¿Cuál es la probabilidad que de las 1 200 llamadas telefónicas del día de hoy, al menos 5 hayan recibido la señal de ocupado?

16. Los autores y editores de libros trabajan mucho para minimizar el número de errores en un texto. Sin embargo, algunos errores pasan inadvertidos. La Srita. García Díaz, supervisora editorial de estadística, informa que el número medio de errores por capítulo es 0.8. ¿Cuál es la probabilidad que haya menos de dos errores en un capítulo específico?

RESUMEN

En este capítulo se presentaron tres distribuciones probabilísticas discretas: *la distribución binomial, la distribución hipergeométrica* y la *distribución de Poisson.* La distribución probabilística binomial describe el resultado de un experimento que sólo toma dos formas: un éxito o un fracaso.

Una distribución *probabilística binomial acumulativa* es útil cuando es necesario conocer la probabilidad de menor que, o mayor que, un número específico de ocurrencias.

Una *distribución hipergeométrica* resulta adecuada para determinar la probabilidad de un número específico de éxitos en una muestra. Debe utilizarse al muestrear sin reposición. Sin embargo, los cálculos son muy tediosos. Como las probabilidades para la distribución hipergeométrica se aproximan mucho a la binomial, por lo común se aplica la fórmula binómica.

Una distribución de Poisson se refiere a experimentos en los que el número de ensayos es muy grande y la probabilidad de éxito muy pequeña.

Recapitulación

I. Distribución probabilística.
   A. La media (μ) de una distribución de probabilidad se obtiene multiplicando cada resultado por su probabilidad de ocurrencia, y sumando luego estos productos:

$$\mu = \Sigma[X \cdot P(X)]$$

   B. La variancia de una distribución probabilística mide su dispersión. Se calcula determinando la diferencia entre cada observación y la media, elevando al cuadrado estas diferencias, multiplicándolas en seguida por las probabilidades y sumando por último esos productos:

$$\sigma^2 = \Sigma[X - \mu)^2 \cdot P(X)]$$

   La desviación estándar es la raíz cuadrada de la variancia.

II. Distribución probabilística binomial.
   A. Características.
      1. Sólo hay dos posibles resultados para cada ensayo.
      2. Los datos provienen de conteos. Por tanto, una distribución probabilística binomial es una distribución discreta; se necesitan n y p para su elaboración.
      3. Las probabilidades de un éxito y un fracaso permanecen iguales para todos los ensayos.
      4. No existe un patrón para los resultados de los ensayos; esto es, los ensayos son independientes.
   B. La fórmula es:

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n - r)!} (p)^r (q)^{n-r}$$

III. Distribución binomial acumulativa
   A. Una distribución probabilística binomial acumulativa "menor que", se obtiene sumando las probabilidades hacia abajo. Una distribución "mayor que", se genera sumando las probabilidades hacia arriba.

IV. Distribución hipergeométrica.
   A. Se emplea 1) cuando la muestra se selecciona a partir de una población finita sin reposición, y 2) el tamaño de la muestra es mayor de 5% del tamaño de la población.
   B. La fórmula es:

$$P(r) = \frac{({}_S C_r)({}_{N-S} C_{n-r})}{{}_N C_n}$$

V. Distribución de probabilidad de Poisson.
   A. Además de las cuatro características de una distribución de probabilidad binomial, otras dos características son: 1) la probabilidad de éxito es muy pequeña, y 2) *n* es muy grande. También es una distribución discreta. La fórmula es:

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x!e^{\mu}}$$

   B. En vez de calcular probabilidades de Poisson, resulta más conveniente leerlas de una tabla (apéndice C). Para generar una distribución de Poisson, sólo se necesita μ. Se obtiene mediante *np*, en donde *n* es el número de ensayos y *p* es la probabilidad de éxito.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

17. El gerente de personal de una empresa está estudiando el número de accidentes en el trabajo durante un periodo de un mes. Elaboró la distribución probabilística que sigue.

Número de accidentes	*Probabilidad*
0	0.40
1	0.20
2	0.20
3	0.10
4	0.10

Calcule la media, la variancia y la desviación estándar.

18. Una pastelería ofrece pasteles con decoración especial para cumpleaños, bodas y otras ocasiones. También tiene pasteles normales en su tienda. En la tabla que sigue se proporciona el número total de pasteles vendidos al día y las probabilidades correspondientes.

Número de pasteles vendidos en un día	*Probabilidad*
12	0.25
13	0.40
14	0.25
15	0.10

Calcule la media, la variancia y la desviación estándar para el número de pasteles vendidos por día.

19. Un analista de valores vigiló muy de cerca las acciones comunes NPC durante 50 días de actividad en la bolsa, y registró los datos que siguen.

Monto del cambio	*Número de días*
$-\frac{1}{4}$	6
$-\frac{1}{8}$	12
0	17
$\frac{1}{8}$	9
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2

¿Esta información corresponde a una distribución probabilística discreta? Si la respuesta es afirmativa, convierta la información a una distribución probabilística. Calcule la media y la variancia.

20. Una máquina herramienta de cierta marca está produciendo 10% de piezas defectuosas, lo que es anormalmente elevado. El ingeniero de control de calidad ha estado verificando la producción por medio de muestreo casi continuo desde que empezó la condición anormal. ¿Cuál es la probabilidad que en una muestra de 10 piezas:
    a. ¿Exactamente 5 están defectuosas?
    b. ¿5 o más estén defectuosas?

21. Una prueba de aptitudes mecánicas incluye cinco problemas para determinar si la persona que realiza la prueba puede o no distinguir las formas y objetos. Por ejemplo, a una persona se le dan cuatro bloques de tamaños ligeramente distintos y debe indicar con rapidez cuál es el mayor.

La persona sólo puede seleccionar un bloque. De esta forma, la elección es correcta o incorrecta. Esto se repite con bloques redondos, romboidales, etc. Si se considera que la persona no puede distinguir los tamaños:

a. ¿Cuál es la probabilidad de adivinar las cinco identificaciones en forma correcta?
b. ¿Cuál es la probabilidad de no identificar ninguna de las cinco formas correctamente?
c. ¿Cuál es la probabilidad de lograr una o más identificaciones correctas?

22. Las clases de primer grado de primaria en un distrito escolar están llenas, y es necesario agregar nuevos grupos. Considérese que la mitad de los alumnos de siete años que se van a inscribir son niños, y la otra mitad, niñas. El tamaño de los grupos está limitado a 18 alumnos.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 9 niños y 9 niñas estén en un grupo?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que haya 11 o más niños en el grupo de nueva creación? ¿Es esto lo mismo que la probabilidad que haya menos de 7 niñas en el grupo de 18?
    c. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 7 niñas y 11 niños se inscriban en el nuevo grupo?
    d. ¿Cuál es la probabilidad que el primer día de clases, al abrirse las puertas el primer alumno de 7 años que entre al salón sea una niña?
23. En una comunidad del suroeste de Estados Unidos 13% de la población es de habla hispana. A una persona de esta índole se le acusa de asesinar a un ciudadano que no es de habla hispana. De los primeros 12 posibles jurados, sólo 2 son hispánicos y 10 no. El abogado defensor se opone a la selección del jurado, afirmando que existe un sesgo en contra de su cliente. El fiscal no está de acuerdo, afirmando que la probabilidad de esta composición específica del jurado es común. ¿Qué cree usted?
24. Una empresa manufacturera inició la producción de un nuevo elemento. La producción incluye soldar, insertar transistores, etc. Cada elemento se inspeccionó al final de la línea de ensamble y se registró el número de defectos por unidad. En los primeros 100 elementos producidos, hubo 40 defectos. Algunos de aquellos no tenían defectos, otros tenían un defecto, y así sucesivamente. La distribución de defectos siguió una de Poisson. Con base en los primeros 100 elementos producidos, ¿aproximadamente cuántos de cada 1 000 de ellos ensamblados tendrán uno o más defectos?
25. El departamento de producción de una fábrica de automóviles instaló una nueva máquina aerosólica para pintar las puertas de los automóviles. Como es común con la mayoría de los aplicadores de aerosol, suelen aparecer pequeñas manchas debido a una mezcla inadecuada o a otros problemas. Un trabajador contó el número de manchas en cada puerta. La mayoría de las puertas no tenían manchas, algunas tenían una, muy pocas tenían dos, y así sucesivamente. El número promedio fue de 0.5 por puerta. Las manchas seguían una distribución de Poisson.
    a. ¿De 10 000 puertas pintadas, aproximadamente cuántas no tendrán manchas?
    b. ¿De 10 000 puertas pintadas, cuántas tendrán dos o más manchas?
26. Un establecimiento anunció un servicio "el mismo día". Desafortunadamente, el movimiento de los pedidos no fue según se había planeado. Hubo un gran número de quejas. Después se realizó una modificación total en el manejo de los pedidos que llegaban y las que salían. Se fijó un objetivo interno de tener menos de cinco órdenes no cubiertas (por selector) al final de 95 de cada 100 días laborales. Verificaciones frecuentes de los pedidos no cubiertos al final del día, revelaron que su distribución se aproximaba a una distribución de Poisson; esto es, en la mayoría de los días no había órdenes pendientes, en algunos de los días había un pedido, etc. El número promedio de órdenes no cubiertas por selector fue 2.0.
    a. ¿Se ha cubierto el objetivo interno del establecimiento? Mencione evidencias.

b. Trace un histograma que represente la distribución probabilística de Poisson de órdenes o pedidos no cubiertos al final del día.

27. En la empresa Columbus Tool & Die se tienen 100 taladros y otras máquinas en uso constante. La probabilidad que una máquina quede fuera de operación durante un día dado es 0.002. Durante algunos días todas las máquinas están funcionando; durante otros, una, dos, tres, o más no operan bien.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que para un día específico no haya máquinas que estén operando?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que menos de dos máquinas no operen durante un día específico?
    c. Una operaria de máquina afirma que ha observado en muchas ocasiones tres o más máquinas inoperantes durante el día. ¿Parece lógica su afirmación? ¿Por qué sí o por qué no?

28. Supóngase que 1.5% de los espaciadores de plástico producidos por una máquina de moldeado por eyección de alta velocidad, son defectuosos. La distribución de defectos sigue una de Poisson. Para una muestra aleatoria de 200 espaciadores, determine la probabilidad de que:
    a. Ninguno de los espaciadores sea defectuoso.
    b. Tres o más sí lo sean.

29. Un estudio de las filas en las cajas registradoras de salida en un supermercado reveló que durante un cierto periodo en la hora más pesada, el número de clientes en espera, era en promedio de cuatro. Cuál es la probabilidad que durante ese periodo:
    a. ¿No haya clientes esperando?
    b. ¿Cuatro clientes estén en espera?
    c. ¿Cuatro o menos clientes esperen?
    d. ¿Cuatro o más clientes estén esperando?

30. Una caja de piezas eléctricas contiene seis de una cierta marca. Dos son defectuosas, y cuatro funcionan correctamente. Se seleccionan tres piezas de la caja. Utilizando la fórmula hipergeométrica, ¿cuál es la probabilidad que exactamente una de las piezas sea defectuosa?

31. Con relación al ejercicio 30. ¿Cuál es la probabilidad que dos piezas de las tres seleccionadas sean defectuosas?

32. Las ventas de ciertos automóviles en un área urbana siguen la distribución de Poisson, con una media de 3.00 al día.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que ninguno se venda en un día específico?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que durante cinco días consecutivos al menos un auto de esa marca se venda?

33. Se acaba de poner a prueba un dentífrico de nuevo sabor. Lo probó un grupo de 10 personas. Del grupo, seis afirmaron que les agradaba el nuevo sabor, y las cuatro restantes indicaron lo contrario. Se seleccionan cuatro de las 10 personas para participar en una entrevista prolongada. ¿Cuál es la probabilidad que de las personas seleccionadas para la entrevista a dos les guste el nuevo sabor y a dos no les agrade?

34. Suponga que se sabe que 5 de 25 automóviles subcompactos, al salir de la línea de ensamble, necesitan ajuste de algún tipo. Se seleccionan al azar cuatro vehículos. Interesa la probabilidad que exactamente uno necesite ajuste.

a. Resuelva el problema considerando que de los 25 subcompactos, las muestras se extraen sin reposición.
b. Resuelva el problema suponiendo que el muestreo se realiza con reposición.
c. Considerando un muestreo con reposición, resuelva el problema utilizando la distribución de Poisson.

35. En un club de futbol se realiza un sorteo para cada partido local. Para el encuentro de esta semana se vendieron 1 000 boletos a $5 cada uno. Se elegirá un solo ganador al azar y se le entregará un premio de $500. ¿Cuál es la cantidad media ganada, o perdida, por cada persona que compró un boleto? Interprete el resultado.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. En un intento para burlar la vigilancia en la aduana de un aeropuerto, un viajero colocó cinco tabletas de narcótico en un frasco que contiene siete pastillas de vitaminas de apariencia semejante. Si el inspector aduanal selecciona tres de las tabletas al azar para analizarlas, ¿cuál es la probabilidad de arrestar al viajero por posesión ilegal de narcóticos?
2. En una urna hay 10 monedas de 5 centavos, 10 de 10, 15 de 25, y 15 de 50. Se extrae una moneda al azar.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una moneda de 10 centavos?
   b. ¿Cuál es el valor medio de cada selección?
   c. ¿Cuál es la variancia de la selección?
3. El 28 de enero de 1986, el trasbordador espacial Challenger estalló a una altura de 46 000 pies, provocando la muerte de siete astronautas. Un estudio realizado en 1985 publicado por la National Aeronautics and Space Administration (NASA) indicó que la probabilidad de una catástrofe como este desastre era aproximadamente 1 en 60 000. Un informe semejante de la fuerza aérea indicó la posibilidad de una catástrofe en 1 de 35. El Challenger era la misión número 25 del programa de trasbordadores espaciales. Utilice la distribución de Poisson para comparar las probabilidades de al menos un desastre en 25 misiones, empleando ambas estimaciones dé la probabilidad de ocurrencia.
4. De acuerdo con la "teoría de enero", si la bolsa de valores está a la "alza" durante el mes de enero, estará a la alza durante todo el año. Si está a la baja en enero, estará a la baja durante el año. De acuerdo con un artículo de la edición del 1 de febrero de 1984, del *The Wall Street Journal*, esta teoría se cumplió durante 29 de los últimos 34 años. Suponga que esta teoría es falsa. ¿Cuál es la probabilidad que esto pudiera suceder aleatoriamente? (Necesitará utilizar una computadora; emplee la distribución binomial.)

EXAMEN CAPITULO 6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para las preguntas 1–10, indique si el enunciado es falso o verdadero. Si es falso, señale la respuesta correcta.

1. Una distribución probabilística es un listado de los resultados de un experimento y las probabilidades asociadas a cada uno.
2. Para elaborar una distribución probabilística binomial, debe conocerse el número de ensayos y la probabilidad de éxito.

3. La distribución probabilística de Poisson es una distribución continua.
4. Una distribución probabilística binomial puede describirse utilizando la fórmula:

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}(p)^r(q)^{n-r}$$

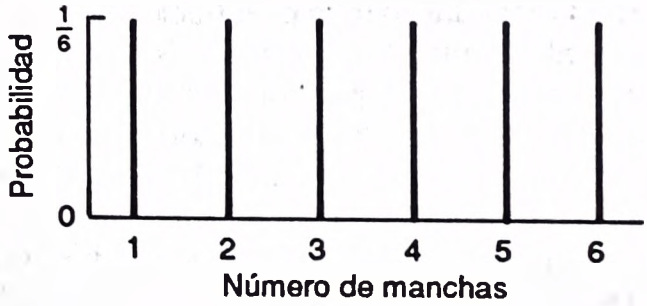
5. Si se puede medir algo, como el peso de una caja, a la variable se le denomina variable aleatoria, discreta o continua.
6. Tanto la distribución binomial como la de Poisson se ocupan de experimentos que sólo tienen dos posibles resultados, un éxito o un fracaso.
7. Si 20% de un grupo de personas son miopes, y se selecciona un gran número de muestras aleatorias de 20 personas, es razonable esperar que poco más de la mitad de las muestras no contenga alguna o exactamente una persona corta de vista.
8. Si 0.1% (se expresa como 0.001) de las lámparas eléctricas producidas por una máquina son defectuosas, la probabilidad de no encontrar alguna lámpara defectuosa en una muestra de 100, es aproximadamente 0.90. Considere una distribución de Poisson.
9. Si el número de ensayos permanece constante, la forma de una distribución binomial tiende a volverse más simétrica conforme p aumenta.
10. Si no leyó el capítulo y adivinó la respuesta a cada una de estas 10 preguntas de verdadero o falso, la probabilidad que haya adivinado las 10 en forma correcta es 1 en 1 000.
11. Las estadísticas médicas actuales indican que 20% de la población contraerá cáncer durante su vida. Se selecciona al azar un grupo de 12 recién nacidos.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 5 niños del grupo contraigan la enfermedad durante su vida?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que al menos 5 contraigan el padecimiento durante su vida?
    c. Calcule la media, la variancia y la desviación estándar para la distribución.
12. Un entrenador de un equipo colegial de basquetbol tiene 12 jugadores. Ocho de ellos tienen becas deportivas y 4 no. Recientemente el equipo ha perdido la mayoría de los partidos. El entrenador decide seleccionar los nombres de 5 jugadores tomando papeletas de un sombrero, y utilizarlos como la alineación inicial. ¿Cuál es la probabilidad que 4 de los 5 jugadores seleccionados tengan beca?
13. Suponga que había 200 estudiantes en su clase de graduación de bachillerato. Las estadísticas actuales indican que 0.5%, o sea, 0.005, de esa población, se volverán millonarios. ¿Cuál es la probabilidad que al menos un estudiante de su grupo se vuelva millonario?

Autoexámenes

6-1 1.

Número de manchas	*Probabilidad*
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{6}{6} = 1.00$

2.



3. $\frac{6}{6}$, o bien 1.

6-2 1. Sí. La suma de las probabilidades es 1.00.

2.

x	$P(x)$	$xP(x)$
50	0.30	15.0
75	0.50	37.5
90	0.20	18.0
		70.5

La media es 70.5 centavos.

3.

x	$P(x)$	$(x - \mu)$	$(X - \mu)^2 P(x)$
50	0.30	− 20.5	126.075
75	0.50	4.5	10.125
90	0.20	19.5	76.050
			212.25

La variancia es 212.25 y la desviación estándar 14.57 centavos.

6-3 1. a. Para cada pregunta de opción múltiple, un estudiante adivina la respuesta en forma correcta (éxito) o incorrecta (fracaso).

b. La distribución de éxitos es discreta y resulta de un conteo del número de éxitos.

c. La probabilidad de que un estudiante adivine cada respuesta en forma correcta es $^1/_5$ o sea 0.20.

d. Los ensayos son independientes, lo cual significa que un éxito o fracaso, en cualquier pregunta, no afecta el resultado de cualquier otra.

2. $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$

6-4 0.3750, obtenido calculando:

$$P(2) = \frac{4!}{2!(4 - 2)!}(0.50)^2(0.50)^{4-2}$$
$$= (6)(0.50)^2(0.50)^2$$
$$= (6)(0.25)(0.25)$$

6-5 $n = 7, p = 0.20$.

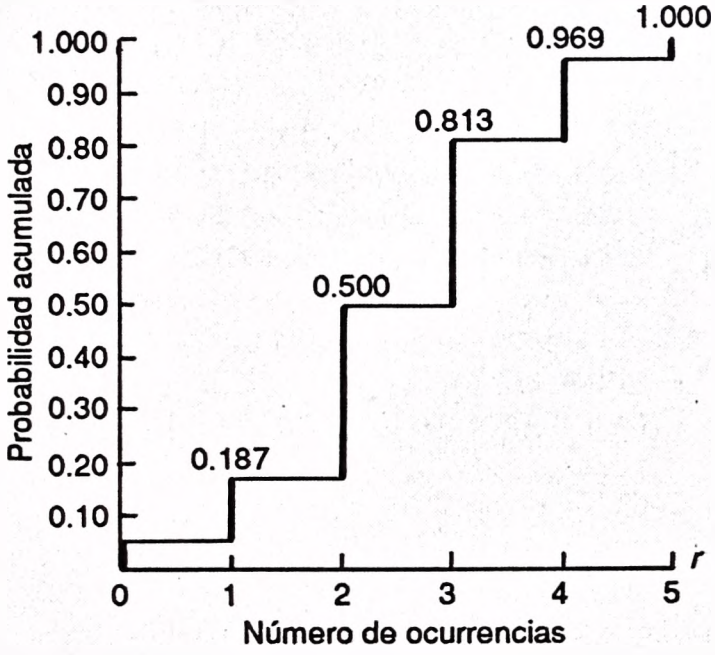
	r	*Probabilidad*
1.	0	0.210
2.	1	0.367

	r	Probabilidad
3.	2	0.275
	3	0.115
	4	0.029
	5	0.004
	6	0.000
	7	0.000
4.	1.000	

6-6 1. a. 2

Número de ocurrencias r	Probabilidad P(r)	Probabilidad acumulada "menos de"
0	0.031	0.031
1	0.156	0.187
2	0.313	0.500
3	0.313	0.813
4	0.156	0.969
5	0.031	1.000

b.

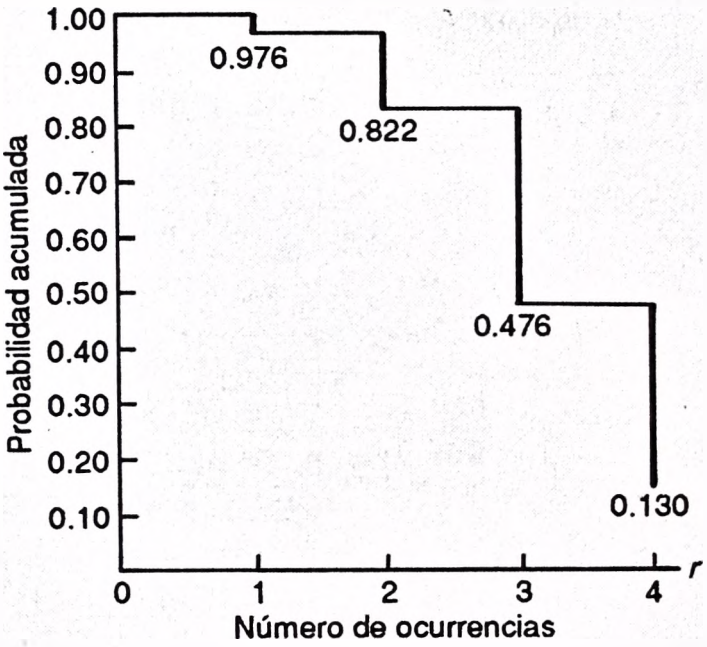


2. a.

Número de ocurrencias r	Probabilidad P(r)	Probabilidad acumulada "más de"
0	0.026	1.000*
1	0.154	0.976
2	0.346	0.822
3	0.346	0.476
4	0.130	0.130

* En realidad es 1.002. La discrepancia se debe al redondeo.

b.



6-7 0.210, obtenido por:

$$P(3) = \frac{({}_{40}C_3)({}_{10}C_2)}{{}_{50}C_5}$$

$$= \frac{\left(\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right)\left(\frac{10 \cdot 9}{2}\right)}{\left(\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right)}$$

$$= \frac{(9\,880)(45)}{(2\,118\,760)} = 0.210$$

6-8 1. 0.4966. μ = 0.7, obtenido por 3 500/5 000. Recurra al apéndice C, para una μ de 0.7 y una x de 0.

2.

Número de ocurrencias x	*Probabilidad de ocurrencia* $P(x)$
0	0.4966
1	0.3476
2	0.1217
3	0.0284
4	0.0050
5	0.0007
6	0.0001

3.

Examen capítulo 6

1. Verdadero.
2. Verdadero.
3. Falso. Es una distribución discreta.
4. Verdadero.
5. Falso. Se denomina variable aleatoria continua.
6. Verdadero.
7. Falso. Sólo 7%, aproximadamente de las muestras contendrá cero o una persona miope, lo cual se determina mediante el apéndice A para los $n = 20$ y $p = 0.20$. Por suma, $P(0) + P(1) = 0.012 + 0.058 = 0.07$, o sea 7%.
8. Verdadero. $\mu = np = 100(0.001) = 0.1$. Por referencia al apéndice C para una μ de 0.1, la probabilidad de cero defectuosos es 0.9048, o aproximadamente 0.90.
9. Verdadero.
10. Verdadero. Por referencia el apéndice A, para $n = 10$, $p = 0.50$ y $r = 10$, la probabilidad es 0.001, que equivale a 1 en 1 000.
11. a. $P(5) = 0.053$.
    b. $P(r \geq 5) = 0.073$
    c. $\mu = 12(0.20) = 2.4$, $\sigma^2 = 12(0.20)(0.80) = 1.92$. Desviación estándar $= 1.39$ bebés.
12. 0.354, obtenido por:

$$P(4) = \frac{({}_8C_4)({}_4C_1)}{{}_{12}C_5} = \frac{\left(\frac{8!}{4!4!}\right)\left(\frac{4!}{3!1!}\right)}{\left(\frac{12!}{7!5!}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right)4}{\left(\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right)} = \frac{280}{792} = 0.354$$

13. $\mu = np = 200(0.005) = 1.00$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X - 0) = 1 - 0.3679 = 0.6321$.

7

Distribución probabilística normal

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Enlistar las características de una distribución de probabilística normal.
2. Definir y calcular valores z.
3. Determinar la probabilidad que una observación esté entre dos puntos utilizando la distribución normal estándar.
4. Determinar la probabilidad que una observación esté arriba o abajo de un valor, utilizando la distribución normal estándar.
5. Comparar dos o más observaciones que estén en distintas distribuciones probabilísticas.
6. Utilizar la distribución de probabilidad normal para aproximar la distribución probabilística binomial.

El capítulo 6 estuvo dedicado a tres distribuciones probabilísticas *discretas:* la binomial, la hipergeométrica y la de Poisson. Recuérdese que estas distribuciones se basan en variables aleatorias discretas, que pueden tomar sólo valores especificados. Por ejemplo, el número de respuestas correctas a una encuesta que contiene 10 preguntas sólo puede ser 0, 1, 2, 3, . . . , 10. No puede haber un número negativo de respuestas, como –7 respuestas, ni puede haber $7\frac{1}{4}$ o 15 respuestas correctas.

Continuaremos el estudio de las distribuciones probabilísticas en este capítulo, examinando una distribución de probabilidad *continua* muy importante, que es la **distribución probabilística normal.** Según se observó en el capítulo anterior, una variable aleatoria continua es la que *puede tomar un número infinito de valores posibles.* Puede ser el resultado de medir algo, como el peso de una persona. El peso (en kilogramos) podría ser 112.0, 112.1, 112.12, etc., dependiendo de la exactitud del instrumento de pesaje. Otras variables aleatorias continuas son la esperanza o expectativa de vida de pilas del tipo alcalino, el volumen de un recipiente de embarque y el peso de las impurezas en un lingote de acero.

Las distribuciones probabilísticas de la duración de algunos productos, como acumuladores (o baterías), neumáticos y bombillas o lámparas, tienden a seguir un patrón "normal". Lo mismo sucede con los pesos de los envases de un cereal, la longitud de rollos de papel tapiz y otras variables que se miden en una escala continua.

En este capítulo se examinan primero las características principales de una distribución probabilística normal y la llamada curva normal. Después se presentan la *distribución normal estándar* y sus aplicaciones. Por último, se considera la forma como puede emplearse la distribución normal para estimar probabilidades binomiales.

CARACTERISTICAS DE UNA DISTRIBUCION PROBABILISTICA NORMAL

La distribución probabilística normal y su curva normal acompañante tienen las características que siguen:

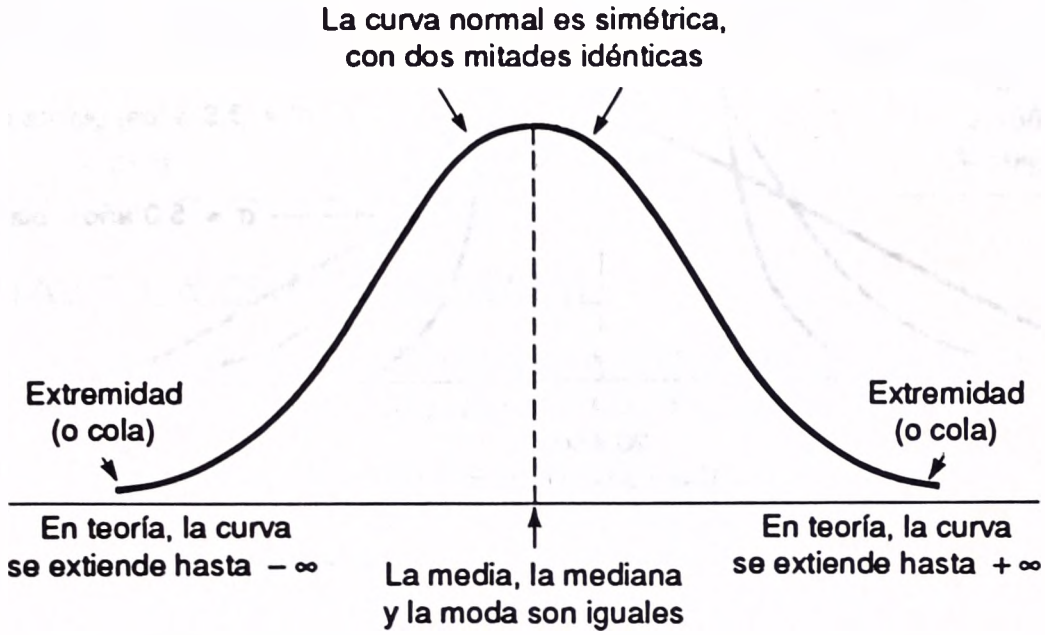
1. La curva normal tiene *perfil de campana,* (o es campaniforme), y presenta un solo pico en el centro exacto de la distribución. La media (aritmética), la mediana y la moda de la distribución son iguales y están en el punto central. De esta forma, la mitad del área bajo la curva se halla a un lado (o por encima del valor central) de ese punto, y la otra mitad, al otro lado (o por debajo).
2. La distribución probabilística normal es *simétrica* con respecto a su media. Si se corta la curva normal verticalmente por este valor central, las dos mitades serán como imágenes reflejadas en un espejo.
3. La curva normal decrece uniformemente en ambas direcciones a partir del valor central. Es *asintótica,* lo cual significa que la curva se acerca cada vez más al eje X, pero en realidad nunca llega a tocarlo. Esto es, las colas

o extremidades se extienden indefinidamente en ambas direcciones. Sin embargo, aplicado a problemas del mundo real esto no resulta verdadero. Por ejemplo, la duración de las pilas alcalinas no podría ser de 300 años.

Estas características se resumen en el diagrama 7-1.

DIAGRAMA 7-1

Características de una distribución normal



FAMILIA DE DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS NORMALES

Hablando en sentido general, no existe sólo una distribución probabilística normal. En vez de esto, hay una "familia" de tales curvas. Existe una distribución de probabilidad normal para las duraciones de servicio de los empleados en una planta industrial (*A*), en donde la media μ es 20 años, y la desviación estándar, 3.1 años. Existe otra distribución probabilística normal para los tiempos de servicio en otra planta (la *B*), en donde μ = 20 años y σ 3.9 años. En el diagrama 7-2 se presentan tres de tales distribuciones normales, en las que las medias son iguales, pero las desviaciones estándares son distintas.

En el diagrama 7-3 se muestran los pesos de tres cereales distintos. Las distribuciones son normales con medias diferentes, pero desviaciones estándares idénticas.

Por último, en el diagrama 7-4 se muestran las curvas para tres distribuciones normales que tienen medias y desviaciones estándares diferentes. Muestran la distribución de resistencias a la tensión medidas en libras por pulgada cuadrada (lb/pulg^2 o psi) para tres tipos de cables.

DIAGRAMA 7-2

Distribuciones probabilísticas normales con medias iguales pero desviaciones estándares distintas

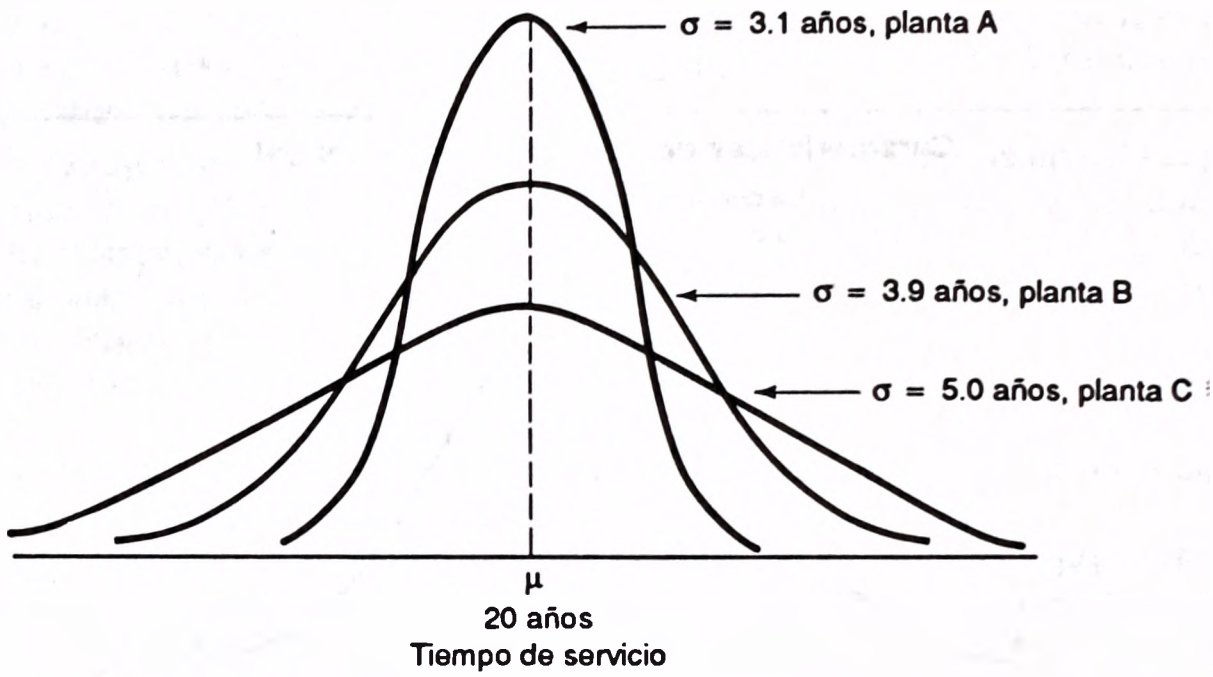


DIAGRAMA 7-3

Distribuciones probabilísticas normales con distintas medias pero desviaciones estándares iguales

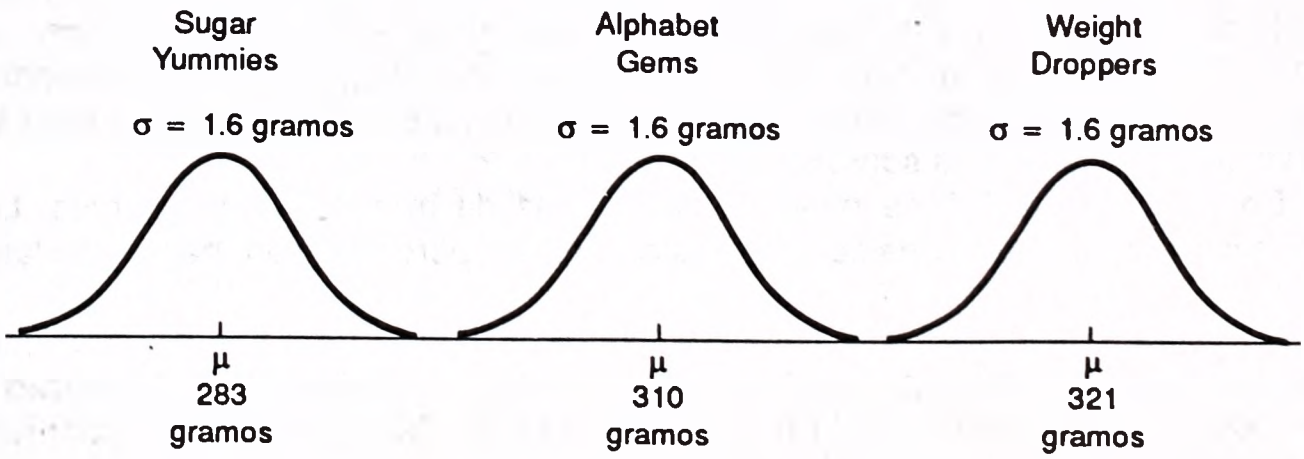
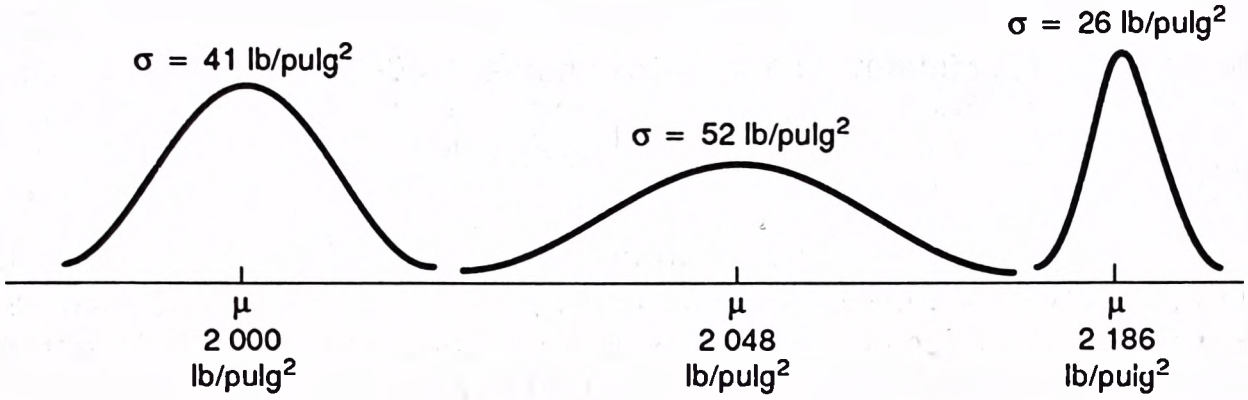


DIAGRAMA 7-4

Distribuciones probabilísticas normales con distintas medias y diferentes desviaciones estándares

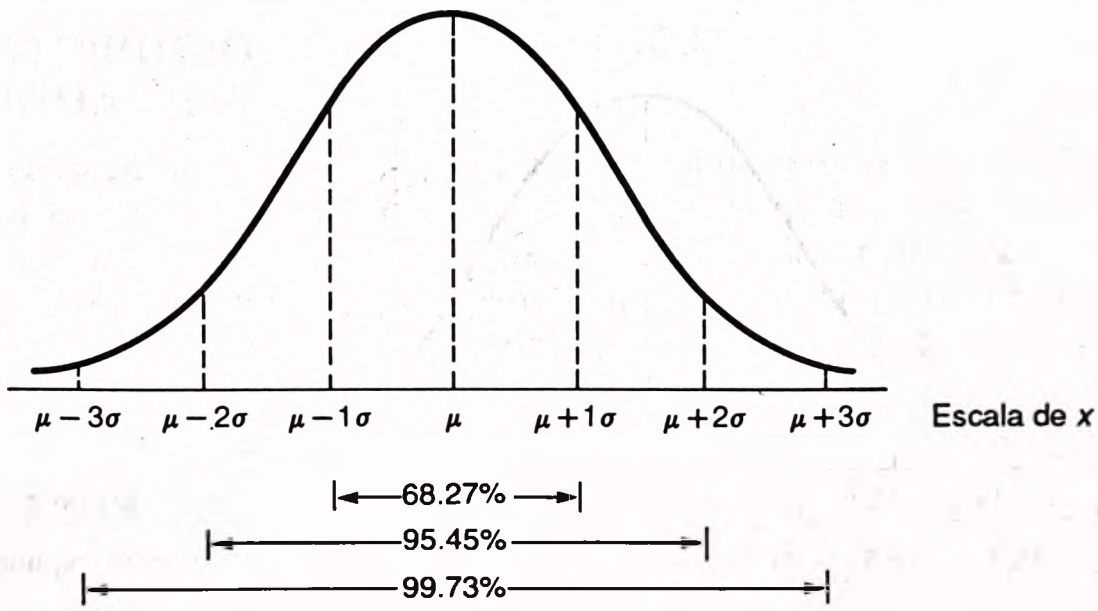


AREAS BAJO LA CURVA NORMAL

En el capítulo 4 se analizaron en forma breve ciertas áreas bajo la curva normal. Ampliamos ahora ese examen. Para una distribución probabilística normal:

1. Aproximadamente 68% del área bajo la curva normal está dentro de más una y menos una desviación estándar respecto de la media. Esto puede expresarse como $\mu \pm 1\sigma$.
2. Aproximadamente 95% del área bajo la curva normal está dentro de más dos y menos dos desviaciones estándares respecto de la media, lo que se expresa $\mu \pm 2\sigma$.
3. Prácticamente toda el área (99.73%) bajo la curva normal está dentro de tres desviaciones estándares respecto de la media (a uno y otro lados), lo cual se escribe $\mu \pm 3\sigma$.

Mostrando esto en un diagrama y utilizando porcentajes más precisos:



Estos conceptos pueden expresarse de manera algo distinta: el área bajo la curva normal dentro de más y menos una desviación estándar respecto de la media es, aproximadamente, 0.6827. El área dentro de más y menos dos desviaciones estándares respecto de la media es, aproximadamente, 0.9545. El área dentro de tres desviaciones estándares respecto de la media es en forma aproximada 0.9973. El área total bajo la curva normal es, obviamente, 1.0000.

✱ Ejemplo

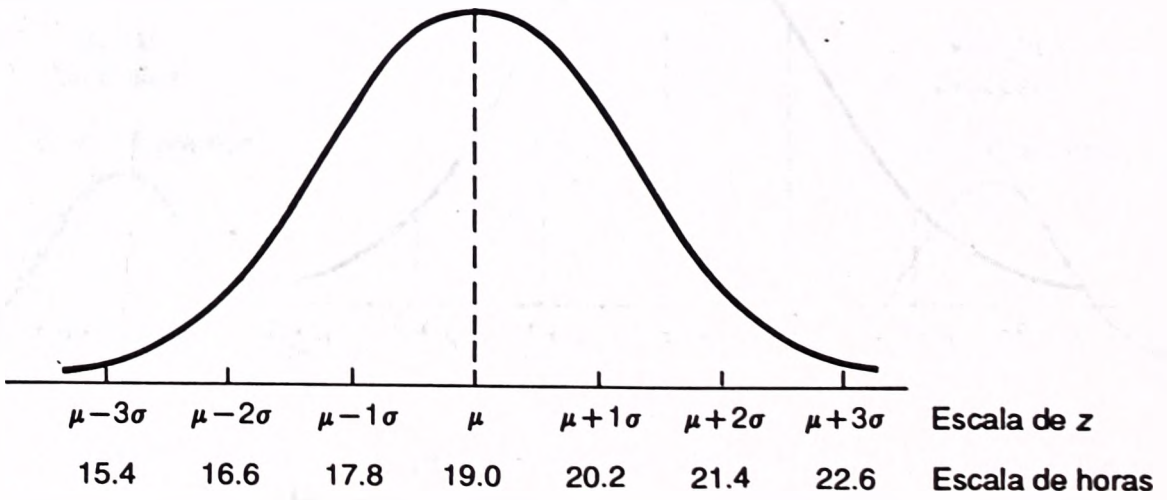
Una prueba acelerada de duración en un gran número de pilas alcalinas tipo D, reveló que la duración media para un uso específico antes de que falle es 19.0 horas. La distribución de las duraciones se aproxima a una distribución normal. La desviación estándar de la distribución fue 1.2 horas.

1. ¿Entre qué par de valores ocurrió la falla de aproximadamente, 68.27% de las pilas?
2. ¿Entre qué par de valores ocurrió la falla de aproximadamente, 95.45% de las pilas?
3. ¿Entre qué par de valores ocurrió la falla de aproximadamente, 99.73% de las pilas?

✔ Solución

1. Aproximadamente 68.27% falló entre 17.8 horas y 20.2 horas, valor obtenido por 19.0 ± 1(1.2).
2. Aproximadamente 95.45% falló entre 16.6 horas y 21.4 horas, calculado por 19.0 ± 2(1.2).
3. Aproximadamente 99.73% falló entre 15.4 horas y 22.6 horas, calculado por 19.0 ± 3(1.2).

Mostrado esto en un diagrama queda



AUTOEXAMEN 7-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

La distribución de los ingresos anuales de un grupo de empleados a nivel de gerencia media en Compton Plastics siguió en forma aproximada una distribución normal con una media de $37 200 y una desviación estándar de $800.

1. ¿Entre qué par de cantidades está, aproximadamente, 68.27% de los ingresos?
2. ¿Entre qué par de valores está, aproximadamente, 95.45% de los ingresos?
3. ¿Y entre qué par de valores, aproximadamente, 99.73% de los ingresos?
4. ¿Cuáles son la mediana y la moda de los ingresos?
5. ¿Es simétrica la distribución de estos últimos?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Explique lo que significa este enunciado: "No existe sólo una distribución probabilística normal, sino familias de estas distribuciones".
2. Enumere las principales características de una distribución de probabilística normal.
3. La media de una distribución probabilística normal es 500; la desviación estándar, 10.
   a. ¿Entre qué par de valores está, aproximadamente, 68% de las observaciones?
   b. ¿Entre qué par de valores se halla, aproximadamente, 95% de las observaciones?
   c. ¿Entre qué par de valores se encuentran prácticamente todas las observaciones?
4. La media de una distribución probabilística normal es 60, y la desviación estándar es 5.
   a. ¿Aproximadamente qué porcentaje de las observaciones se encuentra entre 55 y 65?
   b. ¿Aproximadamente qué porcentaje de las observaciones se halla entre 50 y 70?
   c. ¿Aproximadamente qué porcentaje de las observaciones se halla entre 45 y 75?

DISTRIBUCION PROBABILISTICA NORMAL ESTANDAR

Se observó que existe una familia de distribuciones normales. Cada distribución tiene media (μ) o desviación estándar (σ) diferentes. Por tanto, el número de distribuciones normales es ilimitado. Resultaría físicamente imposible proporcionar una tabla de probabilidades (como para la binomial y la de Poisson) para cada combinación de μ y σ. Por fortuna, puede utilizarse un elemento de la familia de distribuciones normales para todos los problemas donde esta distribución resulte aplicable. Tiene una media igual a 0 y una desviación estándar igual a 1, y se denomina *distribución normal estándar.*

Como ejemplo de su aplicación, supóngase que la media de una distribución normal es 100 libras, y la desviación estándar, 2 libras. Considérese que está

interesado en determinar el área entre un valor de 103 libras y la media de 100 libras. Primero se convierte la distribución, a lo que se conoce como *estandarización,* de una distribución normal estándar utilizando el llamado *valor* z, también denominado *puntuación* z, *estadística* z, *desvío normal estandarizado,* o *desvío normal* z, simplemente.

Valor *z* (o desvío normal *z*) Diferencia (desviación) entre un valor seleccionado, denotado por X y la media poblacional, μ, dividida entre la desviación estándar de la población, σ.

Expresado como fórmula:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

en donde:

X es el valor de cualquier observación específica.
μ es la media de la distribución.
σ es la desviación estándar de la distribución.

El valor z mide la distancia entre el valor específico X y la media, en unidades de desviación estándar.

✱ Ejemplo

La media de un grupo de ingresos semanales con distribución normal para un gran conjunto de gerentes de nivel medio, es $1 000 (dólares); la desviación estándar es $100. ¿Cuál es el desvío normal o valor z para un ingreso X de $1 100? ¿Para uno de $900?

✔ Solución

Para X = $1 100:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$1\,100 - \$1\,000}{\$100} = 1.00$$

Para X = $900:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$900 - \$1\,000}{\$100} = -1.00$$

El desvío z de 1.00 indica que un ingreso semanal de $1 100 para un gerente de nivel medio está una desviación estándar por encima de la media; una z de −1.00 indica que un ingreso de $900 está una desviación estándar por abajo de la media. Obsérvese que ambos ingresos ($1 100 y $900) están a la misma distancia ($100) de la media.

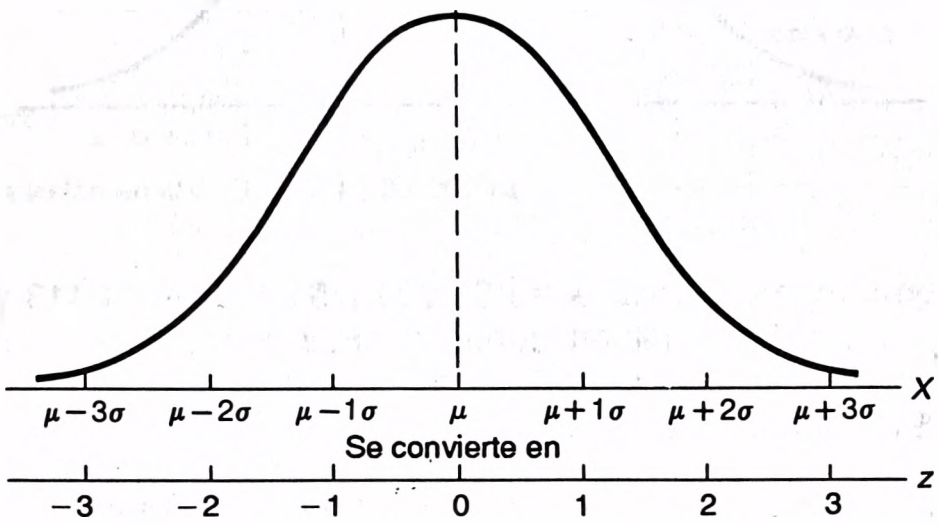
AUTOEXAMEN 7-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Usando la misma información que en el ejemplo anterior (μ = \$1 000, σ = \$1 00), convierta:

1. El ingreso semanal de \$1 225 a una unidad estándar (valor *z*).
2. El ingreso semanal de \$775 a un valor *z*.

El transformar las mediciones a desvíos normales *z* cambia la escala. Las conversiones se muestran en la gráfica que sigue. Por ejemplo, $\mu + 1\sigma$ se convierte a *z* de + 1.00. De manera semejante, $\mu = 2\sigma$ se transforma en *z* de – 2.00. Obsérvese que el centro de la distribución z es cero, lo cual indica que no existe desviación respecto a la media, μ.



Aplicaciones de la distribución normal estándar

La primera aplicación de la distribución normal estándar se relaciona con la determinación del área bajo la curva normal entre la media y un valor seleccionado, denotado por *X*. Utilizando el mismo problema que en el ejemplo anterior del ingreso semanal (μ = \$1 000, σ = \$100), ¿cuál es el área bajo la curva normal entre \$1 000 y \$1 100?

Ya hemos convertido \$1 100 a un valor z de 1.00 Repitiendo:

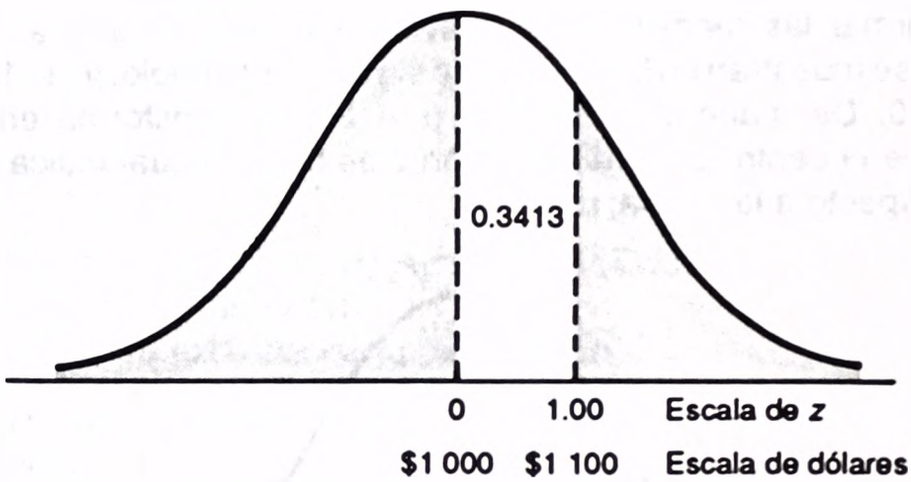
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$1\,100 - \$1\,000}{\$100} = 1.00$$

La probabilidad asociada a un *z* de 1.00 ya se calculó y obtuvo en el apéndice D. A continuación se presenta una pequeña parte de esa tabla del apéndice. Para localizar el área, recorra hacia abajo la columna izquierda hasta 1.0. Después se

recorre horizontalmente hacia la derecha y se lee el área bajo la curva en la columna marcada 0.00. Resulta así 0.3413.

z	*0.00*	*0.01*	*0.02*
0.7	0.2580	0.2611	0.2642
0.8	0.2881	0.2910	0.2939
0.9	0.3159	0.3186	0.3212
1.0	0.3413	0.3438	0.3461
1.1	0.3643	0.3665	0.3686

Representado en un diagrama:



El área bajo la curva normal entre $1 000 y $1 100 es 0.3413 y el área total bajo la curva es 1.0000. También puede decirse que 34.13% de los ingresos semanales están entre $1 000 y $1 100, y la probabilidad que un ingreso específico se halle entre $1 000 y $1 100 es 0.3413.

✱ Ejemplo

Véase el problema anterior (μ = $1 000, σ = $100).

1. ¿Cuál es la probabilidad que un ingreso semanal específico seleccionado al azar esté entre $790 y $1 000?
2. ¿Cuál es la probabilidad que el ingreso sea menor de $790?

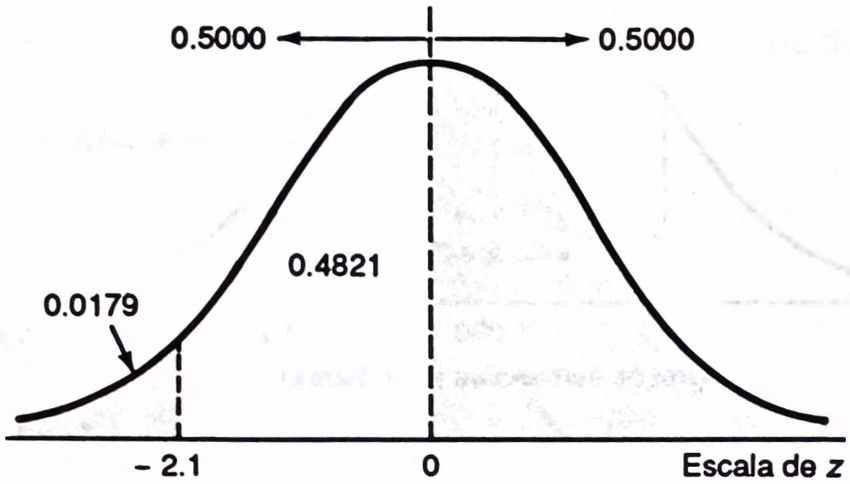
✔ Solución

Calculando el valor z para $790:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$790 - \$1\,000}{\$100} = \frac{-\$210}{\$100} = -2.10$$

1. El área bajo la curva normal entre μ y X para un valor z de – 2.10 es 0.4821 (tomado del apéndice D). Puesto que la curva normal es simétrica, el signo negativo antes de 2.10 indica que el área está a la izquierda de la media.

2. La media divide a la curva normal en dos mitades idénticas. El área de la mitad a la izquierda (o sea, "abajo") de la media es 0.5000, y el área a la derecha (o sea, "arriba") de la media también es 0.5000. Como el área bajo la curva entre $790 y $1 000 es 0.4821, el área por abajo de $790 se determina restando 0.4821 de 0.5000. De esta forma, 0.5000 - 0.4821 = 0.0179. Mostrado esto en un diagrama:



AUTOEXAMEN 7-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

A los empleados de una empresa se les otorgan puntuaciones por eficiencia. La distribución de éstas sigue, aproximadamente, una distribución normal. La media es 400, y la desviación estándar, 50.

1. ¿Cuánto vale e! área bajo la curva normal entre 400 y 482?
2. ¿Cuánto vale el área bajo la curva normal por encima de 482?
3. Muestre los aspectos de este problema en una gráfica.

EJERCICIOS

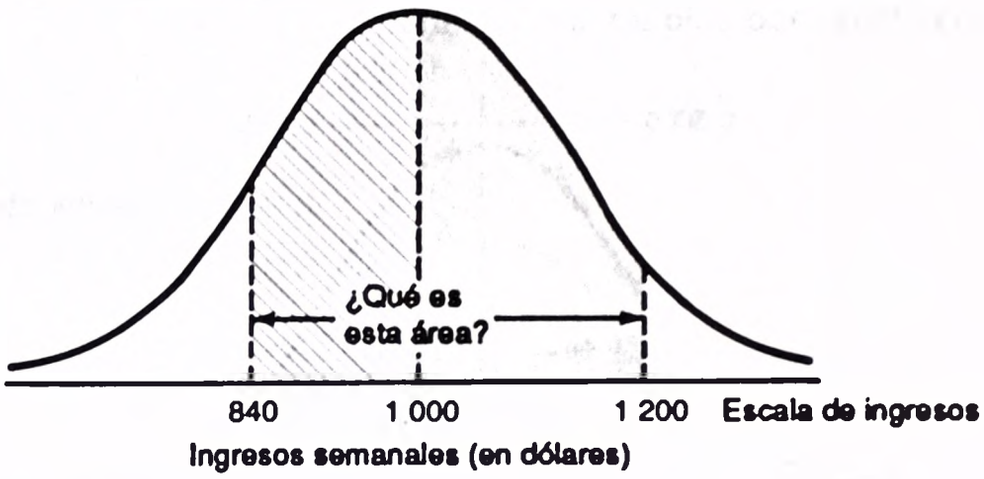
Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro

5. ¿Cuál es la distribución probabilística normal estándar? ¿Por qué es tan importante?
6. La media de una distribución normal es 400 libras. La desviación estándar es 10 libras.
   a. ¿Cuál es el área entre 415 libras y la media de 400 libras?
   b. ¿Cuál es el área entre la media y 395 libras?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un valor al azar y descubrir que está por abajo de 395 libras?

Una segunda aplicación de la distribución normal estándar se relaciona con combinar áreas a la derecha y a la izquierda de la media.

✱ Ejemplo

Volviendo a la distribución de ingresos semanales (μ = \$1 000, σ = \$100), ¿cuánto vale el área bajo la curva normal entre \$840 y \$1 200? En un diagrama se tiene:



✔ Solución

El problema se divide en dos partes. Para el área entre \$840 y la media de \$1 000:

$$z = \frac{\$840 - \$1\,000}{\$100} = \frac{-\$160}{\$100} = -1.60$$

Para el área entre \$1 000 y \$1 200:

$$z = \frac{\$1\,200 - \$1\,000}{\$100} = \frac{\$200}{\$100} = 2.00$$

El área bajo la curva para una z de -1.60 es 0.4452 (tomada del apéndice D). El área bajo la curva para una z de 2.00 es 0.4772. Sumando las dos áreas queda $0.4452 + 0.4772 = 0.9224$.

De esta forma, la probabilidad de seleccionar un ingreso entre \$840 y \$1 200 es 0.9224. En otras palabras, 92.24% de las personas tienen un ingreso semanal entre \$840 y \$1 200.

Una tercera aplicación de la distribución normal estándar consiste en determinar el área por encima, o por debajo, de un valor específico.

✱ Ejemplo

Considerando de nuevo el ejemplo de los ingresos semanales (μ = \$1 000, σ = \$100), ¿qué porcentaje de los ejecutivos tienen ingresos de \$1 245 o más?

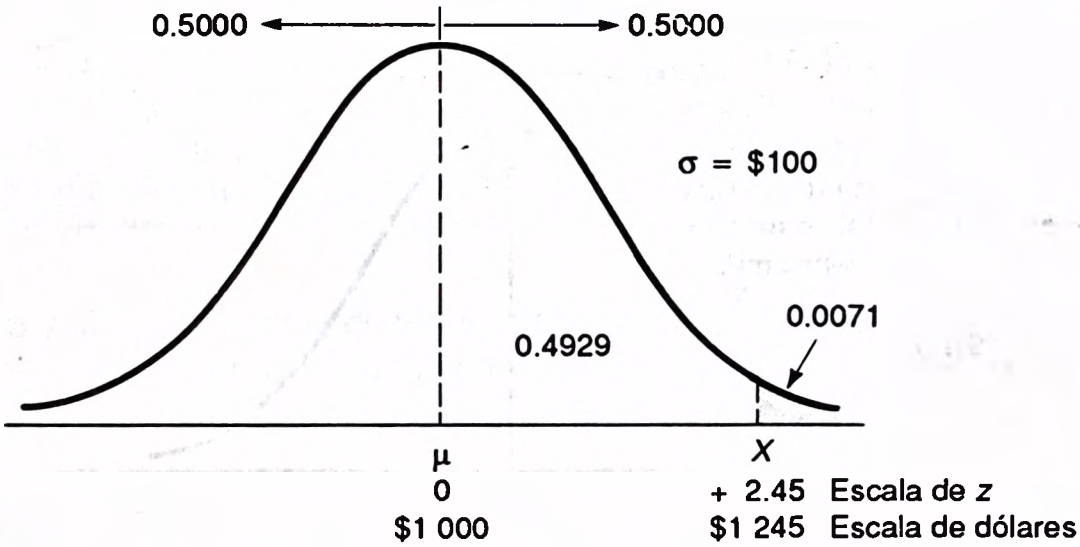
✔ Solución

Primero es necesario determinar el área entre la media de \$1 000 y una X de \$1 245.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\$1\,245 - \$1\,000}{\$100} = \frac{-\$245}{\$100} = -2.45$$

Consultando el apéndice D, el área asociada a un z de 2.45 es 0.4929. Este es el área entre \$1 000 y \$1 245. Resulta lógico que el área a partir de \$1 245 y que llega hasta el final de la curva, se obtenga al restar 0.4929 de 0.5000 (área total bajo la curva más allá de \$1 000). El área a partir de \$1 245 es 0.0071, lo cual indica que sólo 0.71% de los ejecutivos tienen un ingreso semanal de \$1 245 o más.

En el diagrama que sigue se muestran los diversos aspectos de este problema.



AUTOEXAMEN 7-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En relación al ejemplo anterior (μ = \$1 000, σ = \$100).

1. ¿Qué porcentaje de los ejecutivos tienen un ingreso semanal de \$925 o menos?
2. Represente los aspectos de este problema en un diagrama.

En los ejemplos anteriores fue necesario determinar el porcentaje de las observaciones localizadas entre dos observaciones o el porcentaje de las observaciones por encima (mayores) o por debajo (inferiores) de una observación específica X.

Una cuarta aplicación de la distribución normal estándar se relaciona con determinar el valor de la observación X, cuando se da el porcentaje por encima o por debajo de la observación.

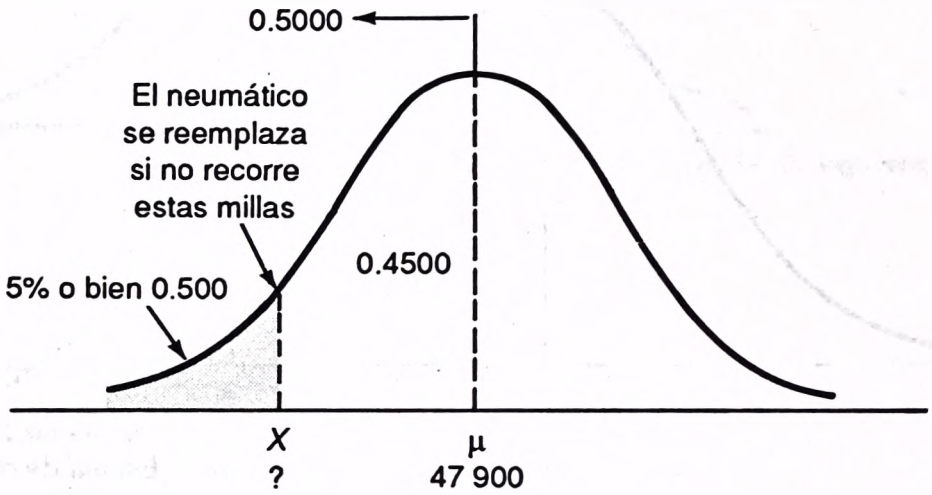
* Ejemplo

Supóngase que un fabricante de neumáticos desea fijar una garantía de millas recorridas para su nuevo neumático MX100. Las pruebas de duración revelaron

que la media de las millas recorridas es 47 900, y la desviación estándar de las millas recorridas, que se distribuyen en forma normal, es 2 050 millas. El fabricante desea fijar las millas recorridas de garantía de manera que no sea necesario reemplazar más del 5% de los neumáticos. ¿Cuántas millas de recorrido de garantía debe anunciar el fabricante?

✔ Solución

Los aspectos de este problema se señalan en el diagrama que sigue. X representa las millas de garantía.



Sustituyendo estos valores en la fórmula para z:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - \$47\,900}{\$2\,050}$$

Hay dos incógnitas, z y X. Para determinar z obsérvese que el área bajo la curva normal a la izquierda de X es 0.0500. Resulta lógico que el área entre μ y X es 0.4500, que se determina por 0.5000 − 0.0500. Ahora consulte el apéndice D y busque en el cuerpo de la tabla el área más cercana a 0 4500. Hay dos valores equidistantes de 0.4500, que son 0.4505 y 0.4495. Recórrase hacia la izquierda de estos valores y lea en el margen los valores z: 1.65 y 1.64. "Parta la diferencia" y diga que la puntuación z es 1.645. (En realidad es −1.645 porque está a la izquierda de la media.)

Sabiendo que la distancia entre μ y X es -1.645σ ahora se puede despejar X (millas garantizadas).

$$z = \frac{X - 47\,900}{2\,050}$$

$$-1.645 = \frac{X - 47\,900}{2\,050}$$

De modo que X:

$$-1.645(2\,050) = X - 47\,900$$
$$X = 44\,528 \text{ millas de garantía}$$

¿Cómo se interpreta el valor 44 528? Si el fabricante anuncia que sus neumáticos durarán 44 528 millas, sólo 5% de los neumáticos no durarán tanto.

AUTOEXAMEN 7-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un análisis de las calificaciones obtenidas en la primera prueba de una asignatura de matemáticas reveló que seguían, aproximadamente, una curva normal con media de 75 y desviación estándar de 8. El profesor desea otorgar una calificación de *A* al 10% superior de las calificaciones en la prueba. ¿Cuál es el punto divisorio entre la calificación *A* y *B*?

Un quinto y último uso de la distribución normal estándar consiste en comparar dos o más observaciones que estén en distintas escalas o diferentes unidades. Esto es, las observaciones corresponden a distribuciones diferentes.

✱ Ejemplo

Supóngase que un estudio de los internos en una institución correccional se refiere al ajuste social de los reclusos y sus perspectivas de rehabilitación al salir. A cada uno se le aplica una prueba referente al ajuste social. Las puntuaciones siguen una distribución normal, con media de 100 y desviación estándar de 20. Los psicólogos del reclusorio calificaron a cada interno con respecto a la posibilidad de rehabilitación. Tales puntuaciones también se distribuyen en forma normal, con media de 500 y desviación estándar de 100.

Una interna obtuvo 146 en la prueba de ajuste social y su puntuación con respecto a rehabilitación es 335. ¿En qué forma se compara su calificación con la del grupo, en lo que se refiere a la responsabilidad social y las perspectivas de rehabilitación?

✔ Solución

Al convertir a valor *z* su puntuación de la prueba de responsabilidad de 146, queda

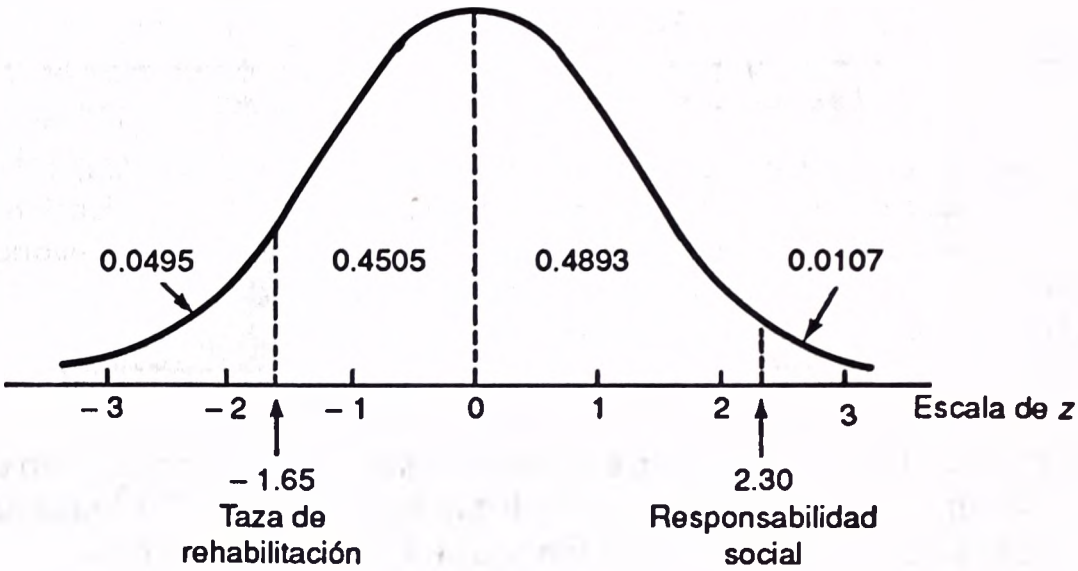
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{146 - 100}{20}$$
$$= \frac{46}{20} = 2.30$$

Y para su puntuación de perspectivas de rehabilitación de 335 resulta:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{335 - 500}{100}$$

$$= \frac{-165}{100} = -1.65$$

Las puntuaciones estandarizadas se muestran a continuación:



Interpretación

Con respecto a responsabilidad social, la interna está en el 1% más elevado del grupo. Sin embargo, en comparación con los otros internos, queda 5% más bajo en lo que se refiere a las posibilidades de rehabilitación.

En el autoexamen 7-6 se ilustra el empleo de la distribución normal estándar para comparar datos que estén en distintas expresiones: razones y cambios porcentuales, en este caso. Las razones están en una distribución y los cambios porcentuales en otra.

AUTOEXAMEN 7-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Se estudiaron las razones precio-utilidades (PU) y los cambios de precio durante un periodo de tres años para acciones seleccionadas. Para las razones o cocientes PU, $\mu = 10.0$ y $\sigma = 2.0$. Para los cambios de precio, $\mu = 50\%$ y $\sigma = 10\%$. Ambas distribuciones son normales.

Una empresa tiene una razón PU de 11.2, y un incremento porcentual de 75 en el periodo de tres años.

1. Convierta la PU y el cambio porcentual a valores *z*.
2. Muestre los dos desvíos normales *z* en una curva normal estandarizada.
3. Compare la razón PU y el cambio porcentual de la empresa con los de otras acciones seleccionadas.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Las ventas netas y el número de obreros en fábricas de estructuras de aluminio con características semejantes, se organizaron en distribuciones de frecuencias. Ambos están distribuidas en forma normal. Para las ventas netas, μ = \$180 millones y σ = \$25 millones. Para el número de trabajadores, μ = 1 500 y σ = 120. La fábrica *A* tuvo ventas de \$170 millones y 1 850 obreros.
   a. Convierta a valores *z* las ventas y el número de trabajadores de la compañía.
   b. Localice los dos valores *z* en una distribución normal estándar.
   c. Compare las ventas y el número de obreros de la empresa con los de otros fabricantes.
8. Una prueba de aptitudes mecánicas diseñada para estudiantes que ingresan a la universidad, presentó una media de 1 000 y una desviación estándar de 150. Una prueba de coeficiente intelectual (IQ) para estudiantes universitarios, tiene una media de 110 y una desviación estándar de 10. Una persona tuvo una puntuación de 1 310 en la prueba de aptitudes mecánicas, y de 122 en la prueba de coeficiente intelectual. Evalúe sus puntuaciones de prueba en relación con las de otras personas que las realizaron.
9. Un estudio efectuado por una compañía en lo referente al pago de facturas, reveló que en promedio una factura se pagó 20 días después de ser recibida. La desviación estándar fue igual a 5 días.
   a. ¿Qué porcentaje de las facturas se pagó a los 15 días de recibidas?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar cualquier factura y descubrir que se pagó entre 18 y 26 días después de recibirla?
   c. ¿Al menos cuántos días después de recibidas se pagó el 5% de las facturas?
10. La puntuación media en una prueba de ingreso a la universidad es 500; y la desviación estándar, 75. Las puntuaciones se distribuyen en forma normal.
    a. ¿Qué porcentaje de los estudiantes tuvieron puntuaciones por abajo de 320?
    b. ¿Cuál es la puntuación por encima de la cual tuvo calificaciones 20% de los estudiantes?
    c. ¿Cuál es la puntuación por abajo de la cual quedó 10% de los estudiantes?
11. Las comisiones anuales por agente de ventas de una empresa fabricante de maquinaria ligera, tuvo un promedio de \$40 000, con una desviación estándar de \$5 000. ¿Qué porcentaje de los vendedores ganan entre \$32 000 y \$42 000?
12. Los pesos de unas latas de peras en conserva se distribuyen en forma normal, con media de 1 000 gramos y desviación estándar de 50 gramos. Calcule qué porcentaje de las latas pesan 860 gramos o menos, o entre 1 055 y 1 100 gramos.

APROXIMACION NORMAL A LA BINOMIAL

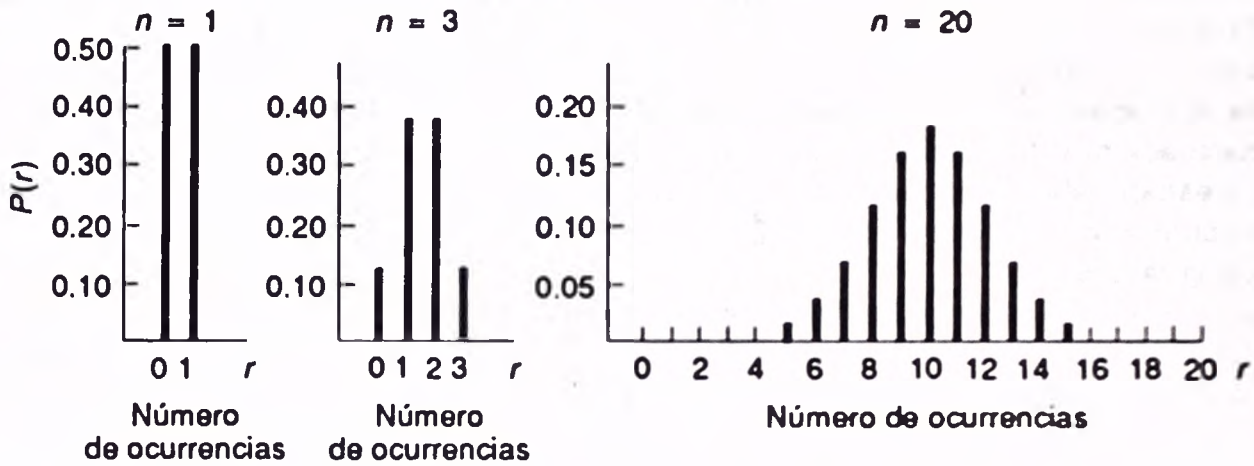
En el capítulo 6 se analizó la distribución probabilística binómica o binomial, que es una distribución discreta. La tabla de probabilidades binomiales del apéndice A va en forma sucesiva desde una *n* de 1 hasta una *n* de 25. Supóngase que un problema se relaciona con obtener una muestra de tamaño 60. El generar una distribución binomial para un número de ese tamaño tomaría mucho tiempo, aun

utilizando computadora. Un enfoque más eficiente consiste en aplicar la *aproximación normal a la binomial.*

Utilizar la distribución normal (una distribución que es continua) como sustituto de una distribución binomial (que es una distribución discreta) para valores grandes de *n*, parece razonable, porque conforme *n* aumenta una distribución binómica se acerca cada vez más a una distribución normal. Este cambio en la forma de la distribución binómica desde una *n* de 1 hasta una *n* de 20, se presenta en el diagrama 7-5.

DIAGRAMA 7-5

Distribuciones binomiales (o binómicas) para una *n* de 1, 3 y 20, en donde *p* = 0.50



¿Cuándo es posible utilizar la aproximación normal a la binómica? *La distribución probabilística normal por lo común se considera una buena aproximación a la distribución probabilística binomial cuando* np *y* n(1 − p) *son mayores que 5.* Sin embargo, antes de aplicar la aproximación normal, es necesario asegurarse que la distribución de interés en realidad sea una distribución binomial. Recuérdese, del capítulo 6, que para que esto suceda deben cumplirse cuatro criterios:

1. Existen sólo dos resultados mutuamente excluyentes para el experimento: "éxito" y "fracaso".
2. Una distribución binomial es el resultado de contar el número de éxitos.
3. Cada ensayo es independiente.
4. La probabilidad *p* debe permanecer igual de un ensayo a otro y debe haber un número fijo de ensayos, *n*.

Factor de corrección por continuidad

Para mostrar la aplicación de la aproximación normal a la binomial, y la necesidad de un factor de corrección, supóngase que la gerencia de una cadena de pizzerías reveló que 70% de sus nuevos clientes vuelven en otra ocasión. En una

semana en la que 80 nuevos clientes (de primera vez) cenaron en el establecimiento, ¿cuál es la probabilidad que 60 *o más* regresen en otra ocasión?

Se podría utilizar la fórmula binomial

$$P(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}(p)^r(q)^{n-r}$$

para calcular esta probabilidad. Sin embargo, significaría evaluar las probabilidades de 60, 61, 62, . . . , 80 y sumarlas para obtener la probabilidad de 60 o más. Sin duda el lector estará de acuerdo en que utilizar la aproximación normal a la binomial es un método mucho más eficiente para calcular la probabilidad de 60 o más.

Puesto que se va a determinar la probabilidad de 60 o más éxitos utilizando la curva normal, en este caso es necesario restar 0.5 de 60. El valor 0.5 se denomina **factor de corrección por continuidad.** Debe hacerse este pequeño ajuste porque se está utilizando una distribución continua (distribución normal) para aproximar una distribución discreta (binomial). De modo que 60 − 0.5 = 59.5.

Factor de corrección por continuidad El valor 0.5 que se resta o se suma, dependiendo del problema, a un valor seleccionado cuando una distribución probabilística binomial (que es una distribución discreta) se está aproximando por medio de una distribución de probabilidad continua: distribución normal.

Los pasos para determinar la probabilidad que 60 o más de los clientes nuevos del establecimiento, con respecto a 80, regresen son:

Paso 1 Determinar el valor z que corresponde a una X de 59.5, en donde:

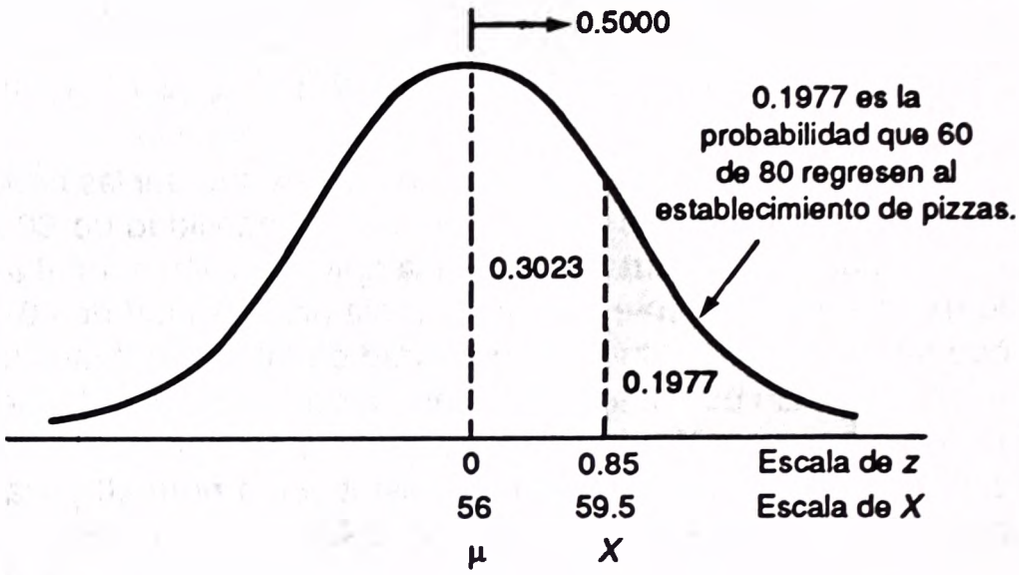
$\mu = np = 80\,(0.70) = 56.$
$\sigma^2 = np(1-p) = 80(0.70)(1-0.70) = 16.8.$
$\sigma = 4.1$, obtenido por $\sqrt{16.8}$.
$z = 0.85$, obtenido por:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{59.5-56}{4.1} = 0.85$$

Paso 2 Determinar el área bajo la curva normal entre μ (56) y X (59.5). En el apéndice D lea hacia abajo en el margen izquierdo hasta llegar a 0.8, y después recorra horizontalmente hasta el área bajo la columna con el encabezado 0.05. Esa área es 0.3023.

Paso 3 Calcule el área más allá de 59.5 al restar 0.3023 de 0.5000 (es decir, 0.5000 − 0.3023 = 0.1977). La probabilidad que 60 o más clientes nuevos de 80, regresen en otra ocasión, es 0.1977.

Los aspectos de este problema se muestran de manera gráfica:



El sistema MINITAB puede utilizarse para verificar esta probabilidad binomial (0.1977) en donde se emplea la distribución normal. La probabilidad MINITAB de 0.8034 en el listado que sigue es una probabilidad acumulada y debe restarse de 1.00. (La ligera discrepancia entre 0.1977 y 0.1966 se debe a redondeo.)

```
MTB > cdf 59.5;
SUBC> normal 56,4.1.

0.85   0.8034
```

$$
\begin{aligned}
P(z > 0.85) &= 1 - P(z < 0.85) \\
&= 1 - 0.8034 \\
&= 0.1966
\end{aligned}
$$

Utilizando la probabilidad calculada por MINITAB de 0.8034, es posible ahora determinar que 60 o más clientes volverán a comer en el establecimiento.

Un listado MINITAB más útil, basado en la binomial, se presenta a continuación. Supóngase que esa firma deseaba estimar la probabilidad que regresen 62 de 80 nuevos clientes. De nuevo se trata de probabilidades acumuladas y debe restarse de 1.00. La probabilidad que vuelvan 62 o más de 80 clientes es 0.0531, obtenido por 1.00 − 0.9469.

```
MTB > cdf;
SUBC> binomial n = 80, p = .70 .

     BINOMIAL WITH N = 80 P = 0.700000
      K    P(X LESS OR = K)
      .          .
      .          .
      .          .
      55       0.4451
      56       0.5421
      57       0.6373
      58       0.7255
      59       0.8022
      60       0.8648
      61       0.9127
      62       0.9469 ←— P(X>62) = 1 - P(X≤62)
      63       0.9698            = 1 - 0.9469
      64       0.9839            = 0.0531
      .          .
      .          .
      .          .
```

AUTOEXAMEN 7-7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un estudio realizado por una compañía aseguradora reveló que los propietarios no recuperaron los bienes robados en 80% de los robos informados a la aseguradora.

1. Durante un cierto periodo en el que ocurrieron 200 robos, ¿Cuál es la probabilidad que no se recuperen los bienes en 170 o más de los asaltos?
2. Durante un periodo en el que ocurrieron 200 robos, ¿cuál es la probabilidad que ninguno de los bienes robados se recobre en 150 o más de los asaltos?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. Un estudio realizado por un club de acondicionamiento físico reveló que 30% de sus nuevos miembros tienen un sobrepeso de consideración. Una promoción de membresía en un área urbana dio como resultado la inscripción de 500 nuevos miembros.
    a. Se ha sugerido utilizar la aproximación normal a la binomial para determinar la probabilidad que de 500 nuevos socios, 175 o más tengan sobrepeso considerable. ¿Se califica este problema como un problema binomial? Explique su respuesta.
    b. ¿Cuál es la probabilidad que 175 o más de los nuevos socios tengan sobrepeso?

c. ¿Cuál es la probabilidad que 140 o más de los nuevos miembros tengan sobrepeso considerable?
d. Muestre las áreas y otros aspectos de los incisos *b* y *c* en forma de diagrama.

14. La investigación sobre nuevos delincuentes juveniles que fueron puestos en libertad bajo palabra por un juez reveló que 38% cometieron otro delito.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que de los últimos 100 nuevos delincuentes juveniles puestos en libertad bajo palabra, 30 o más delincan otra vez?
    b. Represente las áreas bajo la curva y otros aspectos de este problema en un diagrama.

RESUMEN

Este capítulo estuvo dedicado a una distribución de probabilidad continua muy utilizada, la *distribución probabilística normal.* No existe sólo una distribución normal, sino más bien una familia de curvas, una para cada media y desviación estándar. La media y la desviación estándar de una distribución normal se utilizan para transformarla en una *distribución normal estándar.*

Esta distribución normal tiene una media 0 y una desviación estándar de 1. Los valores para cualquier distribución normal pueden convertirse a una distribución normal estándar.

Específicamente, esta distribución es muy útil para:

1. Determinar el área entre la media, μ, y el valor seleccionado, X.
2. Combinar las áreas a ambos lados de la media.
3. Determinar el área por encima, o por debajo, de un valor específico.
4. Determinar el valor de X cuando se conoce el porcentaje por encima y por debajo de X.
5. Comparar observaciones que estén en distintas escalas o en diferentes unidades, es decir, en distribuciones distintas.

Recapitulación

I. La distribución normal es una distribución continua con las características que siguen:
   A. Es simétrica con respecto a la media.
   B. Su gráfica tiene perfil de campana, con un solo pico en la media.
   C. La media, la mediana y la moda son iguales.
   D. La distribución es asintótica, lo cual significa que se acerca al eje X sin llegar nunca a tocarlo.
   E. Existe una familia de distribuciones normales. Cada vez que cambian la media o la desviación estándar, se origina una nueva distribución normal.

II. La distribución normal estándar es un caso especial de la distribución normal.
   A. Cualquier distribución normal puede estandarizarse utilizando la relación que sigue.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

   B. La distribución normal estándar indica la desviación (o distancia) a partir de la media en unidades de desviación estándar. A esta cantidad se le denomina valor z o desvío normal z.

III. La distribución normal puede utilizarse para aproximar la distribución binomial.
   A. Para tal aproximación, tanto np como $n(1 - p)$ deben ser al menos de 5.
   B. Para calificar como distribución binomial deben cumplirse los criterios que siguen:

1. Hay sólo dos resultados mutuamente excluyentes, denotados como éxito y fracaso.
2. La distribución binomial se basa en contar el número de éxitos.
3. La probabilidad de un éxito, p, debe permanecer igual de un ensayo a otro y el número total de ensayos debe ser fijo.
4. Cada ensayo es independiente de los otros.

C. La media y la variancia de una distribución binomial se calculan utilizando las fórmulas que siguen.

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1 - p)$$

D. El factor de corrección por continuidad de 0.5 se utiliza para ampliar en media unidad el valor continuo X, en ambas direcciones. Esta corrección compensa estimar una distribución discreta por medio de una distribución continua.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

15. Una industria produce cojinetes de bolas en forma automática en una máquina Kronar BBX. Para uno de los cojinetes, la media aritmética de los diámetros se determina como 20.00 mm (milímetros). La desviación estándar de la producción durante un largo periodo se calcula como 0.150 (mm).
    a. ¿Qué porcentaje de los cojinetes tendrán diámetros entre 20.00 mm y 20.27 mm?
    b. ¿Qué porcentaje de los cojinetes tendrán diámetros de 20.27 mm o más?
    c. Qué porcentaje de los cojinetes tendrán diámetros entre 19.85 mm y 20.30 mm?
    d. ¿Qué porcentaje de los cojinetes tendrán diámetros de 19.91 mm o menos?

16. Un fabricante de garajes para anexar a las casas, descubrió que la distribución de los tiempos que necesitan dos trabajadores para construir un modelo se distribuye aproximadamente en forma normal con una media de 32 h (horas) y una desviación estándar de 2 h.
    a. ¿Qué porcentaje de los garajes necesitan entre 32 h y 34 h para ser construidos?
    b. ¿Qué porcentaje de los garajes necesitan 28.7 h o menos para su construcción?
    c. ¿Qué porcentaje de los garajes necesitan entre 29 h y 34 h para ser construidos?
    d. De los garajes, ¿que número de horas o más se necesitan para construir el 5%?

17. La experiencia con respecto al número de pasajeros en el buque *Queen Elizabeth II,* que ofrece travesías de una semana por el Caribe, reveló que el número medio de pasajeros es 1 820, y la desviación estándar de la distribución normal es 120.
    a. ¿Qué porcentaje de las travesías tendrán entre 1 820 y 1 970 pasajeros?
    b. ¿Qué porcentaje de los recorridos tendrán 1 970 pasajeros o más?
    c. ¿Qué porcentaje de las travesías por el Caribe tendrán 1 600 o menos pasajeros?

18. La gerencia de una compañía electrónica está considerando adoptar un sistema de bonos o primas para incrementar la producción. Una opción consiste en pagar una prima sobre el 5% más alto de la producción con base en la experiencia. Los registros anteriores indican que, en promedio, durante una semana se producen 4 000 unidades de un pequeño ensamble. La distribución de la producción semanal es, aproximadamente,

una normal con desviación estándar de 60 unidades. Si la prima se paga sobre el 5% superior de la producción, ¿este bono se pagará con respecto a cuántas unidades o más?

Los ejercicios 19–21 se basan en lo que sigue. La experiencia de una empresa química al aplicar una prueba a universitarios recién egresados que han solicitado trabajo, reveló que la puntuación media de prueba fue de 500, y la desviación estándar, 50. La distribución de las proporciones de prueba fue normal.

19. Con base en esta experiencia, la dirección está considerando aceptar una persona cuya puntuación sea 6% superior de la distribución, y contratarla directamente para un puesto de responsabilidad. ¿Cuál es la puntuación más baja que debe tener un egresado universitario para calificar para un puesto de responsabilidad?
20. También, con base en el desempeño pasado, el director de personal planea no tomar en cuenta a las personas que tengan puntuaciones de 400 o menos en la prueba. ¿Aproximadamente qué porcentaje de los solicitantes no se tomarán en cuenta?
21. Debido al número limitado de vacantes este año, los solicitantes con puntuaciones entre 400 y 485 se pondrán en "espera" o "reserva".
    a. ¿Qué *porcentaje* de los solicitantes quedará en "espera"?
    b. ¿Si solicitaron trabajo en la empresa un total de 1 000, *¿cuántos* quedarán en la clasificación de "espera"?

22. Se determinó la resistencia a la tensión de un gran número de alambres y después se organizó en una distribución de frecuencias. La distribución es aproximadamente normal con media de 300 lb (libras) y desviación estándar de 20 lb.
    a. ¿Qué porcentaje de los alambres probados quedaron entre 296 lb y 310 lb?
    b. ¿Qué porcentaje quedó en la prueba por encima de 332 lb?
    c. ¿Sobre qué valor pasó la prueba el 80% de los alambres?

23. Una empresa de transportes utiliza el camión de tipo Super 1310 en forma exclusiva y desea realizar un estudio de costos de mantenimiento y otros. En vez de estudiar los 3 500 camiones, se seleccionó una muestra. Esta reveló que durante el año pasado la media (aritmética) de la distancia recorrida por camión fue 60 000 kilómetros. Las distancias se distribuyeron en forma normal y la desviación estándar de la muestra fue 2 000 km. Con base en los datos muestrales:
    a. ¿Qué porcentaje de los camiones recorrió 65 200 km o más?
    b. Recuerde que la empresa posee 3 500 vehículos Super 1310. Con base en lo obtenido de la muestra, ¿cuántos recorrieron 55 000 km o menos?
    c. ¿Cuántos recorrieron 62 000 km o menos durante el año?

24. Durante muchos años una firma industrial internacional ha estado utilizando una prueba estandarizada como guía para contratar nuevas secretarias. Las puntuaciones de prueba se distribuyen en forma normal, con media de 800 y desviación estándar de 100. En meses recientes ha habido una cantidad desacostumbrada de solicitantes y se ha indicado que sólo se tomen en cuenta aquellas solicitudes con puntuación en el 10% superior. ¿Qué puntuación deberá tener al menos una solicitante para que se le tome en cuenta?
25. Los ingresos anuales (en dólares) de un gran grupo de supervisores de una compañía siguen una distribución normal, con media de $28 000 y desviación estándar de $1 200. Los tiempos de servicio de los mismos supervisores también se distribuyen normalmente, con media de 20 años y desviación estándar de 5 años. Juan Martínez gana $30 400 al año y tiene 10 años de servicio.

a. Compare su ingreso con el de los otros supervisores.
b. Compare ese tiempo de servicio con el de los otros supervisores.

26. Un ejecutivo conduce de su casa en los suburbios cerca de Pittsburgh, a su oficina en el centro de la ciudad. Los tiempos de recorrido (en minutos) se distribuyen en forma normal con media de 35 y desviación estándar de 8.
    a. ¿En qué porcentaje de los días necesitará menos de 30 minutos para llegar a su trabajo?
    b. ¿En qué porcentaje de los días necesitará más de 40 minutos para llegar a su oficina?
    c. Explique por qué hay una probabilidad de casi 0 de que necesite exactamente 40 minutos para llegar a su destino.
    d. Ya que tal persona no comprendió la respuesta que se le dio en la parte c, ¿cómo estimaría el porcentaje de días en que necesita 40 minutos para llegar al trabajo? (Sugerencia: ¿Dentro de qué intervalo de valores se redondearía el número de veces a 40?)
    e. Algunos días habrá accidentes, etc., de manera que el recorrido tardará más de lo acostumbrado. ¿Cuánto tiempo necesitarán los viajes del 10% más prolongados?
27. Un gran establecimiento de ventas al menudeo, ofrece una política de aceptar devoluciones sin discusión. El número medio de clientes que devuelven artículos es 10.3 con una desviación estándar de 2.25 clientes por día.
    a. ¿En qué porcentaje de los días hay menos de 8 clientes devolviendo artículos?
    b. ¿En qué porcentaje de los días hay entre 12 y 14 clientes en el departamento de devoluciones?
    c. ¿Existe alguna posibilidad que algún día no haya devoluciones?
28. El entrenador de un equipo de futbol americano indica que uno de sus jugadores tiene un promedio de 39.5 yardas por despeje (o pateo). El padre de este jugador tiene datos adicionales acerca del juego de su hijo. La distribución de los despejes sigue una distribución aproximadamente normal, y 20% de ellos son mayores de 45 yardas.
    a. ¿Cuál es la desviación estándar de la distribución de los despejes de ese jugador?
    b. El equipo en cuestión está copado en su propio territorio y muy atrás. El despejador debe patear el balón desde su yarda 8. ¿Cuál es la probabilidad que la patee más allá de la yarda 50? (La distancia que recorre el balón pateado se mide desde la línea de golpeo.)
    c. Con estos datos, ¿cuál es la probabilidad de que el despeje sea bloqueado (es decir, sea de 0 yardas)?
    d. ¿Cómo afectarían varios despejes bloqueados a la distribución general en términos de media, desviación estándar y forma de las distribuciones?
    e. ¿Qué tan lejos llega el 5% de los despejes más largos de ese pateador?
29. Para envasar un refresco se utilizan botellas de plástico de dos litros, se envían en lotes de 100. Los lotes tienen 5% de defectos. Algunas botellas tienen fugas, otras son demasiado pequeñas, etc.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que una remesa de botellas contenga más de 8 defectuosas?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que entre 8 y 10 botellas sean defectuosas?
    c. ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 8 defectuosas?
    d. ¿Cuál es la probabilidad que no haya botellas con desperfectos?
30. En una universidad 20% de los estudiantes desertan de la materia de Estadística básica la primera vez que se matriculan. Este semestre hay 50 estudiantes inscritos en la clase de Estadística del Dr. Corbell. Determine las siguientes probabilidades.

a. ¿Cuál es la probabilidad que por lo menos 8 dejen la clase?
b. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 8 la abandonen?
c. ¿Cuál es la probabilidad que hasta 8 la abandonen?

31. Suponga que fracasa 10% de quienes estudian la parte de Estadística del examen para calificar como contador público. Sesenta estudiantes presentan el examen.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente dos estudiantes fallen?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que por lo menos dos estudiantes fracasen?
32. El departamento de tránsito de un distrito reportó que 40% de los casos de automóviles que van a alta velocidad se accidenta de importancia o poco importante. Durante un mes en el que ocurrieron 50 casos de alta velocidad, ¿cuál es la probabilidad que 25 o más resulten en un accidente de importancia o poco importante?
33. En la línea naviera Royal Viking se informa que 80% de sus camarotes se ocupan durante el mes de septiembre. En el caso de un navío que tenga 800 camarotes, ¿cuál es la probabilidad que 665 o más sean ocupados en septiembre?

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Véase el problema 3 de la Aplicación de los Conceptos del capítulo 6. En este problema un estudio realizado por la Fuerza Aérea indicó que la probabilidad de un desastre era de 1 en 35. Utilice la aproximación normal a la binómica para evaluar la probabilidad que por lo menos ocurra un desastre en 25 misiones. ¿Cómo se compara esto con el resultado del capítulo 6?
2. El secretario de una universidad estudió los promedios de calificaciones escolares de los estudiantes (PCE) correspondientes a muchos años. Descubrió que la distribución es aproximadamente normal, con una media de 2.80 y una desviación estándar de 0.40.
    a. ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante seleccionado al azar tenga un PCE desde 2.00 hasta 3.00?
    b. ¿Qué porcentaje de estudiantes están a prueba, es decir, tiene un PCE menor que 2.00?
    c. La población de estudiantes en dicha universidad es de 10 000. ¿Cuántos estudiantes están en la lista del director, es decir, tienen un PCE de 3.7 o mayor?
    d. Para obtener una beca, un estudiante se debe encontrar en el 10% superior del conjunto de estudiantes. ¿Qué PCE debe tener un estudiante para obtener la beca?
3. Una persona (Juan) terminará este año el ciclo de preparatoria (o bachillerato). Se presentó a una prueba de admisión para estudios superiores, y recibió una puntuación de 30. El director de la escuela le informó que sólo el 2% de los estudiantes que hicieron el examen recibió puntuaciones más altas. La calificación media para los estudiantes examinados es de 18.3. Unos amigos de Juan (Carolina y Jorge) también hicieron la prueba, pero no les dio ninguna otra información el director, salvo sus puntuaciones. Carolina obtuvo 25, y Jorge, 18. Con base en esta información, ¿qué rangos centílicos (categorías centílicas) obtuvieron Carolina y Jorge? ¿Qué hipótesis es necesaria?
4. Unas latas de alimentos procesados están distribuidos normalmente, con una media de 9.20 libras y una desviación estándar de 0.25 libras. El peso indicado en el envase es 9.00 libras.
    a. ¿Qué proporción de las latas realmente pesan menos que la cantidad indicada en la etiqueta?

b. El propietario está considerando dos propuestas para reducir la proporción de latas con peso inferior al indicado. Es posible aumentar el peso medio hasta 9.25, y dejar la misma desviación estándar, o bien, dejar el peso medio en 9.20 y reducir la desviación estándar de 0.25 (libras) a 0.15. ¿Qué opción recomendaría?

EXAMEN CAPITULO 7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Un estudiante perdió dos semanas de clases debido a enfermedad. El día que regresó se efectuó en su grupo un examen de selección múltiple de 100 preguntas: Cada pregunta tenía cuatro respuestas posibles. El profesor determinó que por lo menos serían necesarias 35 respuestas correctas para lograr calificación "satisfactoria". El joven decidió hacer la prueba y adivinar cada una de las respuestas correctas.
   a. Este problema califica para el uso de la aproximación normal a la binomial. Explique.
   b. Calcule la probabilidad de adivinar 35 respuestas correctas o más.
   c. Describa gráficamente las diversas facetas de este problema.
2. Se producen a mano jarrones grandes de cerámica. Debido a fluctuaciones en la composición de la arcilla y a la habilidad de la persona que hace los jarrones, existe alguna variación en los pesos. Se calculó que el peso medio es de 1 200 gramos, la desviación estándar vale 20 gramos. La distribución de los pesos se aproxima a una normal. ¿Qué porcentaje de los jarrones pesará 1 250 gramos o más?
3. Una persona está inscrita en las asignaturas de historia y ciencias. La calificación media del grupo en la primera prueba de historia fue 75, con una desviación estándar de 8. La calificación media en la prueba de ciencias fue 60, con desviación estándar de 5. Las calificaciones en las dos pruebas siguen aproximadamente la forma de una distribución normal. La persona obtuvo 74 en la prueba de historia y 74 en la de ciencias.
   a. Evalúe su calificación en la prueba de historia en relación con los otros estudiantes del grupo.
   b. Evalúe su puntuación en la prueba de ciencias en relación con los otros estudiantes del grupo.
   c. Muestre su posición en las pruebas utilizando la curva normal estándar.
4. La producción estacional de un nuevo tipo experimental de plantas se pesó cuidadosamente. El peso medio por planta es 15.0 libras y la desviación estándar de los pesos, que se distribuyen normalmente, es 1.75 libras. De las 200 plantas del experimento, ¿cuántas tuvieron un rendimiento entre 13 y 16 libras?

Autoexámenes

7-1 1. \$36 400 y \$38 000, calculado por \$37 200 ± 1(\$800).
2. \$35 600 y \$38 800, obtenido por \$37 200 ± 2(\$800).
3. \$34 800 y \$39 600, calculado por \$37 200 ± 3(\$800).
4. \$37 200. La media, la mediana y la moda son iguales para una distribución normal.
5. Sí, una distribución normal es simétrica.

7-2 1. 2.25, obtenido por

$$z = \frac{\$1\,225 - \$1\,000}{\$100} = \frac{\$225}{\$100} = 2.25$$

2. -2.25, obtenido por

$$z = \frac{\$775 - \$1\,000}{\$100} = \frac{-\$225}{\$100} = -2.25$$

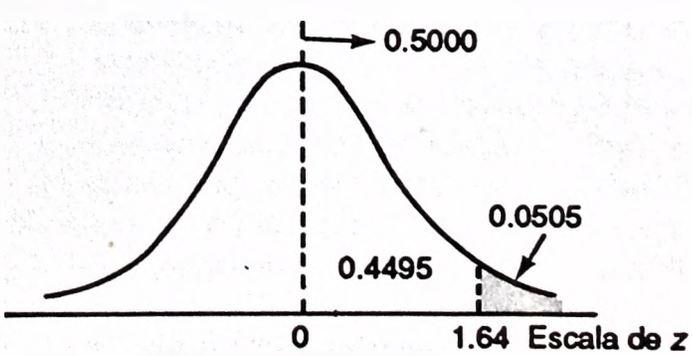
7-3 1. Calculando el desvío normal z:

$$z = \frac{482 - 400}{50} = +1.64$$

Recurriendo al apéndice D, el área es 0.4495.

2. 0.0505, calculado por 0.5000 − 0.4495.

3.

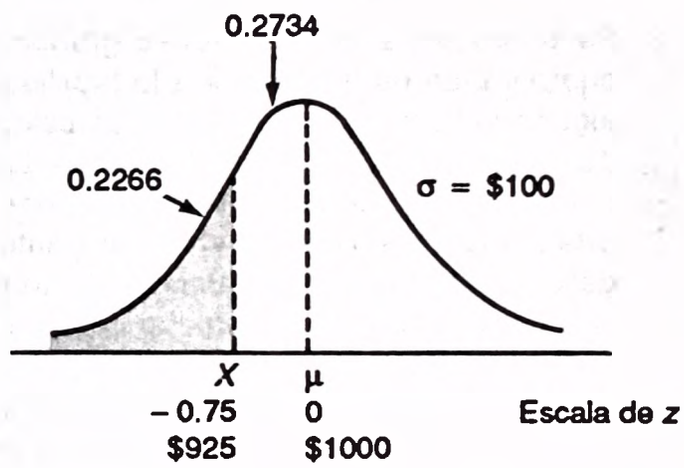


7-4 1. Aproximadamente 22.66%, calculado por

$$z = \frac{\$925 - \$1\,000}{\$100} = -0.75$$

Area = 0.2734, del apéndice D. Entonces, 0.5000 − 0.2734 = 0.2266.

2.



7-5 85.24 (sin duda el instructor lo iguala a 85 u 86). El área más cercana a 0.4000 es 0.3997; z vale 1.28. Entonces:

$$1.28 = \frac{X - 75}{8}$$

$$10.24 = X - 75$$

$$X = 85.24$$

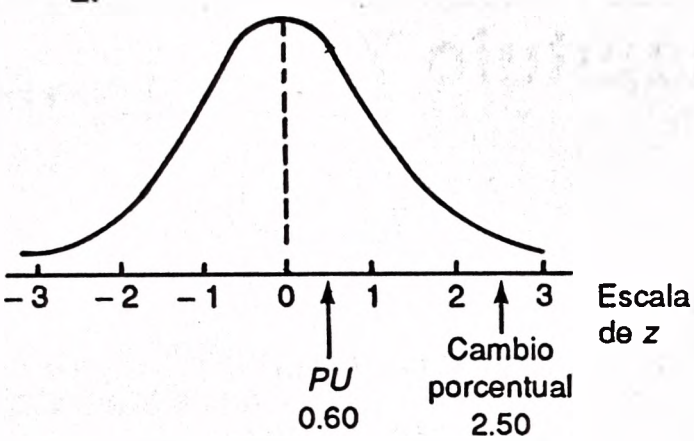
7-6 1. z = 0.60 para la razón PU, obtenido por

$$\frac{11.2 - 10.0}{2.0}$$

z = 2.50 para el cambio porcentual, que se calcula por

$$\frac{75 - 50}{10}$$

2.



3. Comparada con las otras acciones seleccionadas, la PU de la empresa está ligeramente por encima del promedio; el incremento porcentual está muy por arriba del promedio.

7-7 1. 0.0465, calculado por $\mu = np = 200(0.80) = 160$ y $\sigma^2 = np(1 - p) = 200(0.80)(1 - 0.80) = 32$. Entonces,

$$\sigma = \sqrt{32} = 5.66$$

$$z = \frac{169.5 - 160}{5.66} = 1.68$$

El área es 0.4535, del apéndice D. Restándola de 0.5000 se obtiene 0.465.

2. 0.9686, obtenido por 0.4686 + 0.5000. Primero se calcula z:

$$z = \frac{149.5 - 160}{5.66} = -1.86$$

Del apéndice D, el área es 0.4686.

Examen capítulo 7

1. a. 1) Sólo hay dos resultados mutuamente excluyentes: la respuesta es correcta o equivocada.
   2) La distribución es el resultado de contar el número de respuestas correctas.
   3) La respuesta a cada pregunta es independiente.
   4) La probabilidad p permanece igual de una pregunta a otra. Es $\frac{1}{4}$, o sea 0.25.

   b. 0.0143, lo que indica que la probabilidad de adivinar 35 o más respuestas correctas es muy remota.

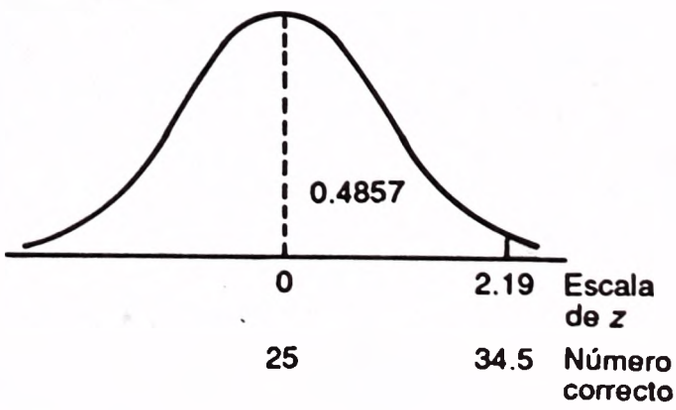
$$\mu = np = 100(0.25) = 25$$
$$\sigma^2 = np(1 - p)$$
$$= 100(0.25)(1 - 0.25) = 18.75$$

Entonces

$$\sigma = \sqrt{18.75} = 4.33$$
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{34.5 - 25}{4.33} = 2.19$$

El área, según el apéndice D, es 0.4857. Restando: 0.5000 − 0.4857 = 0.143.

c.



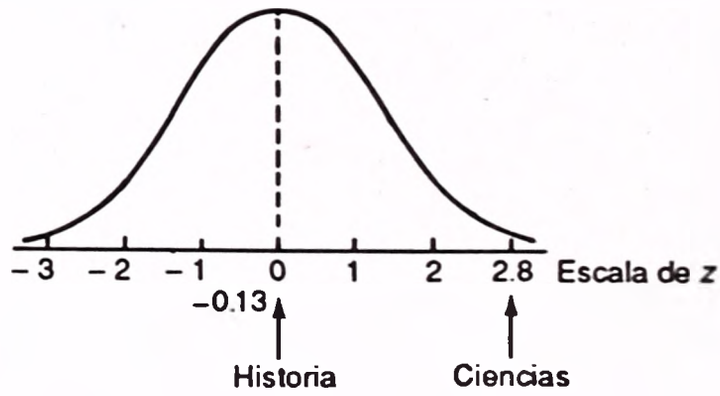
2. $\frac{6}{10}$ de 1%, obtenido por

$$z = \frac{1\,250 - 1\,200}{20} = 2.5$$

El área bajo la curva para un z de 2.50 es 0.4938. Restándola de 0.5000 se obtiene 0.0062, o sea $\frac{6}{10}$ de 1%.

3. a. Ligeramente por abajo del promedio en la prueba de historia.
   b. En el 1% superior con respecto a la prueba de ciencias.
   c. Historia Ciencias

$$z = \frac{74 - 75}{8} = -0.13 \qquad z = \frac{74 - 60}{5} = 2.8$$



4. Aproximadamente 118, obtenido por:

$$z = \frac{13 - 15}{1.75} = -1.14$$

El área bajo la curva es 0.3729

$$z = \frac{16 - 15}{1.75} = 0.57.$$

El área bajo la curva es 0.2157.
Sumando: 0.3729 + 0.2157 = 0.5886.
Entonces, 0.5886 × 200 = 117.72.

Repaso de los capítulos 5 – 7

Esta parte es un repaso de los principales conceptos, términos, símbolos y ecuaciones presentados en los capítulos 5, 6 y 7. Estos tres capítulos se dedicaron a un método para manejar la incertidumbre, como un ejemplo de lo anterior en los negocios, considérese la función del departamento de control y certificación de calidad en la mayoría de las empresas de producción en masa. Por lo general el departamento no tiene ni el personal ni el tiempo suficientes para verificar, por ejemplo, los 200 módulos conectables producidos en un periodo de dos horas. Un procedimiento estándar puede necesitar que se tome una muestra de 5 módulos y enviar los 200 módulos a los clientes si los 5 seleccionados operan en forma correcta. Sin embargo, si uno o más de la muestra son defectuosos, se verificarán los 200. Considerando que los cinco funcionen de manera correcta, el personal de control de calidad no puede estar absolutamente seguro de que su acción (permitir el envío de los módulos) resultará correcta. Podría ser que los 5 seleccionados al azar fueran los únicos de los 200 que funcionaran bien. En este caso, la teoría de la probabilidad permite evaluar la incertidumbre que se presenta en el envío de módulos defectuosos. Además, la probabilidad como una evaluación de la incertidumbre interviene cuando Gallup, Harris y otros especialistas en encuestas de opinión predicen, por ejemplo, que cierto candidato ganará la elección para un determinado puesto.

En el capítulo 5 se observó que una *probabilidad* es un número entre 0 y 1 inclusive, que evalúa la creencia de que ocurrirá un evento específico. Un especialista en pronósticos meteorológicos podría indicar que la probabilidad de que llueva mañana es 0.20. El director de proyectos de una empresa que participa en el concurso para un sistema de ferrocarril subterráneo en Bangkok podría evaluar la posibilidad de que su compañía obtenga el contrato como de 50–50. Se consideraron las formas como es posible combinar las probabilidades empleando las reglas de adición y multiplicación, algunos principios de conteo y el importante teorema de Bayes.

En el capítulo 6 se presentaron tres distribuciones probabilísticas *discretas:* la *distribución binomial,* la *distribución hipergeométrica* y la *distribución de Poisson.* En los siguientes capítulos se analizarán otras distribuciones (la distribución *t,* la distribución ji cuadrada, etc.). Las distribuciones probabilísticas son simplemente listados de todos los posibles resultados de un experimento y la probabilidad asociada a cada resultado. Una distribución de probabilidad permite evaluar resultados muestrales.

Como ejemplo, suponga que una empresa de investigación de consumo, como la National Family Opinion (NFO) (de Estados Unidos), realizó una encuesta para determinar si quienes compran abarrotes, pueden o no identificar el nombre o marca de un producto si éste no aparece en la lata, caja o paquete. Para la pregunta 1, NFO borró el nombre de una sopa y dio al comprador cinco posibilidades: 1) Campbell's, 2) Knorr, 3) Progresso, 4) Chalet Suzanne, y 5) Heinz.

Hubo seis preguntas semejantes y 1 000 compradores participaron en el experimento. Existe la posibilidad de que aquellos compradores no familiarizados con las diferentes etiquetas y marcas, seleccionen un nombre al azar, es decir, que adivinen la marca. De manera que se genera una distribución probabilística binomial para ver cómo sería una distribución aleatoria de selecciones. Estas probabilidades aparecen en la columna 2 de la tabla que sigue; los números esperados están en la columna 3. Obsérvese que sólo es de esperar que 2 de 1 000 compradores adivinen en forma correcta 5 de las 6 preguntas.

1	*2*	*3*	*4*
Número de identificaciones correctas	*Probabilidad **	*Número esperado al azar*	*Número real en la encuesta*
0	0.262	262	5
1	0.393	393	16
2	0.246	246	10
3	0.082	82	27
4	0.015	15	81
5	0.002	2	346
6	0.000	0	515
	1 000	1 000	1 000

* Probabilidades tomadas del apéndice A.

Prácticamente es de esperar que ninguno de los compradores acierte en las seis. Las respuestas reales están en la columna 4. Una comparación de las columnas 3 y 4 indica que un gran porcentaje de los compradores pueden identificar la marca del producto al ver la etiqueta. NFO podría llegar a la conclusión que es poco probable que para un número tan grande de compradores se seleccionen al azar tantos nombres correctos de marca.

MINITAB y otros programas de computadora pueden generar una distribución binomial, dados n y p. En la página siguiente aparece el listado MINITAB para el ejemplo anterior.

En el capítulo 7 se presentó la *distribución probabilística normal,* de gran importancia, que es una distribución continua. Algunos fenómenos, como la resistencia a la tensión de alambres y los pesos del contenido de latas y botellas, se aproximan a una distribución normal (en forma de campana). En realidad, existe una familia de distribuciones normales, cada una con sus propias media y desviación estándar. Por ejemplo, existe una distribución normal para una media de $100 y una desviación estándar de $5, otra para una media de $149 y una desviación estándar de $5.26,

```
MTB > pdf ;
SUBC> binomial n=6 , p> . 20 .

    BINOMIAL WITH N = 6 P = 0 . 200000
    K          P( X = K )
    0           0 . 2621
    1           0 . 3932
    2           0 . 2458
    3           0 . 0819
    4           0 . 0154
    5           0 . 0015
    6           0 . 0001
```

y así sucesivamente. Se observó que una distribución probabilística normal tiene perfil de campana y es simétrica con respecto a su media, y que las colas o extremos de la curva normal se extienden en una y otra direcciones hasta el infinito. Puesto que existe un número ilimitado de distribuciones normales, es difícil comparar dos o más distribuciones en forma directa. En vez de esto, las distribuciones que interesan pueden *estandarizarse*. A la distribución de estos valores estandarizados se le denomina *distribución normal estándar*. Esta distribución tiene media 0 y desviación estándar 1. Por ejemplo, resulta muy útil para comparar distribuciones que estén en distintas unidades. La distribución de los ingresos de gerentes de nivel medio y una distribución de sus calificaciones de eficiencia es un ejemplo de distribuciones en unidades distintas.

GLOSARIO

Capítulo 5

Evento Resultado de un experimento. Por ejemplo, un evento puede ser tres piezas defectuosas en un envío.

Experimento Actividad que se observa o mide. Por ejemplo, un experimento puede consistir en contar el número de respuestas correctas a una pregunta.

Fórmula de combinación Si el orden *a, b, c,* se considera igual que el *b, a, c,* o que el *c, b, a,* etc., el número de ordenaciones o arreglos se determina por medio de:

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Fórmula de multiplicación Es una de las fórmulas que pueden utilizarse para contar el número de posibles resultados de un experimento. Indica que si hay m formas de hacer una cosa y n formas de hacer otra, existen $m \times n$ formas de hacer ambas. Ejemplo: una tienda de deportes ofrece dos chamarras deportivas y tres pantalones que hacen juego, en $400. ¿Cuántos juegos diferentes puede haber? Respuesta: $m \times n = 2 \times 3 = 6$.

Fórmula de permutación También se utiliza para contar el número de posibles resultados. Si *a, b, c* es una ordenación o arreglo, *b, a, c,* otro, *c, a, b,* uno más, etc., el número total de arreglos está determinado por

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Frecuencia relativa Concepto de probabilidad basado en la experiencia pasada. Por ejemplo, la Metropolitan Life Insurance Company informó que durante el año, 100.2 de cada 100 000 personas en Wyoming, murió en un accidente (en vehículos de motor, caída, ahogamiento, disparo de armas de fuego, etc.). Con base en esta experiencia, la compañía puede estimar la probabilidad de muerte accidental para una persona específica en Wyoming: 100.2/100 000 = 0.001002.

Probabilidad Número entre 0 y 1 inclusive, que mide la posibilidad de que ocurra un evento específico.

Probabilidad clásica Probabilidad basada en la consideración de que cada uno de los resultados es igualmente posible. Por ejemplo, en la tirada de una moneda un sol o un águila son igualmente posibles. Utilizando este concepto de probabilidad, si en n posibles resultados hay la probabilidad de un resultado específico es $1/n$. De esta forma, en la tirada de una moneda la probabilidad de cara es $1/n = {}^1/_2$.

Probabilidad subjetiva Posibilidad de que un evento suceda con base en información disponible: presentimiento, opinión personal, opinión de otros, rumores, etc.

Regla especial de adición Para que esta regla se cumpla, los eventos deben ser mutuamente excluyentes. Para dos eventos, la probabilidad de que ocurra A o B se determina por medio de:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo: la probabilidad de que caiga un as o un dos en la tirada de un dado es $P(A \text{ y } B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Regla especial de multiplicación Si dos eventos no están relacionados (es decir, son independientes) esta regla se aplica para determinar la probabilidad de su ocurrencia conjunta.

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo: la probabilidad de dos soles en dos tiradas de una moneda es de

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Regla general de adición Se utiliza para combinar probabilidades cuando los eventos *no* son mutuamente excluyentes.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

Regla general de multiplicación Se utiliza cuando los eventos no son independientes. Ejemplo: se sabe que hay tres radios defectuosas en una caja que contiene 10 aparatos. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar dos radios defectuosas en las dos primeras selecciones de la caja?

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = 0.067$$

en donde $P(B|A)$ significa la "probabilidad de que ocurra B dado que ya ocurrió A".

Teorema de Bayes Fue desarrollado por el Reverendo Bayes durante el siglo XVII; es una regla diseñada para determinar la probabilidad de que ocurra un evento *A*, dado que ha ocurrido otro evento *B*.

Capítulo 6

Distribución de Poisson En ocasiones se utiliza para aproximar probabilidades binomiales cuando *n* es grande y *p* es pequeña. Lo que se considera "grande" o "pequeño" no está definido con precisión, pero una regla general es que *n* debe ser igual a o mayor que 20, y *p* igual a o menor que 0.05

Distribución probabilística (o de probabilidad) En forma de tabla, contiene todos los posibles resultados de un experimento y la probabilidad correspondiente asociada a cada resultado.

Distribución probabilística binomial Se basa en una variable aleatoria discreta. Tiene estas características:

1. Cada resultado es mutuamente excluyente, lo que significa que no puede ser "éxito" y "fracaso" al mismo tiempo. Ejemplo: la respuesta a una pregunta de opción múltiple es correcta o equivocada.
2. La distribución es el resultado de contar el número de éxitos. Por ejemplo, los conteos pueden ser el número de respuestas correctas a una prueba de opción múltiple de 10 preguntas. Los conteos en listados serían 0, 1, 2, . . . , 10.
3. Cada ensayo es independiente, lo cual significa que la respuesta al ensayo 1 (correcta o equivocada) de ninguna manera afecta a la respuesta al ensayo 2, etc.
4. La probabilidad de un éxito permanece igual de un ensayo a otro. Ejemplo: para una pregunta de opción múltiple con cuatro opciones por pregunta, la probabilidad de adivinar acertadamente en la respuesta a la pregunta 1 es de 0.25, la de acertar en la respuesta a la pregunta 2 también es de 0.25, y así sucesivamente.

Variable aleatoria Cantidad obtenida a partir de un experimento que, por azar, puede dar como resultado valores diferentes. Por ejemplo, un conteo del número de accidentes (experimento) en una carretera durante una semana podría ser 10, u 11, o 12, y así sucesivamente.

Variable aleatoria continua Puede tomar un número infinitamente grande de valores dentro de ciertas limitaciones. Ejemplo: La estatura de un delantero de un equipo de basquetbol puede ser (en pulgadas) de 78.0, 78.01, 78.014, y así sucesivamente, dependiendo de la exactitud del dispositivo de medición que se utilice.

Variable aleatoria discreta Puede tomar sólo ciertos valores específicos. Ejemplo: una familia puede estar formada por 1, 2, 3, . . . personas, y no por – 14 o por $2\frac{1}{4}$ personas.

Capítulo 7

Distribución probabilística normal Es una distribución continua. Se observó que tiene perfil de campana y es simétrica; la media la divide en dos partes iguales. Además, la curva normal se extiende indefinidamente en una y otra dirección; sin tocar nunca el eje *X*. Al convertir una distribución normal a una *distribución normal estándar*, es posible, por ejemplo, comparar dos o más distribuciones que tengan medias significativamente distintas, o distribuciones en diferentes unidades (como ingresos y tiempos de servicio).

Factor de corrección por continuidad Se utiliza para mejorar la exactitud de la aproximación de una distribución discreta (binomial) por medio de una distribución continua (normal).

Valor z Desviación (o distancia) entre un valor seleccionado y la media poblacional, dividida entre la desviación estándar de la población. Se llama también desvío normal estandarizado.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Las respuestas a los ejercicios de revisión de número impar se dan al final del libro.

Parte I: llene los espacios en blanco.

1. Con base en la evaluación del mercado de valores, se indica que hay probabilidades 50–50 de que los precios del mercado empiecen a bajar dentro de dos meses. Este concepto de probabilidad basado en su creencia o confianza se denomina _____.
2. Se realiza un estudio del ausentismo en clases. En el estudio de la probabilidad, a esta actividad específica se le denomina _____.
3. Con relación al ejercicio 2. Se determinó que 126 estudiantes no asistieron a las clases matutinas del lunes. A este número (126) se le denomina _____.
4. Para aplicar esta regla de adición:

$$P(A \text{ o } B \text{ o } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

   los eventos deben ser _____.
5. La dirección de una empresa industrial afirma que la probabilidad de un relevador defectuoso es sólo 0.001. La regla que debe utilizarse para determinar la probabilidad de que el relevador no tenga defectos es _____. La fórmula para esa regla es _____. La probabilidad de que un relevador específico no sea defectuoso es _____.
6. En el caso de una distribución probabilística, la suma de todos los resultados posibles debe ser igual a _____.
7. ¿Es la distribución binomial discreta o continua? _____.
8. Las características de una distribución probabilística binomial son: _____, _____, _____, _____.
9. ¿Es la distribución probabilística de Poisson discreta o continua? _____.
10. Para construir una distribución de Poisson, usted necesita _____.
11. Las características de una distribución de probabilidad normal y su curva o gráfica respectiva son: _____, _____, _____.
12. Si se convierten los valores de una distribución normal a una distribución que tiene media de 0 y desviación estándar de 1, esta distribución resultante se denomina _____.

Parte II: problemas

13. Un curso autodidáctico de principios de administración se ofreció a todos los empleados de una compañía electrónica. Al terminar el curso se aplicó una prueba a los empleados, con los siguientes resultados:
    ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar:
    a. ¿Haya calificado con una A?

Calificación del curso	*Número de calificaciones*
A	20
B	35
C	90
D	40
F	10
No acreditación	5

b. ¿Haya calificado con una C o mayor?
c. ¿No haya fallado ni haya acreditado?

14. Se afirma que un nuevo medicamento para el acné tiene una efectividad de 80%; es decir, de cada 100 personas que lo aplican, 80 muestran importante mejoría. Se utiliza en un grupo de 15 personas.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que las 15 presenten importante mejoría?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 9 de las 15 muestren una notable mejoría?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que en 12 o más personas se tenga mejoría importante?

15. Una institución bancaria investiga de manera concienzuda a los solicitantes de pequeños préstamos para mejoras a la vivienda. Su registro de fallas es muy impresionante. La probabilidad de que un prestatario no cumpla es sólo 0.005. El banco ha aprobado 400 préstamos de esa clase. Si se considera que se aplica la distribución probabilística de Poisson a este problema:
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los 400 prestatarios no cumpla?
    b. ¿Cuántos de los 400 no fallarán?
    c. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 o más de los prestatarios no cumplan sus compromisos?

16. Un estudio de la asistencia a los partidos de basquetbol en una universidad reveló que la distribución es normal, con media de 10 000, y desviación estándar de 2 000.
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que en un partido específico haya una asistencia de 13 500 o más?
    b. ¿Qué porcentaje de los juegos tuvo una asistencia de entre 8 000 y 11 500?
    c. En 10% de los partidos hubo una asistencia de cuántos o menos?

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. En la tabla que sigue se muestra la distribución (o reparto) en el 100º Congreso de Estados Unidos, por afiliación de partido y cámara del Congreso.

	Partido	
	Demócratas	*Republicanos*
Cámara de Representantes	258	177
Cámara de Senadores	54	46

    a. Se selecciona al azar a un elemento del Congreso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea republicano?
    b. Dado que la persona seleccionada es miembro de la Cámara de Representantes (o Diputados), ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un republicano?

c. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un miembro de la Cámara de Representantes o un demócrata?
d. ¿La afiliación partidaria es independiente de la Cámara del Congreso?

2. El Internal Revenue Service (banco federal de Estados Unidos) ha separado 200 declaraciones de impuestos en las que la cantidad expresada como contribución a obras caritativas, parece excesiva. Del grupo se selecciona una muestra de seis declaraciones. Si dos o más de este grupo muestreado tiene cantidades "excesivas" deducidas por contribuciones benéficas, se efectuará una auditoría a todo el grupo. ¿Cuál es la probabilidad de que se aplique auditoría a todo el grupo, si la verdadera proporción de deducciones "excesivas" es 20%? ¿Qué probabilidad hay si la proporción es 30%?
3. Una compañía de seguros concederá uno para una plataforma marina de producción petrolera durante un año. El director de la aseguradora estima las siguientes pérdidas para esa plataforma (en millones de dólares) con las probabilidades correspondientes:

Monto del paso (millones de dólares)	*Probabilidad del paso*
0	0.98
40	0.016
300	0.004

a. ¿Cuál es el monto esperado que la firma tendría que pagar por reclamaciones?
b. ¿Cuál es la posibilidad de que en realidad la aseguradora pierda menos que la cantidad esperada?
c. Dado que la compañía tenga que pagar, ¿cuál es la posibilidad de que sea por $300 millones?
d. La aseguradora ha fijado la prima anual en $2.0 millones de dólares. ¿Parece ser esto una prima justa? ¿Cubrirá su riesgo?

4. La distribución del número de niños en edad escolar en un área urbana es:

Número de niños	0	1	2	3	4
Porcentaje de familias	40	30	15	10	5

a. Determine la media y la desviación estándar del número de niños en edad escolar por familia en dicha área.
b. Se va a construir una nueva escuela en tal zona. Se requiere una estimación del número de niños en edad escolar. Hay 500 familias (o unidades familiares). ¿De cuántos niños sería la estimación?
c. Se necesita cierta información adicional, solamente aquellas familias que tienen niños. Convierta la distribución anterior a una para familias con niños. ¿Cuál es el número promedio de infantes entre las familias que tienen pequeños?

8

Métodos y distribuciones de muestreo

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Explicar por qué en muchas situaciones una muestra es la única forma posible de tener conocimiento sobre una población.
2. Explicar los diversos métodos para seleccionar una muestra.
3. Diferenciar entre muestreo probabilístico y muestreo no probabilístico.
4. Definir y elaborar una distribución de muestreo de medias muestrales.
5. Explicar el "teorema de límite central" y su importancia en la inferencia estadística.
6. Calcular intervalos de confianza para medias y proporciones.
7. Determinar qué tan grande debe ser una muestra para medias y proporciones.

En los capítulos del 1 al 4 se ha hecho énfasis en las técnicas empleadas para describir datos. Para ilustrar estas técnicas, se organizaron las rentas mensuales de condominios en una distribución de frecuencias, y se calcularon los diferentes promedios y medidas de dispersión. Medidas como la media y la desviación estándar fueron evaluadas para describir la tendencia central de los datos y su grado de dispersión. En estos capítulos el interés fue *describir algo que ya ha ocurrido.*

En el capítulo 5 se establecieron los fundamentos de la parte inferencial de la Estadística con un repaso de los conceptos básicos de probabilidad. En el capítulo 6 se analizaron en forma extensa tres distribuciones discretas: la hipergeométrica, la binomial y la de Poisson. En el capítulo 7 se presentó la distribución probabilística normal, que es una distribución continua. Las distribuciones de probabilidad engloban todos los resultados posibles de un experimento y la probabilidad asociada a cada resultado. Las distribuciones se generan principalmente para evaluar *algo que podría ocurrir.*

En este capítulo se analizará otra distribución probabilística denominada **distribución muestral de las medias.** Sin embargo, antes de proceder a hacerlo, ¿puede descubrir qué tienen en común estos cuatro casos?

Caso 1: El departamento de control de calidad de una compañía está encargado de garantizar y certificar la calidad de la producción. Para verificar la resistencia a la tensión del alambre de acero fundido, se seleccionan cinco piezas pequeñas cada tres horas y se determina la resistencia a la tensión de cada pieza estirándola hasta que se rompe.

Caso 2: El departamento de mercadotecnia de una empresa, tiene la responsabilidad de averiguar la opinión de los consumidores respecto a nuevos productos. Para determinar el potencial de ventas de un nuevo jabón, se pidió a 452 consumidores que lo probaran durante una semana. Al finalizar este periodo, cada uno llenó un cuestionario acerca de dicho jabón.

Caso 3: Se empleó a una investigadora para reunir las opiniones de los votantes registrados respecto a políticas del gobierno federal de Estados Unidos. Se seleccionaron aleatoriamente 2 000 electores registrados. Se tomaron sus opiniones sobre la política de inmigración, las medidas para disminuir la inflación, etc.

Caso 4: En un estudio sobre el patrón migratorio de las focas, los biólogos marinos de California colocaron etiquetas a 50 focas y se registraron sus movimientos durante un periodo de tres años.

Estos casos tienen las siguientes características en común: 1) Sería muy costoso, o incluso imposible, comunicarse con todos los votantes registrados en Estados Unidos, marcar a todas las focas y entrevistar a todos los consumidores. Además, revisar la resistencia a la tensión de todo el alambre de acero producido en un periodo de tres horas implicaría destruirlo, ¡por lo que no habría nada de alambre disponible para su venta! 2) Sólo se consideró a un grupo relativamente pequeño en cada estudio, es decir, únicamente se probaron cinco piezas de alambre, sólo se marcaron 50 focas, etc.

Estos casos ilustran una forma de evaluar la calidad del alambre de acero y las opiniones de consumidores acerca de un producto, esto es, se toma una *muestra*

de la *población* de interés. En el capítulo 1 se señaló que *una muestra es simplemente una parte de la población.* Las poblaciones en estos casos son todas las focas del océano, todos los electores o votantes registrados en Estados Unidos, todos los consumidores adultos y todo el alambre producido durante un periodo de tres horas. Obsérvese que la población pueden ser personas, objetos u otros fenómenos de interés. Se denomina *inferencia estadística* al proceso de deducir conclusiones generales acerca de un grupo completo (la *población*) con base en información estadística obtenida de un grupo pequeño (la *muestra*). Por ejemplo, si se encuentra que las cinco piezas de alambre con las que se probó la resistencia a la tensión no cumplen las especificaciones, el inspector de control de calidad podría concluir que la producción durante el periodo de tres horas no fue satisfactoria. Si a 403 de los 452 consumidores en la muestra *no les agradó* el nuevo jabón, sin duda que la fábrica no manufacturará y presentará en el mercado ese producto.

El tomar decisiones con base en información incompleta no es algo novedoso. Por ejemplo, durante siglos los catadores de vino han hecho predicciones sobre la vinicultura con base en unos cuantos sorbos. Muchos compradores adquieren una pizza en una tienda después de probar una rebanada pequeña. (La inferencia es que si una muestra pequeña tiene buen sabor, la pizza completa también lo tendrá.) En la industria una muestra aleatoria de 50 cojinetes puede resultar en una inferencia (generalización) de que 5% de todos los cojinetes producidos son defectuosos. De manera semejante, un inventario de unos cuantos artículos en una tienda de departamentos puede resultar en una predicción de que si las medidas de seguridad empleadas en la actualidad permanecen sin cambio, 8% de las existencias serán robadas durante el mes. En medicina, una muestra de sangre puede llevar a inferir que el paciente está anémico.

En este capítulo se explicará primero por qué, en muchos casos, el muestreo puede ser la única forma lógica de determinar algo acerca de una población. Se analizarán algunos de los métodos básicos para seleccionar una muestra probabilística. A continuación se explicará por qué las muestras estadísticas pueden ser diferentes de los parámetros poblacionales correspondientes. También se exponen en este capítulo "el teorema del límite central" (o "central de límite"), los intervalos de confianza y el tamaño conveniente de la muestra.

¿POR QUE MUESTREAR LA POBLACION?

Como se observó con anterioridad, a menudo no es posible estudiar la población completa. Algunas de las principales razones por las que es necesario muestrear son:

1. *La naturaleza destructiva de ciertas pruebas.* Si los catadores de vino tuvieran que beberse todo el vino para evaluarlo, consumirían toda la producción y no quedaría producto para vender. En el área de producción industrial, las placas, alambres de acero y productos similares deben tener determinada resistencia mínima a la tensión. Para asegurar que el producto cumpla con el estándar mínimo, se selecciona una muestra relativamente pequeña. Cada pieza se estira hasta que

se rompe y se registra el punto de ruptura (por ejemplo, medido en libras por pulgada cuadrada). Obviamente si todo el alambre o las placas se sometieran a pruebas de resistencia a la tensión, no quedaría ningún producto para su venta o uso. Por esta misma razón sólo se selecciona una muestra de película fotográfica para determinar la calidad de la película producida. En una compañía sólo se prueba la germinación de unas cuantas semillas antes de la temporada de siembra.

2. *La imposibilidad física de revisar todos los integrantes de la población.* Las poblaciones de peces, aves, serpientes, mosquitos y similares son grandes y están en movimiento constantemente, nacen y mueren. En vez de intentar siquiera contar todos los patos de Canadá o todos los peces en el Lago Erie, se hacen estimaciones utilizando varias técnicas, como contar todos los patos de un estanque seleccionado aleatoriamente, haciendo revisiones con nasas, o colocando redes en lugares predeterminados en el lago.

3. *El costo de estudiar a todos los integrantes de una población a menudo es prohibitivo.* Las organizaciones para el escrutinio de la opinión pública y pruebas a consumidores, como Gallup Polls y Marketing Facts, ubicadas en Chicago, comúnmente entrevistan a menos de 2 000 familias de aproximadamente 50 millones en Estados Unidos. Una organización de tipo panel para estudios de consumo cobra aproximadamente $40 000 (dólares) por enviar por correo muestras y tabular las respuestas con la finalidad de probar un producto (como cereal, alimento para gatos o perfume). La misma prueba de un producto utilizando a 50 millones de familias costaría aproximadamente 1 000 millones de dólares.

4. *Lo adecuado de los resultados de la muestra.* Incluso si se contara con fondos, es dudoso que la precisión adicional de una muestra de 100% —es decir, la población completa— resulte fundamental en la mayoría de los problemas. Por ejemplo, el gobierno usa una muestra de tiendas de abarrotes dispersas en el territorio de Estados Unidos para determinar el índice mensual de precios de artículos alimenticios. Los precios de pan, frijol, leche y otros productos básicos se incluyen en el índice. Probablemente dicho índice no diferiría una décima de 1% de la estimación publicada si se registraran mensualmente los precios y se agregaran al cálculo del índice productos menores que ahora no se incluyen, como aguacate, granada y berro. Además, es poco probable que la inclusión de todas las tiendas de abarrotes de Estados Unidos afectara significativamente el índice, ya que los precios de la leche, pan y otros productos básicos por lo general no varían en más de un centavo de una cadena de tiendas a otra.

5. *En ocasiones se necesitaría mucho tiempo para entrevistar a toda la población.* Un candidato a un puesto público desearía determinar las probabilidades de que lo elijan. Sólo serán necesarios uno o dos días para determinar una muestra de escrutinio utilizando al personal existente y las entrevistas de campo de una organización especializada en escrutinios. ¡Si se empleara el mismo personal de encuestadores y trabajando siete días a la semana, se precisarían casi 200 años para entrar en contacto con toda la población votante!

Incluso si pudiera contratarse a un gran número de investigadores, el costo del contacto con todos los votantes probablemente no ameritaría el gasto. Si el candi-

dato fuera muy popular, el escrutinio muestreado podría indicar que tal vez recibiría entre 79% y 81% del voto popular. No se justificaría el gasto adicional para averiguar que tal persona podría recibir exactamente 80% de los votos.

¿QUE ES UNA MUESTRA PROBABILISTICA?

En general, hay dos tipos de muestras: la muestra probabilística y la muestra no probabilística. ¿Qué es una muestra de esta clase?

Muestra probabilística Muestra que se selecciona de modo que cada integrante de la población en estudio tenga una probabilidad conocida (no igual a cero) de ser incluido en la muestra.

Si se realiza un muestreo de probabilidad, cada integrante de la población tiene probabilidad de ser seleccionado. Al utilizar *métodos no probabilísticos,* no todos los integrantes tienen probabilidad de ser incluidos en la muestra. En estos casos los resultados pueden estar **sesgados,** lo que significa que tales resultados de la muestra pueden no ser representativos de la población. El muestreo por panel o por acción directa son métodos no probabilísticos. Por ejemplo, un panel puede constar de 2 000 propietarios de gatos o de madres de bebés recién nacidos. El panel se forma para solicitar las opiniones acerca de un alimento para gatos o de pañales recientemente producidos para bebés. La selección de los miembros del panel se basa en el juicio de la persona que realiza la investigación y, por tanto, los resultados de la muestra pueden no ser representativos de toda la población de propietarios de gatos y de madres de recién nacidos (ya que no todos los propietarios de gatos o todas las madres de recién nacidos tienen oportunidad de ser seleccionados). Los procedimientos estadísticos que se emplean en este libro para evaluar los resultados muestrales se basan en el muestreo probabilístico. En consecuencia, sólo se analizarán los métodos del citado muestreo en la siguiente sección.

METODOS DE MUESTREO PROBABILISTICO

No hay un "mejor" método para seleccionar una muestra probabilística de una población de interés. El que se emplea para seleccionar una muestra de facturas de un archivador podría no ser el más apropiado para elegir una muestra nacional de electores. Sin embargo, los métodos de muestreo probabilístico tienen un objetivo similar: *permitir que el azar determine los integrantes que se incluirán en la muestra.* El primer método que se presenta es el **muestreo aleatorio simple.**

Muestreo aleatorio simple

Muestra aleatoria simple Muestra formulada de manera que cada integrante de la población tenga la misma probabilidad de quedar incluido.

Para ilustrar el muestreo aleatorio simple y su selección, supóngase que una población consta de 845 trabajadores de una industria. Se seleccionará una muestra de 52 a partir de esta población. Una forma de asegurar que todos los empleados en la población tengan la misma oportunidad de ser elegidos es escribir primero el nombre de cada uno en una papeleta y depositar en una caja todos los papeles. Después que se han mezclado bien se realiza la primera selección. Este proceso se repite hasta que se eligen 52, el tamaño de la muestra.

Un método más adecuado de definir una muestra aleatoria es emplear el número de identificación de cada empleado y una tabla de *números aleatorios.* Como su nombre lo indica, estos números han sido generados por un proceso aleatorio (en este caso, con una computadora). Para cada dígito de un número, la probabilidad de 0, 1, 2, . . . , 9 es la misma. Así, la probabilidad de que el empleado número 011 sea elegido, es la misma que la del 722 o el 338. Por tanto, se eliminan por completo los sesgos en el proceso de selección.

En la siguiente ilustración se muestra parte de una tabla de números aleatorios. Para utilizar dicha tabla a fin de seleccionar una muestra de trabajadores, primero debe elegirse un punto de inicio en la tabla. Supóngase que la hora es 3:04. Debe ver la tercera columna y después bajar al cuarto conjunto de números. El resultado es 03759. Como sólo hay 845 empleados, 037 es el número del primer empleado que será elemento de la muestra. Para continuar seleccionando, se puede ir en cualquier dirección. Supóngase que se decide recorrer a la derecha. Los primeros tres dígitos del número a la derecha de 03759 son 4, 4, 7, el número del empleado que se escogerá como segundo elemento de la muestra. El tercer número de tres dígitos a la derecha es 961. No puede usar 961 ya que sólo hay 845 empleados. Se continúa hacia la derecha y se selecciona al trabajador 784, al 189, y así sucesivamente. Otra forma de elegir el punto de inicio es cerrando los ojos y señalando un número de la tabla. En el apéndice E se presenta una tabla de números aleatorios.

50525	57454	28455	68226	34656	38884	39018
72507	53380	53827	42486	54465	71819	91199
34986	74297	00144	38676	89967	98869	39744
66851	27305	03759	44723	96108	78489	18910
06738	62879	03910	17350	49169	03850	18910
11448	10734	05837	24397	10420	16712	94496

Punto de partida — Segundo empleado — Tercer empleado

Un estudio realizado por Marion Bryson y Robert Mason[1] ilustra aún más el uso de una tabla de números aleatorios y el muestreo aleatorio simple.

[1] Oficina: Ordnance Research, *Physical Inventory Accounting Program,* Reporte técnico número 1.

En un gran depósito (depot) de pertrechos y repuestos del ejército de Estados Unidos hay 18 almacenes donde se tienen 186 810 artículos diferentes como neumáticos, tuercas, pernos, bandas para tanques y cadenas para ruedas. En cada bodega hay naves y en cada una de éstas existen compartimentos. Por ejemplo, en la bodega número 17 se guardan partes de vehículos. En la nave 260, compartimento 2, se encuentran los cigüeñales de "jeep". En la nave 260, compartimento 3, están los tapones de radiador para "jeep".

El problema fue seleccionar al azar un compartimento de un almacén y contar todos los artículos que había en él. Este conteo físico se comparó con el conteo que indicaban los registros realizados automáticamente sobre las existencias disponibles. Así, en esencia el problema era un inventario físico que implicaba métodos de muestreo. El objetivo del proyecto de investigación fue determinar qué tan precisos eran los registros automatizados.

Para asegurarse de que cada compartimento tuviera la misma probabilidad de ser seleccionado, se utilizó una tabla de números aleatorios para elegir el almacén, la nave y el compartimento.

Si se hubieran seleccionado el almacén 5, la nave 455 y el compartimento 6, un revisor se dirigiría a ese lugar y contaría el número de artículos en tal sitio.

¿Por qué se utilizó un método tan tardado para seleccionar los compartimentos que se muestrearon? La alternativa hubiera sido dejar que los revisores contaran los artículos en los sitios que ellos desearan. Sin duda los revisores habrían eludido contar los artículos en los compartimentos que contenían partes pesadas o grasosas y, probablemente, hubieran evitado los superiores a 6 metros de altura sobre el piso de un almacén. La omisión de los artículos en tales compartimentos para este proyecto de investigación acerca de un inventario físico, habría producido sesgos en los resultados, es decir, su omisión daría una imagen falsa acerca de la exactitud de los registros automatizados.

AUTOEXAMEN 8-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

A continuación se da la lista de clase de un curso de Estadísticas para administración (en una escuela en Estados Unidos). Se seleccionarán tres estudiantes y se les harán varias preguntas sobre el contenido del curso y el método de enseñanza.

1. Se escriben a mano los números del 00 al 45 en papeletas y se colocan éstas en un recipiente. Los tres números que se seleccionan son 31, 7 y 25. ¿Qué estudiantes se incluirían en la muestra?
2. Ahora utilice la tabla de dígitos aleatorios, apéndice E, para seleccionar su propia muestra.
3. ¿Qué haría si encontrara el número 59 en la tabla de dígitos aleatorios?

CSPM 264 01 BUSINESS & ECONOMIC STAT

8:00 AM 9:40 AM MW ST 118 LIND D

RANDOM NUMBER	NAME	CLASS RANK
00	SPILLSON JOHN	SO
01	ANGER CHERYL RENEE	SO
02	BALL CLAIRE JEANETTE	FR
03	BERRY CHRISTOPHER G	FR
04	BOBAK JAMES PATRICK	SO
05	BRIGHT M STARR	JR
06	CHONTOS PAUL JOSEPH	SO
07	DETLEV BRIAN HANS	JR
08	DUDAS VIOLA	SO
09	DULBS RICHARD ZALFA	JR
10	EDINGER SUSAN KEE	SR
11	FINK FRANK JAMES	SR
12	FRANCIS JAMES P	JR
13	GAGHEN PAMELA LYNN	JR
14	GOULD ROBYN KAY	SO
15	GROSENBACHER SCOTT ALAN	SO
16	HEETFIELD DIANE MARIE	SO
17	KABAT JAMES DAVID	JR
18	KEMP LISA ADRIANE	FR
19	KILLION MICHELLE A	SO
20	KOPERSKI MARY ELLEN	SO
21	KOPP BRIDGETTE ANN	SO
22	LEHMANN KRISTINA MARIE	JR
23	MEDLEY CHERYL ANN	SO
24	MITCHELL GREG R	FR
25	MOLTER KRISTI MARIE	SO
26	MULCAHY STEPHEN ROBERT	SO
27	NICHOLAS ROBERT CHARLES	JR
28	NICKENS VIRGINIA	SO
29	PENNYWITT SEAN PATRICK	SO
30	POTEAU KRIS E	JR
31	PRICE MARY LYNNETTE	SO
32	RISTAS JAMES	SR
33	SAGER ANNE MARIE	SO
34	SMILLIE HEATHER MICHELLE	SO
35	SNYDER LEISHA KAY	SR
36	STAHL MARIA TASHERY	SO
37	STJOHN AMY J	SO
38	STURDEVANT RICHARD R	SO
39	SWETYE LYNN MICHELE	SO
40	WALASINSKI MICHAEL	SO
41	KALKER DIANE ELAINE	SO
42	WARNOCK JENNIFER MARY	SO
43	WILLIAMS WENDY A	SO
44	YAP HOCK BAN	SO
45	YODER ARLAN JAY	JR

Muestreo aleatorio sistemático

El procedimiento de muestreo aleatorio simple puede ser difícil de usar en algunos casos de investigación. Por ejemplo, supóngase que la población de interés consta de 2 000 facturas colocadas en gavetas de archivos. Para tomar una muestra aleatoria simple en primer lugar se necesitaría numerar las facturas de 0000 a 1999. Utilizando una tabla de números aleatorios, una muestra de, por ejemplo, 100 números, tendría que seleccionarse después. Habría que localizar en las gavetas una factura que correspondiera a cada uno de estos 100 números. Esto sería una prolongada tarea. En su lugar, puede seleccionarse una **muestra aleatoria sistemática** simplemente seleccionando una factura de cada 20 de las que se encuentran en el archivo. La primera factura se elegiría utilizando un proceso al azar o fortuito, por ejemplo una tabla de números aleatorios. Si se selecciona la factura número 10, la muestra constaría de las facturas números 10, 30, 50, 70, . . .

Muestra aleatoria sistemática Los integrantes de la población se ordenan alfabéticamente, en un archivo según la fecha en que se reciben, o por algún otro método. Se selecciona al azar un punto de inicio y después se elige cada *k*-ésimo elemento de la población para la muestra.

Sin embargo, no debe utilizarse una muestra sistemática si hay un patrón predeterminado en la población. Por ejemplo, en el estudio sobre un inventario físico que se mencionara anteriormente, algunos de los almacenes del depósito de pertrechos tienen naves de seis compartimentos de alto. En la hilera inferior de compartimentos hay artículos de movimiento rápido, como grasa, pintura en aerosol y objetos de ferretería. Estos artículos se almacenan al nivel del piso para acelerar el trabajo de los encargados de surtir los pedidos. En los compartimentos de la parte superior se encuentran artículos que se mueven poco, como aros para neumáticos, cadenas de semioruga y percutores. En los cuatro compartimentos intermedios se guardan artículos de movimiento moderado, como neumáticos, faros y chavetas. Si se usara una muestra sistemática para revisar el inventario, sería muy probable que se seleccionara una muestra sesgada. Supóngase que el procedimiento de muestreo requiriera la selección de cada tercer compartimento y primero se eligiera el 1. Después se seleccionarían sistemáticamente los compartimentos 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 y 22.

6	7	18	19	← Artículos de movimiento lento
5	8	17	20	
4	9	16	21	← Artículos de movimiento moderado
3	10	15	22	
2	11	14	23	
1	12	13	24	← Artículos de movimiento rápido

Con el procedimiento sistemático se seleccionarán automáticamente cuatro compartimentos que contienen artículos de movimiento moderadamente rápido y un total de cuatro con artículos de movimiento rápido o lento. Esta división de 50–50 de la muestra no coincide con las características de la población real. La población consta de 16 compartimentos con artículos de movimiento moderadamente rápido, cuatro con artículos de movimiento rápido y cuatro con artículos de movimiento lento. Los resultados de la muestra sin duda estarían sesgados hacia los artículos de movimiento lento y rápido.

AUTOEXAMEN 8-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Consulte el autoexamen 8-1. Supóngase que la muestra debe constar de cada noveno estudiante que esté inscrito en la clase. Inicialmente se seleccionó aleatoriamente el cuarto estudiante registrado en la lista. Ese estudiante se numeró como 03. Considerando que los números aleatorios empiezan con 00, ¿qué estudiantes se elegirán para que sean miembros de la muestra?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. La siguiente es una lista de establecimientos de Marco's Pizza ubicadas en Toledo, Ohio (Estados Unidos). Se seleccionará una muestra de cuatro tiendas y se inspeccionarán según comodidad para los clientes, seguridad, higiene y otras características. Además se anotará si la tienda es propiedad del consorcio (C) o propiedad del administrador (M).
   a. Los números aleatorios que se seleccionan son 08, 18, 11, 54, 02, 41 y 54. ¿Qué tiendas se seleccionan?
   b. Utilice una tabla de números aleatorios para seleccionar su propia muestra de cuatro.

2. La siguiente es una lista de las ubicaciones de establecimientos de Wendy's Old Fashioned Hamburgers en el área metropolitana de Cordon (Estados Unidos). Además se indica si el establecimiento cuenta con barra de ensaladas.

Número aleatorio	*Establecimiento*	*Tipo de propietario*	*Número aleatorio*	*Establecimiento*	*Tipo de propietario*
00	2607 Starr Av	C	12	2040 Ottawa River Rd	C
01	309 W Alexis Rd	C	13	2116 N Reynolds Rd	C
02	2652 W Central Av	C	14	3678 Rugby Dr	C
03	630 Dixie Hwy	M	15	1419 South Av	C
04	3510 Dorr St	C	16	1234 W Sylvania Av	C
05	5055 Glendale Av	C	17	4624 Woodville Rd	M
06	3382 Lagrange St	M	18	5155 S Main	M
07	2525 W Laskey Rd	C	19	106 E Airport Hwy	C
08	303 Louisiana Av	C	20	6725 W Central & McCord	M
09	149 Main St	C	21	4252 Monroe	C
10	835 S McCord Rd	M	22	2036 Woodville Rd	C
11	3501 Monroe St	M	23	1316 Michigan Av	M

a. Se seleccionará e inspeccionará una muestra de cinco ubicaciones. Los números aleatorios obtenidos son 09, 16, 00, 49, 54, 12 y 04. ¿Qué tiendas se incluirán en la muestra?
b. Utilice una tabla de números aleatorios para determinar su propia muestra de cinco.

Número aleatorio	*Establecimiento*	*Barra de ensaladas*	*Número aleatorio*	*Establecimiento*	*Barra de ensaladas*
00	5555 Airport Hwy	S	09	3124 Monroe St	S
01	6525 Airport Hwy	S	10	27393 Helen Dr	NS
02	5166 Airport Hwy At Reynolds Rd	NS	11	4277 Monroe St	S
03	E Alexis Rd & Telegraph Rd	S	12	5804 Monroe	S
04	2124 W Alexis Rd	S	13	2866 Navarre Av	S
05	5560 W. Central Av	S	14	3435 Secor Rd	NS
06	914 Conant St	NS	15	1109 South Av	NS
07	3454 Dorr St	S	16	3465 Stickney Av	S
08	Front St & Maint St	S	17	1945 Woodville Rd	S

3. Véase el ejercicio 1 sobre las ubicaciones de los establecimientos de Marco's Pizza. Una muestra debe constar de cada séptima ubicación. Se selecciona como punto de inicio el número 03. ¿Qué tiendas se considerarán?
4. Véase el ejercicio 2 respecto a las ubicaciones de los establecimientos de Wendy's. Una muestra debe constar de cada quinta ubicación; 02 se selecciona como punto de inicio aleatorio. ¿Qué tiendas se incluirán en la muestra?

Muestreo aleatorio estratificado

Muestreo aleatorio estratificado Una población se divide primero en subgrupos, denominados estratos, y se selecciona una muestra de cada estrato.

Después que la población se ha dividido en estratos, puede seleccionarse una muestra *proporcional* o *no proporcional*. Como el nombre lo dice, un procedimiento de muestreo proporcional exige que el número de elementos en cada estrato tenga la misma proporción que se encuentra en la población. Por ejemplo, el problema puede ser estudiar los gastos de propaganda de las 352 compañías más grandes en Estados Unidos. Supóngase que el objetivo del estudio es determinar si las empresas que pagan altos dividendos (una medida de rentabilidad) gastan más o menos de cada dólar de ventas en propaganda, que lo que destinan a eso las empresas con bajos dividendos o con déficit. Considere que las 352 empresas se dividieron en cinco estratos. Si se han de seleccionar 50 empresas para un estudio intensivo, entonces se estudiaría una empresa con un nivel de rentabilidad de 30% o mayor, se seleccionarían aleatoriamente cinco compañías en el estrato 20-30, y así sucesivamente (véase la tabla 8-1).

TABLA 8-1

Número muestreado para una muestra aleatoria estratificada proporcional

Estrato	*Rentabilidad (dividendos)*	*Número de empresas*	*Porcentaje del total*	*Número muestreado*
1	30% y superior	8	2	1*
2	de 20 a 30%	35	10	5*
3	de 10 a 20%	189	54	27
4	de 0 a 10%	115	33	16
5	Déficit	5	1	1
Total		352	100	50

* 2% de 50 = 1; 10% de 50 = 5; etc.

En una **muestra estratificada** *no proporcional,* el número de integrantes estudiado en cada estrato es desproporcionado respecto a su número en la población. Entonces se ponderan los resultados de la muestra de acuerdo con la proporción del estrato respecto a la población total. Por ejemplo, si se utiliza el muestreo no proporcional en el caso anterior, se deberían ponderar los resultados del estrato 1 en 2/100, del estrato 2 en 10/100, del estrato 3 en 54/100, etc. Independientemente de si se usa un procedimiento de muestreo proporcional o no proporcional, cada artículo o persona de la población tiene probabilidad de ser seleccionado para la muestra.

El muestreo estratificado tiene la ventaja, en algunos casos, de reflejar con mayor precisión las características de la población que el muestreo aleatorio simple o el aleatorio sistemático. Obsérvese en la tabla 8-1 que 2% de las empresas pagan dividendos de 30% o más (estrato 1) y 1% tienen déficit (estrato 5). Si se tomara una muestra aleatoria simple de 50, no habría *posibilidad* de seleccionar alguna compañía de los estratos 1 o 5. Sin embargo, una muestra aleatoria estratificada aseguraría que al menos una empresa en el estrato 1 y una en el estrato 5 estuvieran representadas en la muestra.

EJERCICIOS

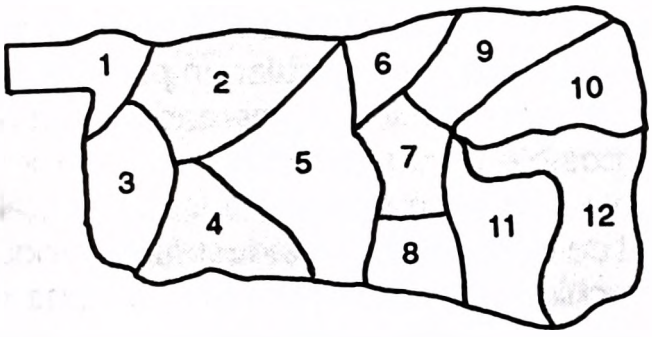
Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Véase el ejercicio 1 sobre la cadena Marco's Pizza, y considere que una muestra constará de tres ubicaciones, dos de ellas propiedad de la corporación y una propiedad del administrador. Seleccione una muestra según lo anterior.
6. Véase el ejercicio 2 acerca de la cadena Wendy's. Una muestra de cuatro restaurantes constará de tres con barra de ensaladas (E) y uno sin ella (SE). Seleccione la muestra de acuerdo con lo anterior.

Muestreo por conglomerados

Otro tipo común de muestreo es el muestreo por **conglomerados.** Se emplea a menudo para reducir el costo de muestrear una población dispersa en un área geográfica grande. Supóngase que se desea efectuar un reconocimiento para determinar los puntos de vista de industriales respecto a las políticas estatales y

gubernamentales sobre el ambiente. Si se seleccionara una muestra aleatoria de industriales y personalmente se comunicara con cada uno tomaría mucho tiempo y sería sumamente costoso. En su lugar podría emplearse el muestreo por conglomerados subdividiendo la región en áreas pequeñas (distritos). A menudo se denomina a éstas como *unidades primarias*. Supóngase que divide la región en 12 unidades primarias. Después selecciona aleatoriamente cuatro áreas menores: 2, 7, 4 y 12, y se concentran los esfuerzos en estas unidades primarias. Se podría tomar una muestra aleatoria de los industriales de cada una de estas unidades y entrevistarlos. (Obsérvese que ésta es una combinación del muestreo por conglomerados y el muestreo aleatorio simple.)



El análisis de los métodos de muestreo en las secciones anteriores no incluye todos los métodos de muestreo de los que dispone un investigador, y la presentación ha sido sumamente simplificada. Si realiza un proyecto de investigación sobre mercadotecnia, finanzas, contabilidad u otras consideraciones, será necesario que se consulten libros que hayan sido escritos exclusivamente en relación a la teoría del muestreo y diseño de muestras.

ERROR DE MUESTREO

En el análisis anterior se subrayó la importancia de seleccionar una muestra de manera que cada elemento de la población tenga una probabilidad real de ser seleccionado. Para lograr esto, podría elegirse un muestreo aleatorio simple, uno sistemático, uno estratificado, un muestreo por conglomerados, o una combinación de estos métodos. Lógicamente es poco probable que una media muestral sea *idéntica* a la media poblacional. De igual forma la desviación estándar u otra medida calculada a partir de la muestra, probablemente no sería *exactamente* igual al valor correspondiente de la población. Por tanto, podemos esperar que háya alguna diferencia entre una *estadística de muestra,* como la media muestral o la desviación estándar, y el *parámetro* correspondiente de la *población*. La diferencia entre una estadística de muestra y un parámetro de población se denomina **error de muestreo.** Este error se debe simplemente al azar.

Error de muestreo Diferencia entre una estadística de muestra y su parámetro de población correspondiente.

Supóngase que una población de cinco trabajadores de producción tiene tasas de eficiencia (o producción) de 97, 103, 96, 99 y 105. Considere además, que se selecciona una muestra de dos tasas (97 y 105) de la población para calcular la tasa media de la población. Tal media sería 101, obtenida por (97 + 105)/2. Se selecciona otra muestra de dos: 103 y 96, con una media muestral de 99.5. La media de todas las tasas (la media de la población) es 100, obtenida por (97 + 103 + 96 + 99 + 105)/5 = 500/5 = 100.0. El error de muestreo para la primera muestra es de 1.0, determinado por $\overline{X} - \mu = 101 - 100$. La segunda muestra tiene un error de muestreo de – 0.5. Cada una de estas diferencias, 1.0 y – 0.5, es el error que habría al calcular la media poblacional con base en la media muestral y estos errores de muestreo se deben al azar.

Ahora que se ha descubierto la posibilidad de un error de muestreo cuando se usan los resultados de la muestra para calcular un parámetro de población, ¿cómo puede el departamento de investigación en mercadotecnia realizar una predicción acertada sobre el éxito posible de un dentífrico recientemente producido o algún otro producto, únicamente con base en resultados muestrales? ¿Cómo puede el departamento de control de calidad de una industria de producción en masa enviar un cargamento de microchips basado únicamente en una muestra de 10 chips? ¿Cómo pueden las empresas de sondeos Gallup o Harris realizar una predicción acertada sobre una campaña electoral con base en una muestra de 2 000 electores registrados de una población votante de casi 90 millones? Para responder a estas preguntas primero debe desarrollarse una **distribución muestral** (o de muestreo) **de medias.**

DISTRIBUCION MUESTRAL DE MEDIAS

En el ejemplo sobre tasas de eficiencia se mostró que las medias muestrales de un tamaño específico varían de una muestra a otra. La tasa de eficiencia media de la primera muestra de dos empleados era 101, y la media de la segunda muestra fue 99.5. Probablemente una tercera muestra daría como resultado una media diferente. La media de la población era 100. Si se organizaran las medias de todas las muestras posibles de tamaño dos en una distribución probabilística, se obtendría la distribución muestral de medias.

Distribución muestral de medias Una distribución probabilística que consta de una lista de todas las medias muestrales posibles de un tamaño de muestra dado de una población y la probabilidad de ocurrencia asociada con cada media muestral.

En el siguiente ejemplo se ilustra la elaboración de una distribución muestral de medias.

✱ Ejemplo

Una empresa industrial (Tartus) tiene siete trabajadores de producción (considerados como la población). La retribución (salario por hora) de cada empleado se presenta en la tabla 8-2.

TABLA 8-2

Salarios (por hora) de los trabajadores de producción de la industria Tartus

Trabajador	*Salario*
Javier	$7
Saúl	9
Susana	8
Berta	8
Juan	7
Aura	8
Carlos	9

1. ¿Cuál es la media de la población?
2. ¿Cuál es la distribución muestral de medias?
3. ¿Cuál es la media de la distribución muestral?
4. ¿Qué observaciones pueden formularse respecto a la población y a la distribución muestral?

✔ Solución

1. La media de la población es $8(dólares), obtenida por:

$$\mu = \frac{\$7 + \$9 + \$8 + \$8 + \$7 + \$8 + \$9}{7}$$

2. Para determinar la distribución muestral de las medias, se seleccionaron todas las muestras posibles de tamaño cuatro sin reposición en la población, y se calcularon sus medias (véase la tabla 8-3 en la página 320).[2]
3. Se obtuvo la media de la distribución muestral de medias, sumando las diferentes medias muestrales y dividiendo la suma entre el número de muestras. La media de todas las medias muestrales en general se expresa como $\mu_{\bar{x}}$. El símbolo μ recuerda que es un valor poblacional, ya que se han considerado todas las muestras posibles. El subíndice $\bar{x}$ indica que es una distribución muestral de medias.

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\text{Suma de todas las medias muestrales}}{\text{Número total de muestras}} = \frac{\$8.00 + \$7.75 + \cdots + \$8.00}{35}$$

$$= \frac{\$280}{35} = \$8.00$$

[2] Obsérvese que hay 35 muestras (combinaciones) posibles, que se obtienen aplicando la fórmula que se presentó en el capítulo 5, o sea:

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$$

TABLA 8-3

Medias muestrales de todas las muestras posibles de tamaño cuatro

Nombres	*Salarios (por hora)*	*Suma*		*Media muestral*
Javier, Saúl, Susana, Berta	$7, $9, $8, $8	$32/4	=	$8.00
Javier, Saúl, Susana, Juan	7, 9, 8, 7	31/4	=	7.75
Javier, Saúl, Susana, Aura	7, 9, 8, 8	32/4	=	8.00
Javier, Saúl, Susana, Carlos	7, 9, 8, 9	33/4	=	8.25
Javier, Saúl, Berta, Juan	7, 9, 8, 7	31/4	=	7.75
Javier, Saúl, Berta, Aura	7, 9, 8, 8	32/4	=	8.00
Javier, Saúl, Berta, Carlos	7, 9, 8, 9	33/4	=	8.25
Javier, Saúl, Juan, Aura	7, 9, 7, 8	31/4	=	7.75
Javier, Saúl, Juan, Carlos	7, 9, 7, 9	32/4	=	8.00
Javier, Saúl, Aura, Carlos	7, 9, 8, 9	33/4	=	8.25
Javier, Saúl, Berta, Juan	7, 8, 8, 7	30/4	=	7.50
Javier, Saúl, Berta, Aura	7, 8, 8, 8	31/4	=	7.75
Javier, Saúl, Berta, Carlos	7, 8, 8, 9	32/4	=	8.00
Javier, Saúl, Juan, Aura	7, 8, 7, 8	30/4	=	7.50
Javier, Saúl, Juan, Carlos	7, 8, 7, 9	31/4	=	7.75
Javier, Saúl, Aura, Carlos	7, 8, 8, 9	32/4	=	8.00
Javier, Berta, Juan, Aura	7, 8, 7, 8	30/4	=	7.50
Javier, Berta, Juan, Carlos	7, 8, 7, 9	31/4	=	7.75
Javier, Berta, Aura, Carlos	7, 8, 8, 9	32/4	=	8.00
Javier, Juan, Aura, Carlos	7, 7, 8, 9	31/4	=	7.75
Saúl, Susana, Berta, Juan	9, 8, 8, 7	32/4	=	8.00
Saúl, Susana, Berta, Aura	9, 8, 8, 8	33/4	=	8.25
Saúl, Susana, Berta, Carlos	9, 8, 8, 9	34/4	=	8.50
Saúl, Susana, Juan, Aura	9, 8, 7, 8	32/4	=	8.00
Saúl, Susana, Juan, Carlos	9, 8, 7, 9	33/4	=	8.25
Saúl, Susana, Aura, Carlos	9, 8, 8, 9	34/4	=	8.50
Saúl, Berta, Juan, Aura	9, 8, 7, 8	32/4	=	8.00
Saúl, Berta, Juan, Carlos	9, 8, 7, 9	33/4	=	8.25
Saúl, Berta, Aura, Carlos	9, 8, 8, 9	34/4	=	8.50
Saúl, Juan, Aura, Carlos	9, 7, 8, 9	33/4	=	8.25
Saúl, Berta, Juan, Aura	8, 8, 7, 8	31/4	=	7.75
Susana, Berta, Juan, Carlos	8, 8, 7, 9	32/4	=	8.00
Susana, Berta, Aura, Carlos	8, 8, 8, 9	33/4	=	8.25
Susana, Juan, Aura, Carlos	8, 7, 8, 9	32/4	=	8.00
Berta, Juan, Aura, Carlos	8, 7, 8, 9	32/4	=	8.00

Las distintas medias muestrales de todas las muestras posibles de cuatro que pueden obtenerse de la población se presentan en la tabla 8-4. Esta distribución probabilística es la **distribución muestral de medias.**

4. Pueden hacerse las siguientes observaciones:
   a. La media de las medias muestrales ($8) es igual a la media poblacional (también $8): $\mu = \mu_{\bar{x}}$. Esto siempre es cierto si todas las muestras posibles de un tamaño dado se seleccionan a partir de la población de interés.
   b. Observe en el diagrama 8-1 que la dispersión en la distribución de las medias muestrales es *menor que* la dispersión de la población. Las medias muestrales varían de $7.50 a $8.50, los valores de la población de $7.00 a $9.00.

TABLA 8-4

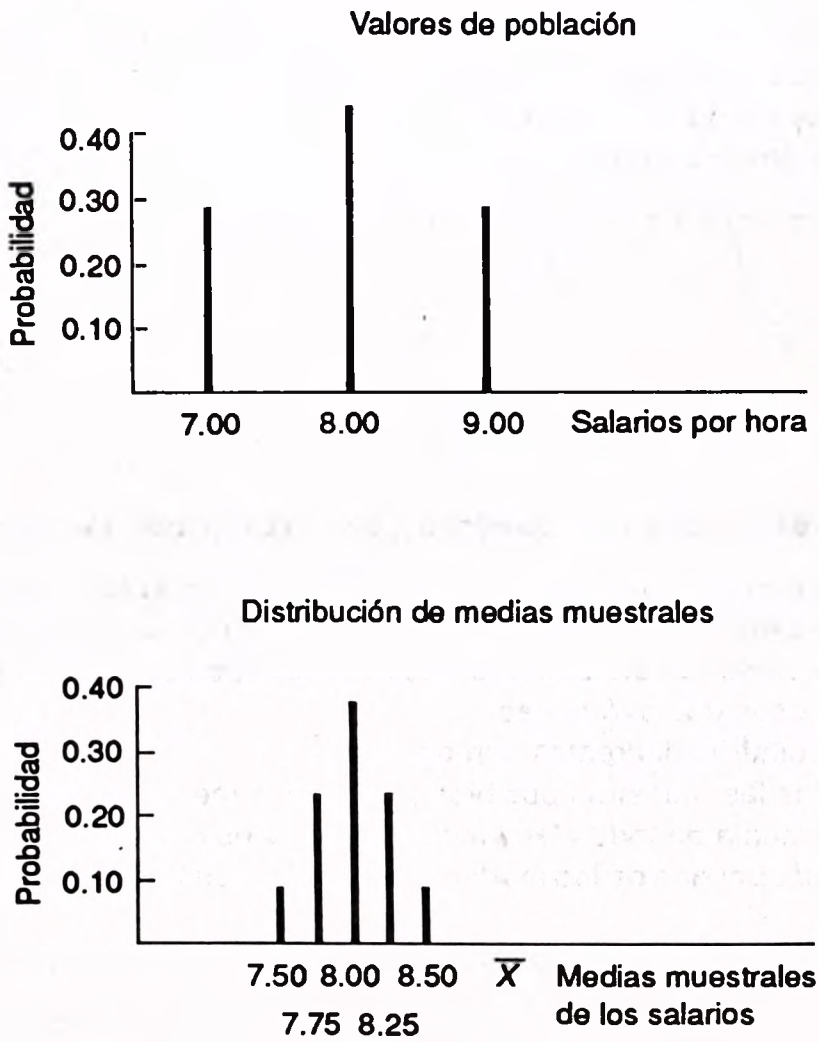
Distribución muestral de medias para $n = 4$

Media muestral	*Número de medias*	*Probabilidad*
$7.50	3	3/35 = 0.0857
7.75	8	8/35 = 0.2286
8.00	13	13/35 = 0.3714
8.25	8	8/35 = 0.2286
8.50	3	3/35 = 0.0857
	35	35/35 1.0000

c. El diagrama que representa la distribución de las medias muestrales tiende a aproximarse a la curva normal (véase el diagrama 8-1).

DIAGRAMA 8-1

Valores de población y medias muestrales



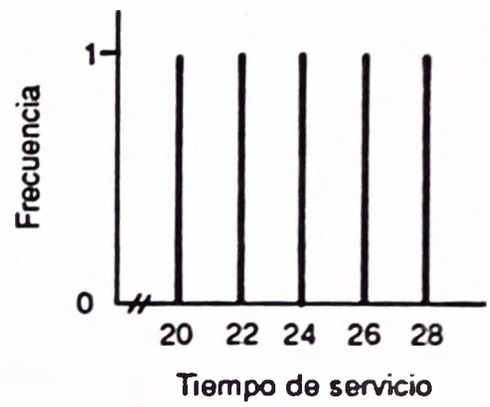
AUTOEXAMEN 8-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

El tiempo de servicio de todos los ejecutivos empleados por la empresa Standard Chemicals es:

Nombre	*Años*
Sr. Snow	20
Sra. Tolson	22
Sr. Kraft	26
Sra. Irwin	24
Sr. Jones	28

1. Utilizando la fórmula de combinaciones, ¿cuántas muestras de tamaño dos son posibles?
2. Seleccione todas las muestras posibles de tamaño dos de la población y calcule sus medias.
3. Organice las medias en una distribución muestral.
4. Compare la media de la población y la media de las medias muestrales.
5. Compare la dispersión en la población con la distribución de medias muestrales.
6. A continuación se presenta una gráfica con los valores de la población. ¿La distribución de los valores de la población sigue una distribución normal o no?



7. ¿La distribución de las medias muestrales empieza a mostrar tendencia a la forma de campana?

EJERCICIOS

Las respuestas de los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

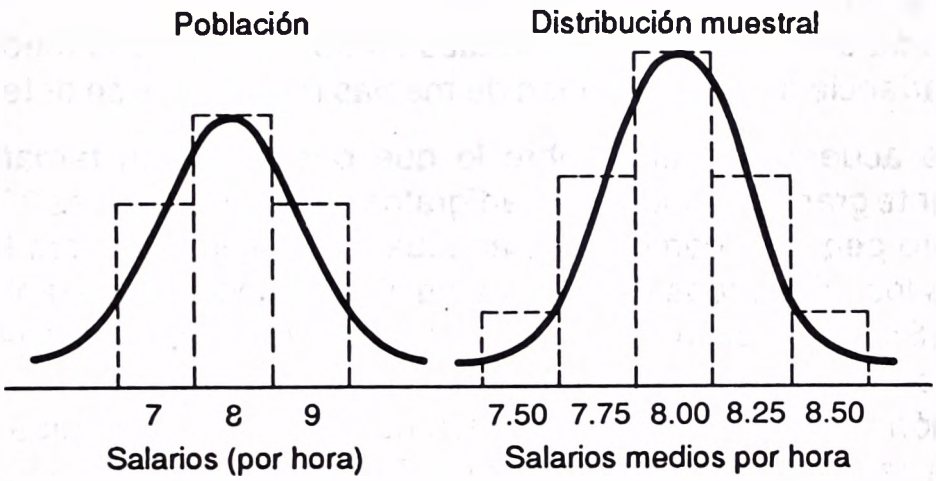
7. En una clase de matemáticas el profesor aplicó cuatro exámenes. Las puntuaciones que recibió una persona fueron 90, 86, 70 y 80. Supóngase que el profesor le ofreció la opción de seleccionar aleatoriamente dos calificaciones para basar su calificación final en la media de esos dos exámenes.
   a. ¿Cuántas muestras diferentes son posibles?
   b. Enuncie todas las muestras posibles y calcule la media de cada una.
   c. Compare la media de todas las medias muestrales con la media de la población.
   d. Compare la dispersión de las medias muestrales con la de la población trazando una gráfica.
   e. ¿Sería capaz de aceptar la calificación que otorga el profesor? Explique su respuesta.
8. Hay cinco representantes de ventas en Mid-Motors Ford. A continuación se enlistan los cinco representantes y el número de automóviles que vendieron la semana pasada.

Representante de ventas	*Automóviles vendidos*
Pete Hankis	8
Connie Stallter	6
Ron Eaton	4
Jean Twenge	10
Andy Treese	6

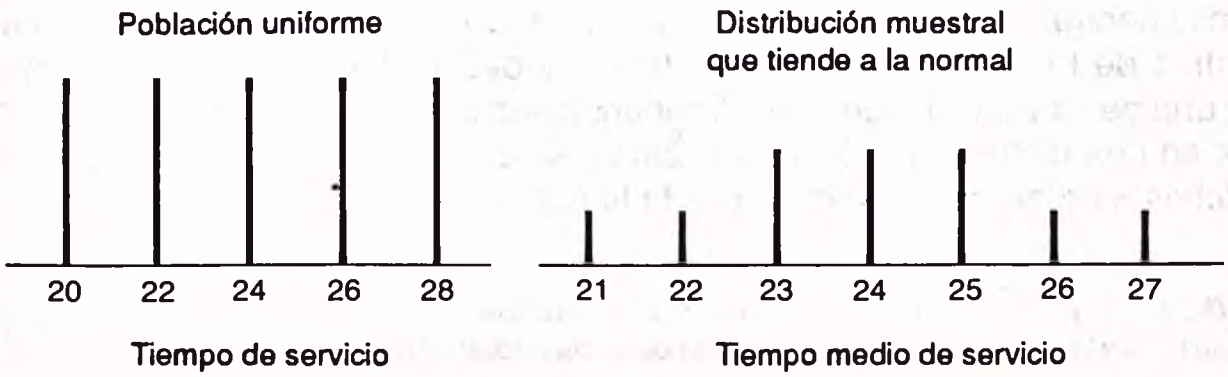
a. ¿Cuántas muestras diferentes de tamaño dos son posibles?
b. Enliste todas las muestras posibles de tamaño dos y calcule la media de cada muestra.
c. Compare la media de las medias muestrales con la de la población.
d. En un diagrama semejante al 8-1 compare la dispersión de las medias muestrales con la de la población.

La población y el tamaño de muestra en ambos ejemplos y en el autoexamen se mantuvieron pequeños, a propósito, para simplificar los cálculos. Sin embargo, en estos ejemplos se destacan dos conceptos importantes:

1. Si la población tiene distribución normal, la distribución muestral de las medias también estará distribuida normalmente. En el ejemplo sobre el salario por hora de los empleados de Tartus se ilustra este concepto. Gráficamente se representa por:



2. Si la población no tiene distribución normal, la distribución muestral de medias de cualquier manera tenderá a aproximarse a la distribución normal. El tiempo de servicio de los ejecutivos de la Standard Chemicals que se presentó en el autoexamen 8-3 ilustra lo anterior.



¿Cuál es la importancia de estos dos conceptos? Son la base de uno de los teoremas más importantes de la Estadística: el **teorema de límite central.***

TEOREMA DE LIMITE CENTRAL

Teorema de límite central En el caso de una población con media μ y variancia σ^2, la distribución muestral de las medias de todas las muestras posibles de tamaño n generadas a partir de la población, tendrá una distribución aproximadamente normal (siendo la media de la distribución muestral igual a μ y la variancia igual a σ^2/n) considerando que el tamaño de la muestra es bastante grande.

Hay que destacar los aspectos importantes del teorema central de límite.

1. Si el tamaño de la muestra n es suficientemente grande, la distribución muestral de las medias será más o menos normal. Esto se cumple ya sea que la población esté o no distribuida normalmente. Esto es, el teorema se verifica, ya sea que la población esté distribuida en forma normal, o bien sea sesgada o uniforme.
2. Como se mostró con anterioridad, la media de la población, μ, y la media de todas las medias muestrales posibles, $\mu_{\bar{x}}$, son iguales. Si la población es grande y se selecciona un número grande de muestras de la población, la media de las medias muestrales se aproximará a la media poblacional.
3. La variancia de la distribución de medias muestrales se determina por σ^2/n.

No existe acuerdo general sobre lo que constituye un tamaño de muestra "suficientemente grande". Algunos estadígrafos consideran que es 30; otros piensan que un número pequeño como 12 es adecuado. El ejemplo sobre los salarios por hora de todos los empleados de la industria Tartus funcionó bastante bien con una muestra de 4. Sin embargo, a menos que la población sea aproximadamente normal, los tamaños de muestra así de pequeños, por lo general no dan como resultado una distribución muestral que se distribuya normalmente. A medida que el tamaño de la muestra se vuelve cada vez más grande, la distribución de la media muestral se aproxima más a la distribución normal con forma de campana.

Simulación por computadora

Puede emplearse una simulación por computadora para demostrar el teorema de límite central. Una población consta de números del 1 al 50. Se seleccionan 100 muestras de tamaño 15 de esta población y después se calculan las medias de cada una de estas 100 muestras. A continuación se organizan estas medias muestrales en una distribución de frecuencias y se compara la forma de la distribución de dichas medias muestrales con la de la población.

***(N. del R.)** Se le llama también "teorema central de límite". Ambas denominaciones resultan impropias. Podría denominarse mejor *teorema de la distribución normal de medias.*

Esta sería una tarea difícil sin la ayuda de una computadora. En el primer paso se seleccionaría, a partir de la población, una muestra aleatoria de 15 números, sin reposición. (Se podría realizar el muestreo con o sin reposición. Se ha elegido una muestra sin reposición. Esto significa que el número 19 puede aparecer sólo una vez en una muestra específica.) Se calcula la media de esta muestra y después se devuelven los elementos a la población. Podría repetirse este proceso 99 veces más. Con el sistema MINITAB se realiza esta tarea.

La media de la población es 25.5, que se obtiene mediante:

$$\mu = \frac{1 + 2 + \cdots + 49 + 50}{50} = 25.5$$

A continuación se presentan los resultados de la selección de 100 muestras de tamaño 15, calculando la media de cada muestra y organizando estas 100 medias en una distribución de frecuencias. (Se empleó el comando HISTOGRAM en MINITAB, de manera que la distribución se asemeje a un histograma horizontal.)

```
MTB>  store in 'random' the following
STOR>     random k10 obs in c20 ;
STOR>     integer 1 to 50 .
STOR>     let c30(k20)=mean(c20)
STOR>     let k20=k20+1
STOR>     print k20
STOR>     end
MTB>   let k10=15
MTB>   let k20=1
MTB>   noecho
MTB>   execute 'random' 100 times
MTB>   name c30 'means'
MTB>   histogram c30

Histogram of means N = 100

 Midpoint    Count
       18        1  *
       20        6  ******
       22       16  ****************
       24       19  *******************
       26       22  **********************
       28       17  *****************
       30       16  ****************
       32        2  **
       34        0
       36        1  *
```

Obsérvese con este resultado el cambio notable en la forma de la distribución. La población de los números 1 a 50 tenía forma uniforme o aplanada. Es evidente que las medias muestrales tienden a la curva normal. Este es el cambio de forma que se señaló en el teorema de límite central.

¿Qué puede decirse de la comparación de la media poblacional con la media de la distribución muestral? Las medias muestrales en el análisis anterior se almacenaron en la columna C30. A continuación se presenta una lista de las 100 medias muestrales.

```
MTB> print c30

C30
26.6667   22.1333   35.6667   21.2667   25.2667   25.0000   27.1333
27.7333   30.0000   24.2000   29.3333   27.8000   27.1333   29.7333
20.0667   25.9333   27.9333   22.9333   22.3333   29.7333   24.8667
27.4000   25.0667   30.6000   23.8667   20.9333   27.5333   23.2000
27.4000   23.5333   24.2667   28.0000   26.3333   23.8667   25.3333
21.2667   23.8000   23.4000   25.5333   27.4000   29.6667   21.9333
19.0000   28.3333   25.0667   24.2000   23.7333   24.5333   22.7333
30.2000   19.0000   24.6000   29.2667   18.0000   25.4000   23.8000
21.7333   27.2667   27.8667   21.6667   28.2667   25.4000   29.5333
21.4000   21.0000   29.2667   25.2667   19.9333   21.4667   30.3333
22.6667   25.8000   25.0000   31.8000   25.6000   30.3333   24.6667
26.8000   24.6000   29.8000   30.7333   25.0667   25.5333   29.6000
27.7333   21.6667   26.9333   28.4667   22.4000   29.4000   23.3333
20.4667   25.0000   24.8000   23.4000   32.0000   22.7333   27.0667
25.2000   25.1333
```

También se presentan la media de estas medias muestrales, la mediana, y otras medidas como el primer cuartil (Q_1):

```
MTB> describe c30
                N     MEAN   MEDIAN  TRMEAN    STDEV  SEMEAN
   means      100   25.552   25.233   25.538    3.305   0.331

               MIN      MAX       Q1       Q3
   means    18.000   35.667   23.350   27.850
```

Obsérvese que la media de la población y la media de las medias muestrales se aproximan (25.500 comparado con 25.552) pero no son exactamente iguales. ¿Por qué? La razón es que aunque se tomó un número bastante grande de muestras —100 para ser exactos— esto de ninguna manera engloba todas las muestras posibles. Así, sería de esperar que las medias se aproximaran, sin llegar a ser exactamente iguales. Hay dos observaciones sumamente importantes que resultan evidentes en la simulación por computadora:

1. La forma de la distribución muestral de las medias se aproxima a la normal, a pesar de la forma de la población.
2. La media de las medias muestrales se aproxima a la media de la población.

El teorema de límite central constituye el fundamento teórico para la inferencia estadística. Este concepto se refiere a la *estimación* (que se presentó en este capítulo) y las *pruebas de hipótesis* (que se analizarán en el capítulo 9).

Los administradores de empresas, instituciones educativas, trabajo social y otros campos toman decisiones sin contar con información completa. Los fabricantes de automóviles no saben *exactamente* cuántas personas comprarán autos nuevos el año siguiente. El encargado de inscripciones de una universidad desconoce *exactamente* cuántos estudiantes se inscribirán el próximo ciclo escolar. La administradora de ventas de una fábrica de automóviles, por ejemplo, debe *estimar* las ventas que se esperan de un nuevo auto compacto. Podría estimar que las ventas serán de 325 000 unidades, pero es considerable la incertidumbre sobre la reacción de los consumidores al nuevo estilo del GT, el ambiente económico en Estados Unidos y países extranjeros, y sobre lo que presentarán los competidores. Existen dos clases de *estimaciones:* las *estimaciones puntuales* y las *estimaciones de intervalo.*

ESTIMACIONES PUNTUALES Y DE INTERVALO

Estimación puntual

Los vigilantes de caza y pesca calculan el peso promedio y otras características de la población de peces o presas de caza empleando revisiones con nasas u otros dispositivos. Con base en estos datos muestrales, un guarda puede estimar que el peso medio del salmón Coho que se pesca en el Lago Michigan es de $2^1/_2$ libras. Una muestra de cinco "expertos" en finanzas puede dar como resultado una estimación de 11.9% de rendimiento para certificados de depósito a fines de año. Estos números únicos ($2^1/_2$ libras y 11.9%) son estimaciones de un parámetro poblacional desconocido y se denominan **estimaciones puntuales.**

Estimación puntual Un número (denominado *punto*) que se emplea para estimar un parámetro poblacional.

La media muestral $\overline{X}$ es el mejor estimador de la media poblacional, μ. Recuérdese, a partir del capítulo 3, que la media muestral se calcula mediante:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n}$$

en donde X es el valor de una observación y n es el número total de observaciones.

* Ejemplo

Se realizará un estudio sobre la potencia de arranque en frío de baterías o acumuladores de 12 V (Longlast) para estimar el número de veces que un motor con desplazamiento de 440 plg^3 arrancará antes de que falle la batería. Una muestra de 40 dispositivos seleccionados aleatoriamente dio los siguientes números de arranques:

26	27	26	20	21	42	30	22
22	21	26	9	21	22	28	26
19	16	20	32	18	23	32	28
21	41	19	31	21	22	16	23
30	21	37	28	39	30	21	23

¿Cuál es la mejor estimación del número de la media poblacional de arranques?

✔ Solución

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{1000}{40} = 25 \text{ arranques}$$

La variancia muestral, s^2, y la desviación estándar de la muestra, s, se utilizan para estimar la variancia de la población, σ^2, y la desviación estándar de la población, σ. Recuérdese del capítulo 4 que la variancia muestral y la desviación estándar de la muestra se calculan mediante:

Variancia de la muestra:

$$s^2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}$$

o bien

$$s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}$$

Desviación estándar de la muestra:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}}$$

o bien

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}}$$

en donde X representa el valor de un elemento seleccionado para la muestra, $\overline{X}$ es la media de la muestra, y n es el número en la muestra.

De igual manera, la proporción de la población que está a favor de medidas más estrictas para la protección ambiental puede estimarse utilizando una proporción muestral. Si p es la proporción poblacional desconocida y $\overline{p}$ es la proporción muestral, la estimación puntual para la proporción de población es:

$$\overline{p} = \frac{\text{Número de éxitos en la muestra}}{\text{Número muestreado}}$$

$$= \frac{X}{n}$$

en donde X representa el número de éxitos en la muestra y n es el tamaño de la muestra.

✱ Ejemplo

De 2 000 personas muestreadas, 1 600 están a favor de medidas más estrictas de protección ambiental. ¿Cuál es la proporción poblacional estimada?

✔ Solución

$$\bar{p} = \frac{\text{Número de éxitos en la muestra}}{\text{Número muestreado}}$$

$$= \frac{1\,600}{2\,000} = 0.80$$

Ochenta por ciento de la población está a favor de medidas más estrictas.

En resumen, con base en la distribución muestral de medias y el teorema de límite central, la media muestral puede utilizarse como un buen estimador de la media poblacional. Por supuesto, se supone que el tamaño de la población es lo suficientemente grande. Puede decirse lo mismo acerca de una proporción poblacional (que es un caso especial de media muestral), la variancia poblacional, la desviación estándar de la población y otros parámetros de la población. Cada uno de estos estimadores es una estimación de punto.

Estimación de intervalo

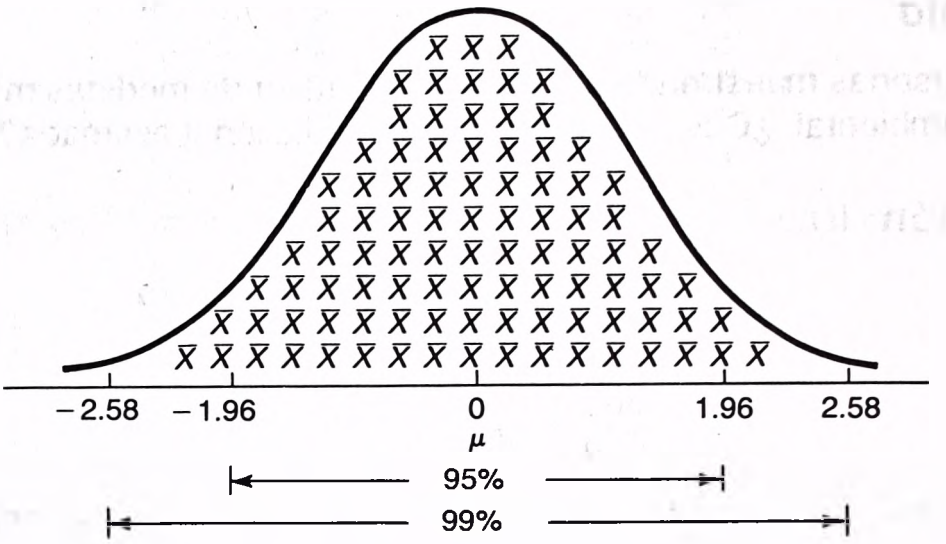
Ahora se analizará otro tipo de estimación, la estimación de intervalo.

Estimación de intervalo Expresa la amplitud dentro de la cual probablemente se encuentra un parámetro poblacional.

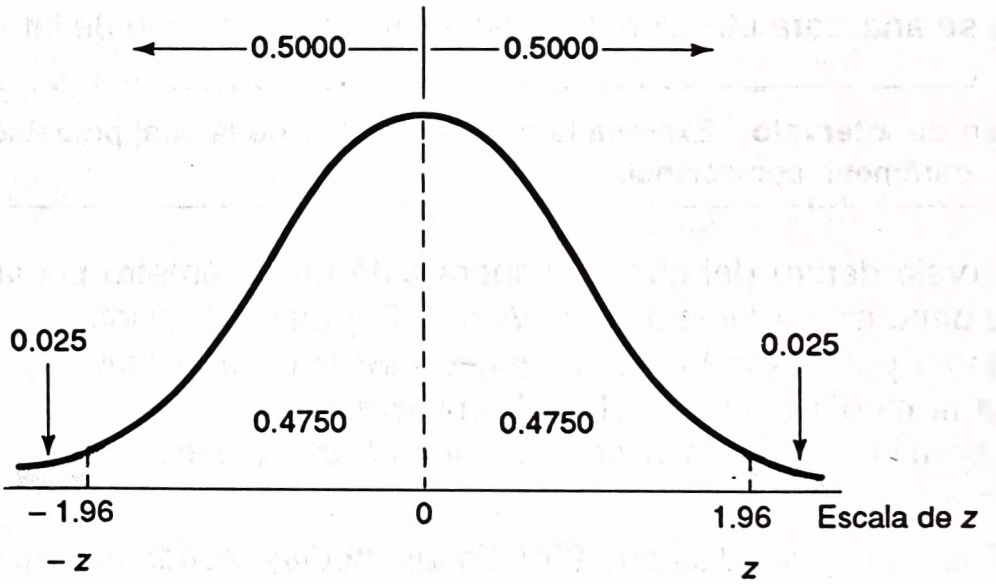
El intervalo dentro del que se espera esté un parámetro poblacional, por lo general se denomina *intervalo de confianza*. Por ejemplo, el intervalo de confianza para la media poblacional es el intervalo que tiene una mayor probabilidad de contener a la media poblacional, μ. Se utilizan con frecuencia dos intervalos de confianza para la media poblacional: el *intervalo de confianza de 95%* y el *intervalo de confianza de 99%*.

1. Este intervalo indica que 95% de las medias muestrales de un tamaño de muestra específico seleccionadas de una población se hallará dentro de más o menos 1.96 desviaciones estándares de la media poblacional hipotética. (*95%* se refiere a 95% de los valores centrales.)
2. El intervalo de confianza de 99% se establece abarcando más o menos 2.58 desviaciones estándares a partir de la media poblacional hipotética. Esto se muestra a continuación en el diagrama de la página siguiente.

¿De dónde provienen los valores 1.96 y 2.58? El 95% central de las medias muestrales se encuentra a cualquiera de los lados de la media y, lógicamente,

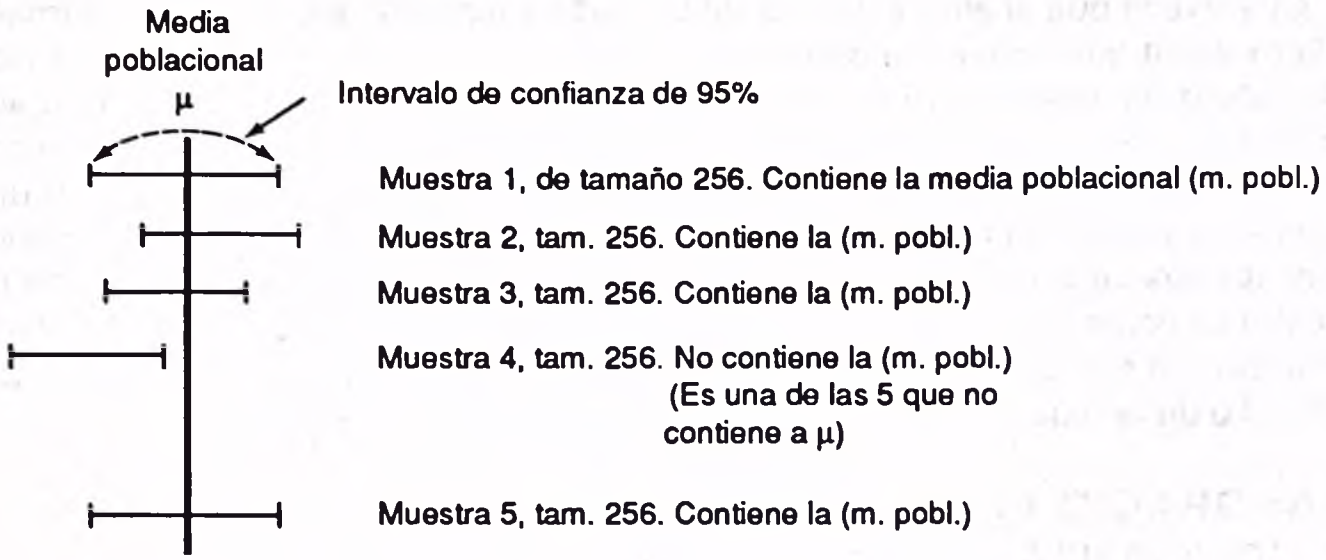


0.95/2 = 0.4750, o sea 47.5%. Entonces, el área a la derecha de la media es 0.4750, y el área a la izquierda de la media también es 0.4750. Debido a que estas áreas se refieren a la curva normal, puede usarse el apéndice D para determinar el número de desviaciones estándares (valores *z*) de la media para 0.4750. Primero se encuentra 0.4750 en el cuerpo del apéndice D. A continuación hay que ir al margen izquierdo y a la columna correspondiente para hallar *z*, que es 1.96. El valor *z* a la derecha de la media se denota como +1.96 y el situado a la izquierda es −1.96. Lo anterior se muestra en el siguiente diagrama:



Se utiliza el mismo procedimiento para determinar 2.58.

Para ampliar el concepto de intervalo de confianza, suponga que hay tiempo para seleccionar 100 muestras de tamaño 256 de una población, y calcular las medias muestrales y los intervalos de confianza para cada muestra. Se descubriría que 95 de los 100 intervalos de confianza contienen la media poblacional, y aproximadamente 5 de los intervalos no la contienen. Esto se representa en el esquema de la siguiente página :



¿Cómo se elabora un intervalo de confianza? Primero es necesario calcular el *error estándar de la media.*

ERROR ESTANDAR DE LA MEDIA

Error estándar de la media. Desviación estándar de la distribución muestral de las medias muestrales.

El error estándar de la media se calcula mediante:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

en donde:

$\sigma_{\bar{x}}$ es el error estándar de la media.
s es la desviación estándar de la población.
n es el tamaño de la muestra.

En la fórmula del error estándar de la media se supone conocida la desviación estándar de la población, σ. Si no se conoce, y $n = 30$ o mayor (se considera una muestra grande), la desviación estándar de la media, denotada por s, sirve para aproximar la desviación estándar de la población, σ. Entonces la fórmula para el error estándar queda ($s_{\bar{x}}$ se sustituye por $\sigma_{\bar{x}}$ para indicar que el error estándar se basa en estadísticas muestrales):

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Obsérvese que el error estándar de la media variará de acuerdo con el tamaño de la muestra que está en el denominador. A medida que aumenta cada vez más el tamaño de la muestra, *n*, la variabilidad de las medias muestrales se vuelve cada vez más pequeña. Lógicamente, una estimación de la media poblacional basada en una muestra grande es más confiable que una estimación realizada con una muestra pequeña. En otras palabras, el error en la estimación de la media poblacional disminuye a medida que aumenta el tamaño de muestra. Si el tamaño de muestra se volviera cada vez más grande y, por último, fuera igual al tamaño de la población, no habría error en la predicción de la media poblacional ¡debido a que el tamaño de la muestra y el tamaño de la población serían iguales!

ELABORACION DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA DE 95% Y DE 99%

Estos intervalos de confianza se establecen como sigue cuando $n \geq 30$.

Intervalo de confianza de 95% $\bar{X} \pm 1.96 \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

Intervalo de confianza del 99% $\bar{X} \pm 2.58 \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

✱ Ejemplo

En un experimento se trata de seleccionar una muestra aleatoria de 256 administradores o gerentes para el estudio. Un elemento de interés es su ingreso anual. La media muestral que se calcula es $35 420 (dólares) y la desviación estándar de la muestra es $2 050.

1. ¿Cuál es el ingreso medio estimado de todos los funcionarios (la población)? Es decir, ¿cuál es la estimación por punto?
2. ¿Cuál es el intervalo de confianza de 95% (redondeado a los $10 más cercanos)?
3. ¿Cuáles son los límites del intervalo de confianza de 95%?
4. ¿Qué grado de confianza se está usando?
5. Interprete los resultados.

✔ Solución

1. La media muestral vale $35 420.
2. El intervalo de confianza está entre $35 170 y $35 670, que se obtiene mediante:

$$\bar{X} \pm 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} = \$35\,420 \pm 1.96 \frac{\$2{,}050}{\sqrt{256}}$$

$$= \$35\,420 \pm 1.96 \frac{\$2\,050}{16}$$

= \$35 168.875 y \$35 671.125
= \$35 170 y \$35 670

3. Los puntos extremos del intervalo de confianza se denominan *límites de confianza*. En este ejemplo, tales límites son \$35 170 y \$35 670.
4. La medida de confianza que se obtiene se denomina *grado de confianza*. En este caso es 0.95.
5. Interpretación: si hubiera tiempo para seleccionar 100 muestras de tamaño 256 de la población de administradores y calcular las medias muestrales y los intervalos de confianza, la media poblacional del ingreso anual se encontraría aproximadamente en 95 de los 100 intervalos de confianza. Un intervalo puede o no contener a la media poblacional. Aproximadamente 5 de los 100 intervalos de confianza *no* contienen a la media poblacional de ingreso anual, μ.

AUTOEXAMEN 8-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un departamento de fauna silvestre ha proporcionado un alimento especial a las crías de trucha arco iris de un estanque. Una muestra de los pesos de 40 peces reveló que el peso medio es de 402.7 gramos, y la desviación estándar, de 8.8 gramos.

1. ¿Cuál es el peso medio estimado de la población? ¿Cómo se denomina la estimación?
2. ¿Cuál es el intervalo de confianza de 99%?
3. ¿Cuáles son los límites de confianza de 99%?
4. ¿Qué grado de confianza se usa?
5. Interprete los resultados.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Supóngase que una empresa de investigación realizó un reconocimiento para determinar la cantidad promedio (media) de dinero que gastan fumadores consuetudinarios en cigarrillos durante una semana. Una muestra de 49 fumadores reveló que $\overline{X}$ = \$20 y s = \$5 (dólares).
   a. ¿Cuál es la estimación por puntos? Explique lo que eso indica.
   b. Utilice el intervalo de confianza de 95% y determine el intervalo de confianza para μ.

10. Véase el ejercicio 9. Suponga que se han incluido en la encuesta 64 fumadores (en vez de 49) y que la media muestral y la desviación estándar de la muestra mantienen los mismos valores (\$20 y \$5, respectivamente).
    a. ¿Cuál es la estimación del intervalo de confianza de 95% de μ?
    b. Explique por qué el intervalo de confianza es más angosto o estrecho que el que se determinó en el ejercicio 9.

11. El propietario de una gasolinería desearía estimar el número medio de galones de combustible que vende a sus clientes. De sus registros selecciona una muestra de 60 ventas y concluye que el número medio de galones vendidos es 8.60, y la desviación estándar, 2.30 galones.
    a. ¿Cuál es la estimación de la media poblacional?
    b. Establezca un intervalo de confianza de 99% para la media poblacional.
    c. Interprete el significado de la parte b.

12. Un profesor de inglés contó el número de palabras con errores ortográficos en un ensayo que recientemente asignó a sus alumnos. Para el grupo de 40 estudiantes, el número medio de palabras mal escritas fue de 6.05, y la desviación estándar, de 2.44. Establezca un intervalo de confianza de 95% para el número medio de palabras con errores ortográficos en la población de estudiantes.

INTERVALO DE CONFIANZA PARA UNA PROPORCION DE LA POBLACION

La teoría y el procedimiento para determinar un estimador por puntos y un estimador de intervalo para una *proporción de la población* se asemeja bastante a los que se describieron en la sección anterior. Por tanto, será breve el siguiente análisis sobre las estimaciones puntuales y las de intervalo.

Como se observó con anterioridad, una estimación puntual para una proporción de la población se obtiene dividiendo el número de éxitos en la muestra entre el número total muestreado. Supóngase que 100 de las 400 personas muestreadas afirmaron que prefieren un nuevo refresco que probaron, en comparación con el que consumen regularmente. La mejor estimación de la proporción de la población que está a favor de la nueva bebida es 0.25, o 25%, que se obtiene dividiendo 100/400. Obsérvese que una proporción se basa en un *conteo* del número de éxitos en relación con el número total muestreado.

¿Cómo se estima el *intervalo de confianza* para una proporción de la población?

$$\bar{p} \pm z\sigma_{\bar{p}}$$

en donde $\sigma_{\bar{p}}$ es el error estándar de la proporción:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

Por tanto, el intervalo de confianza se establece mediante:

$$\boxed{\bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}}$$

donde

$\bar{p}$ es la proporción muestral.
z es el desvío normal (valor z) del grado de confianza seleccionado.
n es el tamaño de muestra.

✱ Ejemplo

Supóngase que 1 600 de 2 000 electores empadronados que se muestrean dijeron que planean votar por el candidato demócrata para gobernador. Si se utiliza un grado de confianza de 0.95, ¿cuál es la estimación de intervalo para la proporción de la población?

✔ Solución

$$\bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.80 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.80(1-0.80)}{2\,000}}$$
$$= 0.80 \pm 1.96\sqrt{0.00008}$$
$$= 0.78247 \text{ y } 0.81753$$

La interpretación es que aproximadamente 95 de 100 intervalos establecidos en forma semejante incluirían el parámetro de la población.

AUTOEXAMEN 8-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Se realizó una investigación de mercadotecnia para estimar la proporción de aseadores de casas que pueden reconocer la marca de un producto de limpieza con base en la forma y color del recipiente. De los 1 400 empleados, 420 fueron capaces de identificar la marca del producto.

1. Si se utiliza el grado de confianza de 0.99, ¿en qué intervalo se encuentra la proporción de la población?
2. ¿Cuáles son los límites de confianza?
3. Interprete sus resultados.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. En el ejercicio 11, el propietario de la gasolinería determinó el número medio de galones que adquirieron sus clientes. También estaba interesado en la proporción de mujeres que cargan gasolina por autoservicio. Después de que el propietario realizara una encuesta o estudio con 100 mujeres pudo determinar que 80 de las clientas se sirven ellas mismas.
    a. ¿Cuál es la proporción estimada de mujeres en la población que cargan gasolina mediante autoservicio?

b. Elabore un intervalo de confianza del 95% para la proporción de mujeres que utilizan el autoservicio. Interprételo.

14. María Wilson considera su candidatura a alcaldesa de la ciudad de Bono, Ohio. Antes de presentar su candidatura, decide realizar un sondeo de electores en Bono. Una muestra de 400 reveló que 300 la apoyarían en las próximas elecciones.
    a. ¿Qué proporción de los votantes en Bono calcula que apoyarían a la candidata Wilson?
    b. Especifique un intervalo de confianza del 99% para la proporción de votantes en la población que apoyarían a María.
    c. En la parte b, observe que ambos puntos extremos del intervalo de confianza son mayores que 0.50. ¿Qué importancia le daría a esto la candidata?

15. Suponga que una cadena de televisión planea sustituir uno de sus programas que se transmite en el horario con mayor número de telespectadores con una nueva comedia dirigida al público familiar. Antes de que se tome una decisión en definitiva, se toma una muestra aleatoria de 400 personas que acostumbran presenciar programas en el horario citado. Después de ver una representación de la comedia, 250 de las personas indicaron que sí la verían.
    a. ¿Cuál es su estimación de la proporción de telespectadores en la población que verá el nuevo programa?
    b. Defina un intervalo de confianza de 95% para la proporción de público que verá el nuevo programa. Explique su respuesta.

16. Un impresor de serigrafías compra vasos de plástico para imprimir logotipos de encuentros deportivos y de otras ocasiones especiales. El impresor recibe una remesa grande esta mañana y quiere estimar el porcentaje de artículos defectuosos. Una muestra de 30 vasos de 200 resultó ser defectuosa.
    a. ¿Qué proporción del envío se estima que esté defectuosa?
    b. Establezca un intervalo de confianza del 95% de la proporción de vasos defectuosos. Explique el resultado.

FACTOR DE CORRECCION PARA POBLACION FINITA

Las poblaciones que se han muestreado hasta ahora han sido muy grandes o se supone que son *infinitas*. ¿Qué sucede si la población muestreada no es infinita, ni siquiera es muy grande? En estos casos se necesita hacer algunos ajustes en el error estándar de la media y en el error estándar de la proporción.

Una población que tiene un límite superior fijo se considera *finita*. Por ejemplo, hay 21 376 estudiantes inscritos en la Universidad de Toledo y la Chrysler-Jeep Corp. manufacturó 917 automóviles en la planta de Toledo el año pasado. Una población finita puede ser bastante pequeña; podría constar de todos los alumnos inscritos para este ciclo escolar. Una población también puede ser muy grande, por ejemplo todos los ancianos que viven en el estado de Florida. Obsérvese que en el último ejemplo el número de personas es grande. En realidad se desconoce el conteo exacto, aunque es el número que en teoría podría determinarse mediante un censo estatal.

Para una población finita, donde el número total de objetos es N y el tamaño de la muestra es n, se hacen los siguientes ajustes a los errores estándares de la media y de la proporción:

Error estándar de la media:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Error estándar de la proporción:

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

Estos ajustes se denominan **factor de corrección por población finita.** ¿Por qué es necesario y cuál es su efecto? Lógicamente si la muestra es un porcentaje considerable de la población, entonces se esperaría que cualesquiera estimaciones fueran más precisas que para muestras más pequeñas. Obsérvese el efecto del término $(N - n)/(N - 1)$. Supóngase que la población es 1 000 y la muestra es 100. Entonces esta proporción es (1 000 − 100)/(1 000 − 1), o sea 900/999. Con la raíz cuadrada se obtiene el factor de corrección, 0.9492. Multiplicando el error estándar se reduce el error aproximadamente en 5%. Esto es, $1 - 0.9492 \cong 0.05$. Esta reducción en el tamaño del error estándar resulta en una amplitud menor de valores en la estimación de la media poblacional. Si la muestra es 200, el factor de corrección es 0.8949, lo que significa que el error estándar se reduce en más de 10%. En la tabla 8-5 se muestran los efectos de diferentes tamaños de muestra. Obsérvese que cuando la muestra es aproximadamente menor que 5% de la población, el impacto del factor de corrección es bastante pequeño. La regla general es que si la proporción n/N es de menos de 0.05, se omite el factor de corrección por población finita.

TABLA 8-5

Cálculo del factor de corrección por población finita para diversos tamaños de muestra, cuando la población es de 1 000

Tamaño de muestra	*Fracción de la población*	*Factor de corrección*
10	0.010	0.9955
25	0.025	0.9879
50	0.050	0.9752
100	0.100	0.9492
200	0.200	0.8949
500	0.500	0.7075

* Ejemplo

Hay 250 familias en un pequeño poblado. Una encuesta con 40 familias reveló que la contribución media anual a la iglesia es de $450 (dólares) con una desviación estándar de $75. Establezca un intervalo de confianza de 95% para la contribución media anual.

✔ Solución

Primero obsérvese que la población es finita. Esto es, hay un límite al número de personas. Segundo, nótese que la muestra constituye más del 5% de la población; por tanto, se aplica el factor de corrección por población finita. El intervalo de confianza de 95% se establece de la siguiente manera:

$$\bar{X} \pm z\frac{s}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = \$450 \pm 1.96\frac{\$75}{\sqrt{40}}\left(\sqrt{\frac{250-40}{250-1}}\right)$$

$$= \$450 \pm \$23.24(\sqrt{0.8433})$$

$$= \$450 \pm \$21.34$$

$$= \$428.66 \text{ y } \$471.34$$

AUTOEXAMEN 8-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

El mismo estudio sobre las contribuciones a la iglesia en el poblado reveló que 15 de las 40 familias muestreadas asisten a la iglesia con regularidad. Establezca el intervalo de confianza de 95% para la proporción de familias que asisten a la iglesia regularmente. ¿Debería aplicarse el factor de corrección por población finita? ¿Por qué sí o por qué no?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

17. Asistieron 400 espectadores a un partido de beisbol. Una muestra aleatoria de 50 espectadores reveló que el número medio de bebidas gaseosas que consumieron fue de 3.24, con una desviación estándar de 0.50. Establezca un intervalo de confianza de 99% para el número de bebidas gaseosas que se consumieron.
18. Hay 300 enfermeras empleadas en un hospital. Una muestra de 30 reveló que 18 se graduaron en una escuela especial. Establezca un intervalo de confianza de 95% para la proporción de enfermeras graduadas en dicha escuela.

SELECCION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

Siempre se especificaron los tamaños de muestra en los problemas anteriores. Ahora se determinará un tamaño adecuado de muestra. Debe tenerse cuidado de no seleccionar una muestra demasiado grande o demasiado pequeña. Por ejemplo, si se selecciona arbitrariamente una muestra de 400 elementos y si este tamaño de muestra es demasiado grande, se derrocharán inútilmente tiempo y dinero. Si 400 no fuera una muestra suficientemente grande, las conclusiones a las que se llegara acerca de la población podrían ser incorrectas. Empleando un ejemplo

extremo, supóngase que se seleccionaron dos personas de una población electoral y se les preguntó su preferencia para una candidatura presidencial. Si las dos personas seleccionadas fueran miembros de un partido comunista, se concluiría erróneamente que el próximo presidente a elegir sería comunista.

Hay varios errores comunes acerca del tamaño adecuado de una muestra. Es falso que una muestra que conste del 5% (o un porcentaje constante semejante) sea adecuada para todo problema. Sin embargo, una muestra de 3 de una población de 60 podría ser demasiado pequeña, y un tamaño de muestra de 50 000 de una población de 1 millón demasiado grande. Otro error es que, por ejemplo, una muestra más grande de consumidores o electores debe seleccionarse para un estado con alta densidad poblacional, como California, que para un estado menor, como New Hampshire.

Hay tres factores que determinan el tamaño de la muestra, *ninguno de los cuales tiene relación directa con el tamaño de la población.* Estos son:

1. *El grado de confianza seleccionado.* Por lo general es de 0.95 o 0.99, pero puede ser cualquier nivel. El investigador especifica el grado de confianza.
2. *El máximo error permisible.* Debe decidirlo el investigador también. Es el máximo error tolerable en un nivel de confianza específico.
3. *La variación de la población.* La variación o variabilidad de la población la mide la desviación estándar. (Por supuesto, una población con poca variación requiere muestras más pequeñas.)

A continuación se examina el papel que desempeña cada uno de estos factores en la determinación del tamaño de la muestra.

Grado de confianza

Recuérdese que el objetivo de tomar una muestra es estimar un parámetro poblacional. Supóngase que el parámetro que se estimará es la media aritmética, y el grado de confianza que se selecciona es 0.90. Con base en una muestra, se estimó que la media poblacional se encuentra en el intervalo entre $89 050 y $91 050. Lógicamente si se incrementara el grado de confianza de 0.95 a 0.99, el tamaño de la muestra debería aumentar (suponiendo que el intervalo permaneciera igual). Llevando esto al extremo, si se deseara estar 100% seguro de que la media verdadera se encuentra en el intervalo entre $89 050 y $91 050, tendría que incluir a la población completa, esto es, tomar una muestra de 100%. Así, uno de los factores relacionados con el tamaño de muestra es el *grado de confianza.* Cuanto más alto sea el grado de confianza, tanto mayor será la muestra necesaria para tener cierta precisión.

Error máximo permisible

Como ejemplo, supóngase que un urbanista considera la construcción de un gran centro comercial cerca de varias subregiones o distritos urbanos. Una esta-

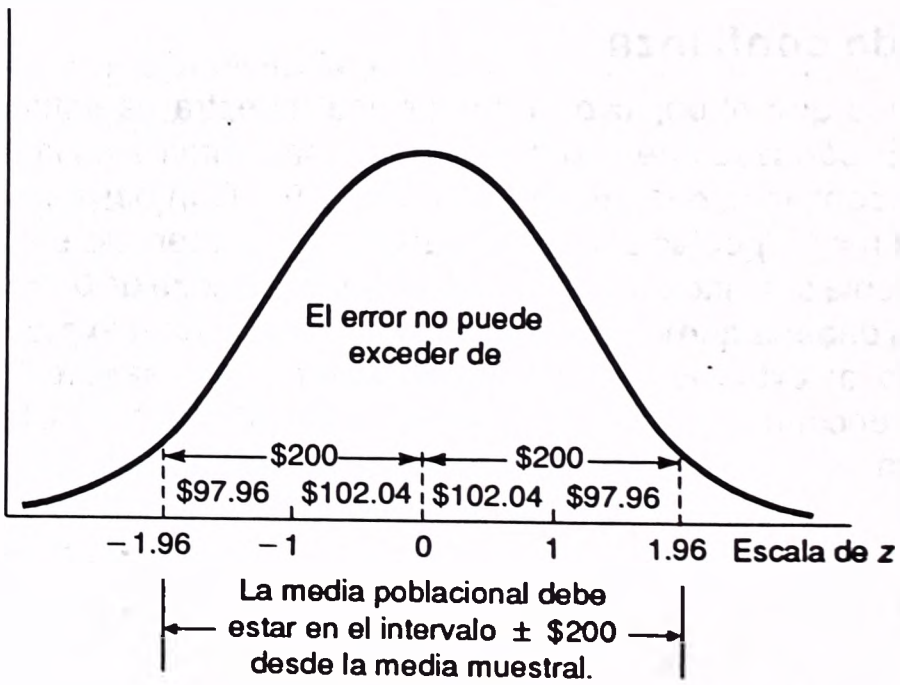
dística importante necesaria es el ingreso promedio en el área. Una encuesta superficial por las subregiones indicó que el ingreso familiar varía de uno probable bajo de $9 000 a uno alto de aproximadamente $29 000 (dólares). Suponiendo que estas estimaciones son razonables, ¿sería posible que el urbanista estuviera satisfecho con esta afirmación que resulta de una muestra de residentes en el área: "La media poblacional está entre $13 000 y $25 000? ¡Muy probablemente no! Límites de confianza tan amplios indican poco o nada sobre la media poblacional. En vez de esto, el urbanista señaló que: "Si se usa la probabilidad de 0.95, el error total en la predicción de la media poblacional no debe exceder de $200". El urbanista fundamentalmente está diciendo que: "Con base en una muestra de tamaño *n*, si se calcula que la estimación de la media poblacional es $25 000, entonces me asegurará que la media poblacional está en el intervalo entre $24 800 y $25 200, que se obtiene mediante $25 000 + $200 y $25 000 − $200".

Para el coeficiente de confianza de 0.95 que seleccionó el urbanista, el error máximo de ± $200 en términos de *z* es 1.96. Para determinar el valor de *un* error estándar de la media, $\sigma_{\bar{x}}$, simplemente se divide el error total de $200 entre 1.96. El resultado es $102.04.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\$200}{1.96}$$

$$= \$102.04$$

Gráficamente se representa por:



El tamaño de la muestra se calcula despejando el valor de *n* en la fórmula: (Obsérvese que como se utiliza una muestra, se sustituye $s_{\bar{x}}$ por $\sigma_{\bar{x}}$ y *s* por σ.)

$$\boxed{s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

en donde:

$s_{\bar{x}}$ es el error estándar de la media.
s es la desviación estándar muestral.
n es el tamaño de la muestra.

Hasta ahora:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\text{Error total permisible}}{z \text{ desviaciones estándares}} = \frac{\text{Desviación estándar de la muestra}}{\sqrt{\text{Tamaño de la muestra}}}$$

Si E representa el error total permisible:

$$\frac{E}{z} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\$200}{1.96} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\$102.04 = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Variación en la población

Aún quedan dos parámetros desconocidos s y n. Para tener el tamaño de la muestra, se necesita estimar la variación en la población. La desviación estándar es una medida de tal condición. Por tanto, debe calcularse tal desviación poblacional. Esto puede hacerse 1) realizando una encuesta piloto (por ejemplo, de 50) y utilizando la desviación estándar, o 2) calculando la desviación estándar con base en un conocimiento de la población. Supóngase que se realiza un estudio piloto y se calcula que la desviación estándar de la muestra es \$3 000. Ahora puede estimarse el tamaño de la muestra.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{E}{z} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\$200}{1.96} = \frac{\$3\,000}{\sqrt{n}}$$

$$\$102.04\ \sqrt{n} = \$3\,000$$

$$\sqrt{n} = \frac{\$3\,000}{\$102.04}$$

$$n = 864.36$$

Una fórmula de cálculo más adecuada para determinar n es:

$$\boxed{n = \left(\frac{z \cdot s}{E}\right)^2}$$

en donde:

E es el error permisible
z es el desvío normal asociado al grado de confianza seleccionado
s es la desviación estándar de la muestra del estudio piloto.

Para este problema:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{z \cdot s}{E}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1.96 \times \$3{,}000}{\$200}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\$5{,}880}{\$200}\right)^2 \\ &= 864.36 \end{aligned}$$

que es igual a la respuesta anterior. Puede redondearse a 865.

El tamaño de muestra de 865 puede o no darle al urbanista lo que desea, una estimación de la media verdadera dentro de más o menos $200. La muestra de 865 puede ser el tamaño de muestra correcto, o ser demasiado pequeño o demasiado grande. Si resulta ser demasiado grande, el costo del estudio de 865 familias no se justificó. Si la muestra de tamaño 865 es demasiado pequeña, deben entrevistarse más familias para reducir el error dentro de $200 (como originalmente especificó el urbanista).

¿Por qué el tamaño de muestra que se calcula usando la fórmula no siempre es el correcto? Una razón es que es poco probable que la desviación estándar de la muestra de 865 familias sea exactamente $3 000 (igual que para el estudio piloto de aproximadamente 50 familias). Si la desviación estándar de la muestra resulta ser $2 500, el tamaño correcto de muestra debería ser 600. Esto resulta calculando el valor de n de la siguiente manera: $\$200/1.96 = \$2\,500/\sqrt{n}$, o bien $n = [(1.96 \times \$2\,500)/\$200]^2$. Obviamente la muestra de 865 fue demasiado grande.

AUTOEXAMEN 8-7

Las respuestas se dan al final del capítulo.

¿Le ayudarían al secretario de una escuela a determinar cuántas boletas de calificaciones debe considerar? El secretario desea calcular la media aritmética del promedio final de los estudiantes que se graduaron durante los últimos 10 años. Las calificaciones promedio varían entre 2.0 y 4.0. La media de las calificaciones promedio se estima entre más o menos 0.05 de la media poblacional. Se utilizará el grado de confianza de 0.99. Por tanto, el secretario desea informar algo como esto (hipotéticamente): "Con una probabilidad de 0.99, la media de las calificaciones promedio de los estudiantes graduados se encuentra en el intervalo entre 2.45 y 2.55". La desviación estándar de un estudio piloto pequeño es 0.279. ¿Cuántas boletas de calificaciones deben muestrearse?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

19. Se planea un estudio para determinar el tiempo promedio que los niños de nivel preescolar ven la televisión. Un estudio piloto indicó que el tiempo medio por semana es de 12 horas, con una desviación estándar de 3 horas. Se desea estimar el tiempo medio dentro de un cuarto de hora. Se usará el grado de confianza de 0.95. ¿Cuántos niños de nivel preescolar deben incluirse en la investigación?
20. Un procesador de zanahorias corta la parte superior verde de cada una, las lava y coloca seis por paquete. Se colocan veinte paquetes en una caja para su envío. Se revisan algunas cajas para determinar su peso. El peso promedio fue de 20.4 libras, y la desviación estándar, de 0.5 libras. ¿Cuántas cajas debe muestrear el procesador para tener un 95% de seguridad de que la media muestral no difiere de la media poblacional en más de 0.2 libras?

TAMAÑO DE MUESTRA PARA PROPORCIONES

El procedimiento que acaba de usarse es aplicable para determinar el tamaño de la muestra cuando se trata de proporciones. Deben especificarse tres aspectos: 1) El investigador debe decidir qué nivel de confianza emplear, por lo general de 0.95 o 0.99. 2) Debe indicar qué tan precisa debe ser la estimación de la proporción de la población. 3) La proporción de la población, $\bar{p}$, se debe aproximar con base en la experiencia (como en las pasadas elecciones) o en un estudio piloto pequeño, por ejemplo de 50 o 100.

La fórmula que se aplica para determinar el tamaño de muestra en el caso de una proporción es:

$$\boxed{n = \bar{p}(1 - \bar{p})\left[\frac{z}{E}\right]^2}$$

en donde:

$\bar{p}$ es la proporción estimada, con base en la experiencia o en un estudio piloto.
z es el desvío normal z asociado al grado de confianza seleccionado.
E es el error máximo permisible que el investigador tolerará.

✱ Ejemplo

Una congresista desea determinar su popularidad en cierta parte de un estado. Especifica que la proporción de electores que la apoyarán debe calcularse dentro del ± 2% de la proporción de la población. Además, se usará el grado de confianza de 0.95. En las elecciones pasadas recibió 40% de los votos en esa área del estado. Duda que esto haya sufrido muchos cambios. ¿De cuántos votantes registrados debe ser la muestra?

✔ Solución

El tamaño de muestra debe ser de 2 305, que se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} n &= \bar{p}(1 - \bar{p}) \left[\frac{z}{E}\right]^2 \\ &= 0.40(1 - 0.40) \left[\frac{1.96}{0.02}\right]^2 \\ &= 0.24[98]^2 \\ &= 2\,304.96 \end{aligned}$$

Nuevamente el tamaño de la muestra de 2 305 podría ser demasiado grande, demasiado pequeño o exactamente el correcto, dependiendo de la precisión de $\bar{p} = 0.40$.

Nota: Si no hay una estimación lógica de $\bar{p}$, el tamaño de muestra puede calcularse considerando que $\bar{p} = 0.50$. (El tamaño de muestra nunca será mayor que el que se obtuvo para n cuando $\bar{p} = 0.50$.)

AUTOEXAMEN 8-8

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Las siguientes afirmaciones se refieren al ejemplo sobre la popularidad de la congresista. Para cada afirmación, se indica si es verdadera o falsa y se proporcionan evidencias que la fundamentan. Supóngase que se entrevistaron 2 305 electores.

1. Si 922 de los 2 305 entrevistados dijeron que planeaban votar por la congresista, la muestra de tamaño 2 305 fue exactamente la correcta.
2. Si 461 de los 2 305 electores entrevistados dijeron que planeaban votar por la congresista, la muestra de 2 305 fue demasiado grande.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

21. Suponga que el presidente de Estados Unidos desea una estimación de la proporción de la población que apoya su política actual hacia Honduras. El presidente desea que la estimación esté dentro del 0.04 de la proporción verdadera. Considere que se usa un nivel de confianza de 0.95. El secretario de Estado estimó que la proporción que apoya la política actual es de 0.60.
    a. ¿Qué tan grande debe ser la muestra?
    b. ¿Cuán grande debería ser la muestra si no se contara con la estimación del secretario de Estado?
22. En estudios previos se determinó que 30% de los turistas que van a Atlantic City a apostar durante un fin de semana, gastaron más de 1 000 dólares. La administración desea actualizar ese porcentaje.
    a. Usando un grado de confianza de 0.90, la administración desea estimar el porcentaje de turistas que gastan más de $1 000 dentro de 1%. ¿Qué tamaño de muestra debería emplearse?
    b. La administración indicó que el tamaño de muestra que se sugirió en la parte *a* es demasiado grande. Sugiera qué podría hacerse para reducir el tamaño de muestra. Con base en su sugerencia, vuelva a calcular el tamaño de la muestra.

RESUMEN

El muestreo se utiliza mucho en la administración, en sondeos de opinión pública, educación y otras áreas. Un departamento de control de calidad podría seleccionar sólo 50 transistores aleatoriamente para estimar el porcentaje de piezas defectuosas. Un departamento de publicidad podría solicitar a 126 personas que evaluaran cinco programas propuestos de propaganda. El gobierno se vale del muestreo para determinar el porcentaje de desempleados en la población, determinar el promedio del salario por hora en la industria de la construcción y para elaborar el índice mensual de precios al consumidor.

Por lo general no es posible realizar un estudio completo de la población por diferentes razones. Una es que puede no ser posible contar o medir todo elemento de una población. Esto se aplica a peces, gaviotas, lámparas eléctricas y mazorcas de maíz.

Se señaló que el investigador debe tener cuidado de asegurarse que los elementos de la muestra sean representativos de toda la población. Para lograrlo, se dispone de muchas estrategias de muestreo. Algunas de las más simples son el *muestreo aleatorio,* el *sistemático,* el *aleatorio estratificado* y el *muestreo por conglomerados.*

Aun cuando se seleccionen cuidadosamente los elementos de la muestra, es poco probable que la media muestral sea exactamente igual a la media poblacional. Las desviaciones entre "lo que se obtiene" (estadísticas muestrales) y "lo que se espera" (parámetros poblacionales) se denominan *errores de muestreo.*

Para profundizar en el análisis del concepto de variación muestral, pueden seleccionarse de una población todas las muestras posibles de un tamaño constante y calcular la media de cada muestra. La distribución de esas medias se denomina apropiadamente *distribución muestral de medias.* Se indicó que la distribución de medias muestrales tiende a aproximarse a una distribución normal. Este hecho es la base del *teorema de límite central.** Expresa que

---

* **(N. del R.)** O mejor dicho, teorema de la distribución normal de medias.

independientemente de la forma de la población, la distribución muestral de medias será más o menos normal si el tamaño de muestra es suficientemente grande. Muchos estadígrafos consideran que una muestra de 30 o más califica como grande.

Una *estimación por puntos* es simplemente un número que se utiliza para estimar un parámetro poblacional, como la media poblacional, μ. Una *estimación de intervalo* da el alcance dentro del cual probablemente queda el parámetro de la población. El teorema de límite central proporciona la base para las estimaciones de intervalo.

Recapitulación

I. Hay muchas razones para muestrear una población.
   A. A menudo una prueba destruye el elemento muestreado y no se le puede devolver a la población.
   B. Puede ser imposible revisar o localizar a todos los elementos de la población.
   C. Puede ser prohibitivo el costo de estudiar a todos los elementos de la población.
   D. Los resultados de una muestra pueden ser una estimación adecuada del parámetro poblacional, ahorrando por tanto, tiempo y dinero.
   E. Puede necesitarse demasiado tiempo para estar en contacto (o entrevistar) a todos los elementos de la población.

II. Existen dos tipos de muestras: probabilística y no probabilística.
   A. En una muestra probabilística todos los elementos de la población tienen probabilidad de ser seleccionados para la muestra. Hay varios métodos de muestreo de probabilidad.
      1. En una *muestra aleatoria simple,* los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser seleccionados para la muestra.
      2. En una *muestra sistemática* se selecciona un punto aleatorio de inicio y después se selecciona para la muestra cada *k*–ésimo elemento.
      3. En una *muestra estratificada* la población se divide en varios grupos, o estratos, y después se selecciona una muestra de cada uno.
      4. En un *muestreo por conglomerados* la población se divide en unidades primarias y después se toman muestras de las citadas unidades.
   B. En el muestreo no probabilístico, la inclusión en la muestra se basa en juicios de la persona que realiza el muestreo. Las muestras no probabilísticas pueden llevar a resultados con sesgo.

III. La diferencia entre parámetro poblacional y la estadística muestral se denomina *error de muestreo.*

IV. La *distribución muestral de medias* es una distribución probabilística que señala todas las medias muestrales posibles y sus probabilidades de ocurrencia.
   A. Para un tamaño de muestra dado, la media de todas las medias muestrales posibles seleccionadas de la población es exactamente igual a la media poblacional.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

   B. Existe menos dispersión en la distribución muestral de medias que en la población. La variabilidad en la distribución muestral de medias se obtiene mediante:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

C. El *teorema de límite central* (o de distribución normal de medias) especifica que si la población es normal, entonces la distribución de medias también manifiesta normalidad. Si la población no es normal, la distribución de muestreo de las medias se aproxima a la normal a medida que aumenta el tamaño de la muestra.

V. Una *estimación por puntos* es un valor único que se utiliza para estimar un valor de la población.

VI. Una *estimación de intervalo* es un conjunto de valores dentro de los cuales se espera que ocurra el parámetro de la población.

A. Los factores que constituyen un intervalo de confianza para una media son:
1. El número de observaciones en la muestra (n).
2. La variabilidad en la población, que generalmente se estima mediante la desviación estándar (s).
3. El nivel de confianza. Se representa mediante el desvío normal o valor z.

B. Un intervalo de confianza para la media se obtiene usando la siguiente fórmula.

$$\bar{X} \pm z\frac{s}{\sqrt{n}}$$

C. Los factores que constituyen un intervalo de confianza para una proporción son:
1. El número de observaciones en la muestra.
2. El valor de $\bar{p}$, que se obtiene dividiendo el número de éxitos en la muestra (X) entre el número de observaciones en la misma (n).
3. El nivel de confianza.

D. Un intervalo de confianza para una proporción se determina usando la siguiente fórmula.

$$\bar{p} \pm z\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

VII. El tamaño de muestra necesario puede determinarse tanto para medias como para las proporciones.

A. Los factores que determinan el tamaño de muestra para una media son:
1. El nivel de confianza deseado (z).
2. El máximo error permisible (E).
3. La variación en la población (que por lo general se estima con s).

B. La fórmula para el tamaño de muestra para una media es:

$$n = \left[\frac{z \cdot s}{E}\right]^2$$

C. Los factores que determinan el tamaño de muestra para una proporción son:
1. El nivel de confianza deseado (z).
3. El máximo error permisible (E).
3. La estimación de la proporción de la población. Si no se cuenta con una estimación, entonces se usa 0.50.

D. La fórmula para el tamaño de muestra para una proporción es:

$$n = \bar{p}(1 - \bar{p})\left(\frac{z}{E}\right)^2$$

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

23. Explique brevemente:
    a. El objetivo del muestreo.
    b. Algunas de las razones por las que se usa una muestra en vez de entrar en contacto, entrevistar, enumerar o probar una población completa.
24. Identifique cada uno de los siguientes tipos de muestreo.
    a. Los auditores pueden seleccionar cada 20º expediente iniciando, por ejemplo, con el 5º en el archivo superior. Después se auditan los expedientes números 25, 45, 65, 85, . . .
    b. Se dividieron los fabricantes en grupos según el volumen de ventas. Los que tienen más de $100 millones (de dólares) en ventas se clasificaron como "clase A grande", los que tienen ventas de $50 a $100 millones como "clase A media", los que tienen de $25 a $50 millones . . . , etc. Después se seleccionaron muestras de cada uno de estos grupos.
25. Explique la afirmación "Si se utilizan métodos de muestreo no probabilísticos, los resultados pueden estar sesgados".
26. Explique qué significa el error de muestreo.
27. Cite dos casos en los cuales podría usarse muestreo por conglomerados.
28. Explique de manera breve un tipo de muestreo no probabilístico denominado muestreo por panel.
29. A continuación se presenta una lista de médicos familiares. Se seleccionaron aleatoriamente tres médicos y se les entrevistará para averiguar cuál es el cargo por una consulta de rutina. Se ha codificado a los 39 médicos del 00 al 38. Además, se registra si practican solos (S), tienen un socio (P) o si forman parte de un grupo de práctica médica (G).

Número aleatorio	*Médico*	*Tipo de práctica*	*Número aleatorio*	*Médico*	*Tipo de práctica*
00	R. E. Scherbarth, M.D.,	S	20	Gregory Yost, M.D.,	P
01	Crystal R. Goveia, M.D.,	P	21	J. Christian Zona, M.D.,	P
02	Mark D. Hillard, M.D.,	P	22	Larry Johnson, M.D.,	P
03	Jeanine S. Huttner, M.D.,	P	23	Sanford Kimmel M.D.,	P
04	Francis Aona, M.D.,	P	24	Harry Mayhew M.D.,	S
05	Janet Arrowsmith, M.D.,	P	25	Leroy Rodgers M.D.,	S
06	David DeFrance, M.D.,	S	26	Thomas Tafelski M.D.,	S
07	Judith Furlong, M.D.,	S	27	Mark Zilkoski M.D.,	G
08	Leslie Jackson, M.D.,	G	28	Ken Bertka, M.D.,	G
09	Paul Langenkamp, M.D.,	S	29	Mark DeMichiei, M.D.,	G
10	Philip Lepkowski, M.D.,	S	30	John Eggert, M.D.,	P
11	Wendy Martin, M.D.,	S	31	Jeanne Fiorito, M.D.,	P
12	Denny Mauricio, M.D.,	P	32	Michael Fitzpatrick, M.D.,	P
13	Hasmukh Parmar, M.D.,	P	33	Charles Holt, D.O.,	P
14	Ricardo Pena, M.D.,	P	34	Richard Koby, M.D.,	P
15	David Reames, M.D.,	P	35	John Meier, M.D.,	P
16	Ronald Reynolds, M.D.,	G	36	Douglas Smucker, M.D.,	S
17	Mark Steinmetz, M.D.,	G	37	David Weldy, M.D.,	P
18	Geza Torok, M.D.,	S	38	Cheryl Zaborowski, M.D.,	P
19	Mark Young, M.D.,	P			

a. Si se determinan los números aleatorios 31, 94, 43, 36, 03, 24, 17 y 09, ¿a qué médicos se entrevistará?
b. Seleccione una muestra aleatoria de tamaño cuatro utilizando la tabla de números aleatorios (apéndice E).

30. Véase el ejercicio 29. Un muestreo consta de uno de cada cinco médicos. El punto 04 es el inicial. ¿Cuáles médicos serán los entrevistados?
31. Véase el ejercicio 29. Una muestra constará de dos médicos que practican solos (S), dos en sociedad (P) y uno en un grupo (G). Seleccione una muestra de acuerdo con lo anterior. Explique el procedimiento empleado.
32. Un estudio de los establecimientos de motel en un área metropolitana mostró que existen 25. El concejo de la ciudad y el departamento de turismo estudian el número de habitaciones en cada motel. Los resultados son los siguientes: 90, 72, 75, 60, 75, 72, 84, 72, 88, 74, 105, 115, 68, 74, 80, 64, 104, 82, 48, 58, 60, 80, 48, 58 y 108.
    a. Utilice una tabla de números aleatorios (apéndice E) y seleccione una muestra aleatoria de tamaño cinco a partir de esta población.
    b. Obtenga una muestra sistemática seleccionando un punto de inicio aleatorio entre los cinco primeros moteles y después seleccione cada quinto albergue.
    c. Suponga que los últimos cinco moteles de la lista son de tarifa económica. Describa cómo seleccionaría una muestra aleatoria de tres moteles normales y dos de tarifa económica.
33. El Dr. Lamberg tiene a cinco estudiantes que realizan estudios especiales con él este semestre. Para evaluar el avance de lectura, el doctor aplica un examen de cinco preguntas con respuestas verdadero/falso. El número de respuestas correctas para cada estudiante se presenta a continuación.

Estudiante	*Número correcto*
Torres	4
Cuevas	3
Flores	5
Ramos	3
Campos	2

    a. ¿Cuántas muestras de tamaño dos son posibles con esta población?
    b. Enliste todas las muestras posibles de tamaño dos y calcule las medias muestrales.
    c. Organice las medias muestrales en una distribución probabilística.
    d. Calcule la media de las medias muestrales y compárela con la media poblacional.
    e. Compare la forma de la población con la forma de la distribución de las medias muestrales.
34. Se hará una encuesta en los bancos comerciales de una región. Algunos son muy grandes, con activos de más de $500 millones (de dólares); otros son de tamaño medio, con activos entre $100 millones y $500 millones; el resto de los bancos tienen activos de menos de $100 millones. Explique cómo seleccionaría una muestra de estos bancos.
35. Plastic Products considera el diámetro interno de la tubería PVC de plástico que produce. Una máquina extrusiona el material, que después se corta en tramos de 10 pies (3 m) de largo. Cada máquina produce aproximadamente 720 tubos durante un periodo de dos horas. ¿Cómo tomaría una muestra de la producción del periodo de dos horas?
36. Las edades de seis ejecutivos de una compañía (considerada la población) son:

Nombre	*Edad*
Sr. Pérez	54
Sra. Salas	50
Sr. Lara	52
Sra. Ruiz	48
Sr. Luna	50
Sr. Soto	52

a. ¿Cuántas muestras de tamaño dos son posibles?
b. Seleccione todas las muestras posibles de tamaño dos de la población de ejecutivos y calcule las medias.
c. Organice las medias en una distribución muestral.
d. ¿Cuál es la media de la población? ¿De la media muestral?
e. ¿Qué forma tiene la población?
f. ¿Qué forma tiene la distribución muestral?

37. Una muestra aleatoria de 85 dirigentes de grupo, supervisores y personal similar reveló que, en promedio, una persona permanece 6.5 años en el puesto antes de que se le promueva. La desviación estándar de la muestra fue 1.7 años. Utilice el grado de confianza de 0.95 y establezca el intervalo de confianza dentro del cual se encuentra la media poblacional.
38. De 900 consumidores que se estudiaron, 414 señalaron que están muy entusiasmados con un nuevo proyecto de decoración para el hogar. Fije el intervalo de confianza de 0.99 para la proporción de la población.
39. Se estima que la proporción de ejecutivos subalternos que renuncian en compañías manufactureras grandes después de tres años es de 3%. Se utiliza el grado de confianza de 0.95. Un estudio realizado hace varios años reveló que el porcentaje de ejecutivos subalternos que renuncian después de tres años fue 21.
    a. Para actualizar este estudio, ¿de cuántos ejecutivos subalternos deberían estudiarse los archivos ?
    b. ¿Cuántos funcionarios deberían considerarse si no se contara con una estimación previa?
40. Hay 20 000 electores posibles en el quinto distrito, y se selecciona una muestra de 500. De los 500 que se consideran, 350 dijeron que votarían por el candidato demócrata. Utilice el coeficiente de confianza de 0.99 y fije los límites de confianza para la proporción que planea votar por dicho candidato demócrata.
41. Se estimará el número medio de días de viaje al año de los vendedores foráneos empleados por una empresa. Se utiliza el grado de confianza de 0.90. La media de un estudio piloto pequeño fue 150 días, con una desviación estándar de 14. Si la media poblacional se estimará entre 2 días, ¿cuántos vendedores foráneos deberán considerarse?
42. Se seleccionarán aleatoriamente 10 pasajeros en un vuelo Nueva York-Los Angeles y se entrevistarán acerca de las instalaciones en aeropuertos, servicio, alimentos, etc. A cada pasajero que aborda la aeronave se le asigna un número. Los números empiezan en 001 y terminan en 250.
    a. Seleccione aleatoriamente 10 números empleando la tabla que se presenta en el apéndice E.
    b. La muestra de 10 podría haberse seleccionado usando una muestra sistemática. Elija el primer número mediante la tabla y después enuncie los números asignados a los pasajeros que se entrevistarán.

c. Evalúe los dos métodos con base en las ventajas y desventajas posibles.
d. ¿De qué otra manera podría seleccionarse una muestra aleatoria de los 250 pasajeros de este vuelo?

43. A un inspector sanitario se le asigna como tarea estimar el peso neto medio actual de paquetes de carne molida que indican en la etiqueta "3 libras". Obviamente se percata que los pesos no pueden ser exactamente de 3 libras. Una muestra de 36 paquetes reveló que el peso medio es de 3.01 libras con una desviación estándar de 0.03 libras.
a. ¿Cuál es la media poblacional estimada?
b. Utilice el coeficiente de confianza de 0.95. ¿Cuáles son los límites de confianza para la media poblacional?
c. Resuma sus resultados.

44. El jefe de policía de una ciudad informa que el mes pasado se cobraron 500 multas por infracciones de tránsito. Una muestra de 35 mostró que la multa media es de $54 (dólares), con una desviación estándar de $4.50. Fije un intervalo de confianza de 95% para la multa media en tal ciudad.
45. Un banco tiene 650 clientes con cuenta de cheques. Una muestra reciente de 50 de estos clientes mostró que 26 poseen la tarjeta de crédito que maneja el banco. Fije el intervalo de confianza de 99% para la proporción de clientes con cuenta de cheques y que tienen tarjeta de crédito con el banco.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Véase el problema 1, Aplicación de los conceptos, del Repaso de los capítulos 1-4. Se enlistan los datos sobre tiempo de servicio de jueces adjuntos a la Suprema Corte de Estados Unidos. Seleccione 10 muestras aleatorias, cada una de cinco. Calcule la media de cada una de estas muestras. ¿Se esperaría que las medias de estas 10 muestras fueran exactamente iguales? Comente su respuesta. Organice estas medias muestrales en una distribución de frecuencias. Comente acerca de la forma.
2. Un banco nacional, al igual que otros bancos grandes, encuentra que el uso de cajeros automáticos (ATM, de automatic teller machine) reduce el costo de las transacciones bancarias de rutina. Tal banco instaló un ATM en las oficinas centrales de una industria. El ATM es para uso exclusivo de los 605 empleados de la compañía. Después de varios meses de operación, una muestra de 100 empleados reveló que en un mes usan la máquina ATM como sigue.

Número de veces que se usa el ATM	*Frecuencia*
0	25
1	30
2	20
3	15
4	10
5	5
Total	100

a. ¿Cuál es la estimación de la proporción de empleados que no usan el ATM en un mes?

b. Establezca un intervalo de confianza de 95% para esta estimación. ¿Puede tener la seguridad el banco de que cuando menos 40% de los empleados de la empresa utilizará el ATM? Explique su respuesta.
c. ¿Cuántas transacciones al mes realiza el empleado promedio de la compañía?
d. Establezca un intervalo de confianza de 95% para el número medio de transacciones durante un mes.
e. ¿Es posible que la media de la población sea 0? Explique su respuesta.

EXAMEN CAPITULO 8

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Identifique cada uno de los siguientes métodos de muestreo.
   a. La población de interés está en orden alfabético. Iniciando con el 7º apellido, cada 10º nombre de ahí en adelante se seleccionó como elemento de la muestra. Por tanto, la muestra consta de los números 7, 17, 27, 37, y así sucesivamente.
   b. Un distrito extenso se subdividió en 16 áreas. Después 5 de estas áreas se seleccionaron aleatoriamente, y también se seleccionaron al azar para ser entrevistados los residentes de estas cinco regiones.
   c. Los ejecutivos se dividieron en tres grupos: bancarios, industriales y de seguros. Se tomaron muestras aleatorias de cada uno de estos grupos, y se ponderaron los resultados muestrales de acuerdo con el número en el grupo, en relación con el total.
2. Se ha descubierto que algunas de las piezas de acero pequeñas que se almacenan en la bodega E se oxidaron y tendrán que limpiarse antes de que puedan ser vendidas. Para aproximar el porcentaje que necesita limpieza, se seleccionó aleatoriamente una muestra de 200. Se encontró que 80 de 200 necesitan limpieza. Utilizando un coeficiente de confianza de 0.90, determine los límites de confianza entre los que debe quedar la proporción de la población.
3. Se seleccionó una muestra aleatoria de tamaño 200 para estimar la cantidad promedio (media) de tiempo que los adultos jubilados de más de 65 años y que viven en Florida, escuchan diariamente la radio. Se calculó que la media muestral es de 110 minutos, y la desviación estándar de la muestra, de 30 minutos. ¿Cuáles son los límites de confianza de 95% para el tiempo de escucha de la media poblacional?
4. Se realizará un estudio de muestreo para determinar el ingreso familiar medio en una región. La pregunta es, ¿cuántas familias deberán muestrearse? Para tener más información sobre el área, se realizó un pequeño estudio piloto y se calculó que la desviación estándar de la muestra es $500 (dólares). El patrocinador de la investigación desea usar el coeficiente de confianza de 0.95. Además, si se encuentra que el ingreso familiar medio es de, por ejemplo, $22 500, se podría plantear una afirmación como ésta: "Estoy seguro que el ingreso familiar medio de la población está en el intervalo entre $22 400 y $22 600". O si se sabe que la media muestral es de, por ejemplo, $31 800, se plantearía con 95% de confianza que la media poblacional está en el intervalo entre $31 700 y $31 900.

   Con base en la información del estudio piloto y las condiciones del patrocinador, ¿cuántas familias deben ser entrevistadas?
5. Se planea realizar una encuesta para determinar qué proporción de una fuerza de trabajo tiene dos o más empleos. Se decide utilizar el coeficiente de confianza de 0.95 y se

determina que la proporción estimada debe estar entre más o menos 2% de la proporción poblacional. Un estudio piloto revela que 5 de los 50 trabajadores considerados tienen dos o más empleos. ¿Cuántos de los integrantes de la fuerza laboral deben entrevistarse para cubrir los requisitos especificados?

Autoexámenes

8-1 1. Los estudiantes seleccionados son Price, Detlev y Molter. Se podrían haber elegido al azar tres números cualesquiera, como 44, 17 y 32. El número 59 se omitiría y se seleccionaría otro número.

8-2 Los estudiantes seleccionados son: Berry, Francis, Kopp, Poteau y Swetye.

8-3 1. 10, obtenido mediante:

$$\frac{5!}{2!(5-2)!}$$

	Tiempo de servicic	*Media muestral*
Snow, Tolson	20, 22	21
Snow, Kraft	20, 26	23
Snow, Irwin	20, 24	22
Snow, Jones	20, 28	24
Tolson, Kraft	22, 26	24
Tolson, Irwin	22, 24	23
Tolson, Jones	22, 28	25
Kraft, Irwin	26, 24	25
Kraft, Jones	26, 28	27
Irwin, Jones	24, 28	26

Medias	*Número*	*Probabilidad*
21	1	0.10
22	1	0.10
23	2	0.20
24	2	0.20
25	2	0.20
26	1	0.10
27	1	0.10
	10	1.00

4. Son idénticas: la media poblacional, μ, es 24, y la media de las medias muestrales también es 24.
5. Las medias muestrales varían de 21 a 27. Los valores de la población van de 20 a 28.
6. No normal.
7. Sí.

8-4 1. 402.7 gramos. La estimación por puntos.
2. El intervalo está entre 399.11 y 406.29 gramos, que se obtiene mediante:

$$\overline{X} \pm 2.58 \frac{s}{\sqrt{n}} = 402.7 \pm 2.58 \frac{8.8}{\sqrt{40}}$$

3. 399.11 y 406.29 gramos.
4. 0.99.
5. Si se establecieran 100 intervalos semejantes, aproximadamente 99 incluirían a la media poblacional.

8-5 1. 0.268 y 0.332, que se obtienen mediante:

$$0.30 \pm 2.58 \sqrt{\frac{0.30(1-0.30)}{1\,400}} =$$

$$= 0.30 \pm 2.58(0.0122474)$$

2. 0.268 y 0.332.
3. Si se establecieran 100 intervalos semejantes, aproximadamente 99 incluirían a la proporción poblacional.

8-6 Aproximadamente 23.7 y 51.3%, que se obtienen por:

$$0.375 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.375(0.625)}{40}} \sqrt{\frac{250-40}{250-1}}$$

$$= 0.375 \pm 1.96(0.0765466)(0.9183537)$$

$$= 0.2372181 \text{ y } 0.5127819$$

8-7 208, que resulta de

$$n = \left[\frac{(2.58)(0.279)}{0.05}\right]^2$$

$$= 207.26, \text{ que se redondea a } 208.$$

8-8 1. Verdadero. $\bar{p} = 922/2\,305 = 0.40$. Sustituyendo:

$$0.40(1 - 0.40)\left[\frac{1.96}{0.02}\right]^2 = 02\,304.96$$

$$= 2\,305$$

2. Verdadero. $\bar{p} = 461/2\,305 = 0.20$. Sustituyendo:

$$0.20(1 - 0.20)\left[\frac{1.96}{0.02}\right]^2 = 0.16[98]^2$$

$$= 1\,537$$

La muestra de 2 305 es demasiado grande. Sólo se necesita entrevistar a 1 537 electores.

Examen capítulo 8

1. a. Sistemático.
   b. Por conglomerados.
   c. Estratificado.
2. Entre 34.3 y 45.7%, que se obtienen por

$$0.40 \pm 1.645\sqrt{\frac{0.40(1 - 0.40)}{200}}$$

$$= 0.40 \pm 1.645\sqrt{0.0012}$$

3. Entre 105.84 y 114.16 minutos, que resultan de

$$110 \pm 1.96\left(\frac{30}{\sqrt{200}}\right) = 110 \pm 1.96(2.12)$$

$$= 110 \pm 4.16$$

4. 97, que se obtiene mediante

$$n = \left(\frac{1.96 \times \$500}{\$100}\right)^2 = 96.04$$

que se redondea a 97.

5. 865, obtenido por

$$(0.10)(0.90)\left[\frac{1.96}{0.02}\right]^2 = 0.09[98]^2 = 864.36$$

9

Pruebas de hipótesis: muestras grandes

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Definir qué son una hipótesis y una prueba de hipótesis.
2. Describir el procedimiento de cinco pasos para demostrar una hipótesis.
3. Diferenciar entre una prueba de una cola o extremidad y una de dos.
4. Realizar una prueba de hipótesis respecto a una media poblacional.
5. Realizar una prueba de hipótesis respecto a la diferencia entre dos medias poblacionales.
6. Describir los errores estadísticos que pueden resultar en una prueba de hipótesis.

En el capítulo 8 se analizó un aspecto de la inferencia estadística, la estimación. Esta comprende el evaluar, o predecir, el valor de un parámetro de población desconocido, por ejemplo, la media o la proporción poblacionales.

En este capítulo se inicia el estudio de otro aspecto de la inferencia estadística, esto es, las **pruebas de hipótesis.** Algunos tipos de cuestiones que aquí se tratarán serán:

1. ¿Es la resistencia media al impacto de la placa de vidrio que se fabrica en la línea de producción B de 70 psi (libras por pulgada cuadrada)?
2. ¿Son defectuosos más del 10% de los revestimientos de 50 mm en un almacén?
3. ¿Hay diferencia en la proporción de consumidores que compran una cierta marca de jabón antes y después de una campaña publicitaria televisiva?
4. ¿Hay una diferencia en la duración media entre pilas o baterías, de marca AR y HS?

En este capítulo y en los cinco siguientes se analizan las pruebas de hipótesis. Primero se examinará qué se entiende por una *hipótesis* y qué por *prueba de hipótesis*. Después se describirán los pasos que se siguen para demostrar una hipótesis. También se realizarán pruebas en relación con una y dos medias poblacionales. Por último se analizarán los errores estadísticos posibles en las pruebas de hipótesis.

¿QUE ES UNA HIPOTESIS?

Hipótesis	Enunciado acerca del valor de un parámetro poblacional.

Los siguientes son ejemplos de hipótesis o enunciados acerca de un parámetro poblacional:

1. El ingreso mensual medio, a partir de todas las fuentes, para los ciudadanos jubilados es de $993 (dólares).
2. Se sabe que 20% de los delincuentes juveniles finalmente son arrestados y se les sentencia y encarcela.
3. El diámetro exterior medio de los cojinetes de bolas producidos durante una jornada es de 1.000 pulg.
4. En general, el 90% de las formas del impuesto federal de ingresos se llenan correctamente.
5. Las resistencias al impacto de los parabrisas que producen dos empresas industriales son iguales.

Todas estas hipótesis tienen algo en común. Las poblaciones de interés son tan grandes que por diversas razones no sería factible estudiar todos los elementos, o personas, de la población. Por ejemplo, sería prácticamente imposible entrevistar a todos los ciudadanos jubilados en Estados Unidos para averiguar su ingreso mensual. De igual manera, el departamento de control de calidad no hace que el personal revise cada cojinete de bolas que se produce durante un día para determinar si en realidad el diámetro externo medio es exactamente de 1.000 pulg.

Como se observó en el capítulo 8, una alternativa de medir o entrevistar a la población completa es tomar una muestra de la población de interés. Por tanto, es posible probar una afirmación a fin de determinar si la evidencia empírica fundamenta o no la afirmación.

¿QUE ES UNA PRUEBA DE HIPOTESIS?

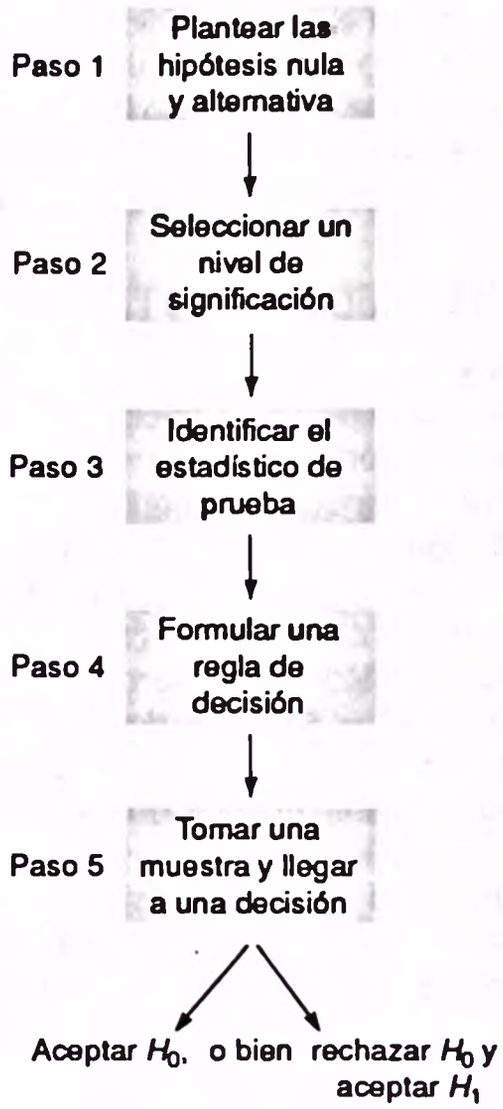
Las expresiones *prueba de hipótesis* y *probar una hipótesis* se emplean con el mismo sentido. La prueba de hipótesis principia con una afirmación, o supuesto, sobre un parámetro de población, como la media poblacional. Como se observó, este enunciado se denomina *hipótesis*. Una hipótesis podría ser que la comisión mensual media de vendedores de una empresa de computadoras, es de $2 000 (dólares). No es posible entrevistar a todos los vendedores para establecer que la media en realidad es $2 000. El costo de localizar y entrevistar a cada vendedor de computadoras en Estados Unidos sería exorbitante. Para probar la validez de la afirmación (media poblacional = $2 000), debe seleccionarse una muestra que conste de todos los vendedores de computadoras, calcular estadísticas muestrales, y con base en determinadas reglas de decisión aceptar o rechazar la hipótesis. Una media muestral de $1 000 para los vendedores comisionistas de computadoras en definitiva provocaría el rechazo de la hipótesis. Sin embargo, supóngase que la media muestral es de $1 995. ¿Se aproxima lo suficiente a $2 000 para aceptar el supuesto de que la media poblacional es de $2 000? ¿Puede atribuirse la diferencia de $5 entre las dos medias a error de muestreo, o esta diferencia es significativa estadísticamente?

Prueba de hipótesis Procedimiento basado en la evidencia muestral y en la teoría de probabilidad que se emplea para determinar si la hipótesis es un enunciado razonable y no debe rechazarse, o si es irrazonable y debe ser rechazada.

PROCEDIMIENTO DE CINCO PASOS PARA PROBAR UNA HIPOTESIS

Hay un procedimiento de cinco pasos que sistematiza la prueba de hipótesis; al llegar al paso 5, se está en la capacidad de tomar la decisión de rechazar o no una hipótesis. Sin embargo, la prueba de hipótesis según la usan los estadígrafos no

proporciona prueba de que algo es verdadero, en la forma como un matemático "prueba" una afirmación. Proporciona una clase de "prueba más allá de una duda razonable", en la manera como lo haría un abogado. Por tanto, hay reglas específicas de evidencia, o un procedimiento, que se siguen. Los pasos son:



Paso 1: La hipótesis nula y la hipótesis alternativa El primer paso es plantear la hipótesis que se probará. Se le denomina *hipótesis nula*, designada mediante H_0 y se lee "*H* subcero". La letra *H* significa hipótesis y el subíndice cero indica "no hay diferencia". Por lo general hay un *no* o un término *no* en la hipótesis nula, que significa que "no hay cambio". La hipótesis nula para la pregunta 1 en la introducción sería: "La resistencia al impacto del vidrio *no* es significativamente diferente de 70 psi". Esto equivale a decir que la resistencia media al impacto (μ) del vidrio es igual a 70 psi. La hipótesis nula H_0 se escribiría entonces como H_0: $\mu = 70$. Para la pregunta 3 en la introducción, la hipótesis nula sería, "*No* hay diferencia en la proporción de consumidores que compran el jabón antes y después de la campaña publicitaria por televisión". Esto equivale a decir que las dos proporciones son

iguales, lo cual se indica como H_0: $p_1 = p_2$. En términos generales, *la hipótesis nula se plantea con el objetivo de aceptarla o rechazarla.* En otras palabras, tal hipótesis es una afirmación que se aceptará si los datos muestrales no pueden proporcionar evidencia convincente de que es falsa.

Hay que subrayar, al llegar a este punto, que si la hipótesis nula se acepta con base en datos muestrales, en realidad se señala que la evidencia no permite rechazarla. Sin embargo, no es posible afirmar que la hipótesis nula es verdadera. En otras palabras, aceptar dicha hipótesis no prueba que H_0 es verdadera. Para probar sin duda alguna que la hipótesis nula es verdadera, el parámetro poblacional debe ser conocido. A fin de determinar esto en realidad, se tendría que probar, investigar o contar cada elemento de la población. Por lo general, esto no es posible. La alternativa es tomar una muestra de la población.

También hay que observar que, a veces, la hipótesis nula principia afirmando que, "No hay diferencia *significativa* entre . . .", o bien, "La resistencia al impacto del vidrio no es *significativamente* diferente de . . .". Cuando se selecciona una muestra de población, la estadística muestral por lo general es distinta del parámetro poblacional hipotético. Como ejemplo, supóngase que la resistencia hipotética al impacto de una placa de vidrio es 70 psi, y la resistencia media al impacto de una muestra de 12 placas de vidrio es 69.5 psi. Debe emitirse un juicio acerca de la diferencia de 0.5 psi. ¿Es una diferencia verdadera, esto es, una diferencia significativa, o la diferencia entre la estadística muestral (69.5) y el parámetro poblacional hipotético (70.0) se debe al azar (muestreo)? Para contestar a esta pregunta se realiza una prueba de significación, normalmente denominada prueba de hipótesis.

Hipótesis nula Una afirmación o enunciado tentativo que se realiza acerca del valor de un parámetro poblacional. Por lo común es una afirmación de que el parámetro de población tiene un valor específico.

La *hipótesis alternativa* describe lo que se considerará si se rechaza la hipótesis nula. A menudo se denomina también hipótesis de investigación, y se designa por H_1, que se lee "*H* subuno". La hipótesis alternativa se aceptará si los datos muestrales proporcionan evidencia de que la hipótesis nula es falsa.

Hipótesis alternativa Una afirmación o enunciado que se aceptará si los datos muestrales proporcionan amplia evidencia de que la hipótesis nula es falsa.

Paso 2. Nivel de significación Después de plantear la hipótesis nula y la alternativa, el siguiente paso es definir el nivel de significación. Es la *probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera.*

El nivel de significación se denota mediante α (la letra griega alfa). También se denomina *nivel de riesgo*. Este último es un término más adecuado, ya que es el riesgo que existe en rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera.

No hay un nivel de significación que se aplique a todos los estudios que implican muestreo. Debe tomarse una decisión de usar el nivel 0.05 (que a menudo se enuncia como nivel de 5%), el nivel 0.01, el 0.10, o cualquier otro nivel entre 0 y 1. Tradicionalmente se selecciona el nivel 0.05 para proyectos de investigación sobre consumo, el 0.01 para control de calidad, y el 0.10 para encuestas políticas. Como investigador debe decidir el nivel de significación antes de formular una regla de decisión y recopilar datos muestrales.

¿Qué es el nivel de significación?

Nivel de significación El riesgo que se asume acerca de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad debe aceptarse por ser verdadera.

A fin de ilustrar cómo es posible rechazar una hipótesis verdadera, suponga que una compañía que manufactura computadoras personales utiliza un gran número de tableros con circuitos impresos. Los proveedores ofrecen precios de diversos tableros y al que presente la oferta más baja se le otorga un contrato considerable. En el contrato se especifica que el departamento de control de calidad de la empresa muestreará todos los envíos que se reciban de tableros. Si más de 6% de los muestreados son subestándares, se rechazará el envío. (La hipótesis nula es que la remesa de tableros que se recibe contiene 6% o menos productos subestándares.) La hipótesis alternativa es que más de 6% de aquéllos están defectuosos.

Una muestra de 50 circuitos que se recibió en cierto día reveló que 4 tableros, u 8%, eran subestándares. El embarque se rechazó porque excedía el máximo de 6% de circuitos impresos subestándares. Si la remesa era en realidad subestándar, entonces fue correcta la decisión de devolver los productos al proveedor. Sin embargo, supóngase que los 4 defectuosos que se seleccionaron en la muestra de 50 eran los únicos tableros subestándares en el envío de 4 000 tableros. Sólo $\frac{1}{10}$ de 1% eran defectuosos (4/4000 = 0.001). En este caso, menos de 6% del envío completo era subestándar y fue un error rechazar la remesa. En términos de la prueba de hipótesis, se rechazó la hipótesis nula de que el envío no era subestándar siendo que debería haberse aceptado la hipótesis nula. Al rechazar tal hipótesis se cometió un *error Tipo I*. Un error de este tipo se denota con la letra griega alfa (α).

Error Tipo I La probabilidad de rechazar la hipótesis nula, H_0, cuando en realidad es verdadera.

La probabilidad de cometer otra clase de error, denominado *error Tipo II*, se denota con la letra griega beta (β). Un error de este tipo es la probabilidad de aceptar H_0 cuando en realidad es falsa.

Error Tipo II La probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando en realidad es falsa.

El fabricante de las computadoras personales cometería un error de Tipo II si, desconociéndolo, en un envío que se recibiera de circuitos impresos hubiera 15% de tableros subestándares y, a pesar de ello, se aceptara el envío. ¿Cómo podría suceder esto? Supóngase que 2 de los 50 tableros (4%) probados fueran subestándares, y 48 de los 50 fueran aceptables. De acuerdo con el procedimiento señalado, debido a que la muestra contiene menos de 6% de tableros subestándares, el envío se aceptó. ¡Podría ser que debido *al azar* los 48 tableros aceptables que se seleccionaron en la muestra fueran los únicos aceptables en la remesa completa que consta de miles de unidades!

Retrospectivamente, el investigador no puede estudiar cada elemento de la población. Por tanto, hay una posibilidad de incurrir en dos tipos de error, uno de Tipo I, en el cual se rechaza la hipótesis nula cuando debería haberse aceptado, y uno de Tipo II, en el que se acepta la hipótesis nula cuando debería haberse rechazado.

A menudo se denominan estos dos errores posibles como *error alfa*, α, y *error beta*, β. Alfa (α) es la posibilidad de cometer un error Tipo I, y beta (β) es la probabilidad de cometer uno de Tipo II.

En la siguiente tabla se resumen las decisiones que podría tomar el investigador y las consecuencias posibles:

	Investigador	
Hipótesis nula	*Acepta* H_0	*Rechaza* H_0
Si H_0 es verdadera y	Decisión correcta	Error Tipo I
Si H_0 es falsa y	Error Tipo II	Decisión correcta

Paso 3. El estadístico de prueba Existen muchas estadísticas de prueba. En este capítulo y los siguientes que se refieren a pruebas de hipótesis se utilizarán t, χ^2, z y otras.

Estadístico de prueba Un valor, determinado a partir de la información muestral, que se utiliza para aceptar o rechazar la hipótesis nula.

El primer estadístico de prueba que se utiliza es para la distribución normal estándar. El llamado desvío normal (o valor) z se determina a partir de datos muestrales:

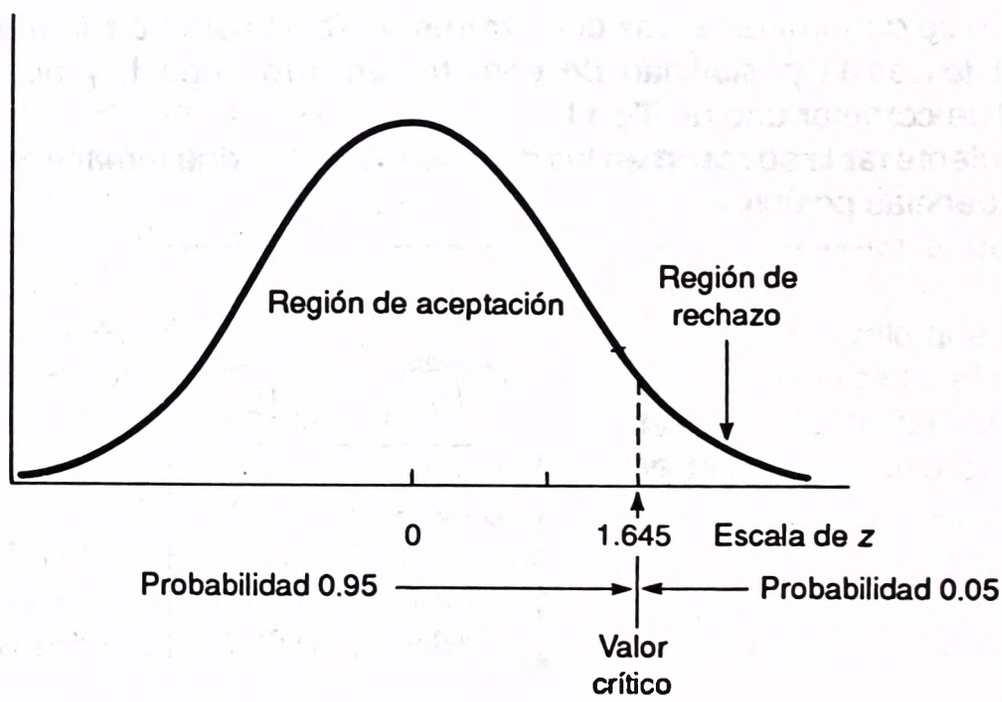
$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Paso 4. La regla de decisión Una regla de decisión simplemente es una afirmación de las condiciones bajo las que se acepta o rechaza la hipótesis nula. Para lograr esto, la distribución muestral se divide en dos partes, que adecuadamente se denominan *región de aceptación* y *región de rechazo.* El área de rechazo define la ubicación de todos los valores que son demasiado grandes o demasiado pequeños, por lo que la probabilidad de que ocurran según una hipótesis nula verdadera es muy remota.

En el diagrama 9-1 se muestran las regiones de aceptación y rechazo para una prueba de significación que se realizará más adelante en este capítulo.

DIAGRAMA 9-1

Distribución muestral de la estadística z, regiones de aceptación y de rechazo para una prueba de una cola, nivel de significación 0.05



Obsérvese en el diagrama 9-1 que:

1. El área de aceptación incluye el área a la izquierda de 1.645.
2. El área de rechazo está a la derecha de 1.645.
3. Se aplica una prueba de una cola. (Esto se explicará más adelante.)
4. Se eligió el nivel de significación 0.05.

5. La distribución muestral de la estadística z está distribuida normalmente.
6. El valor 1.645 separa las regiones de aceptación y rechazo.
7. El valor 1.645 se denomina **valor crítico.**

Valor crítico Número que es el punto divisorio entre la región de aceptación y la región de rechazo.

Paso 5. Toma de una decisión El quinto y último paso en la prueba de hipótesis es la toma de la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis nula. Respecto al diagrama 9-1 si, con base en información muestral se calcula que z es 2.34, la hipótesis nula se rechaza en el nivel de significación 0.05. Se tomó la decisión de rechazar H_0 debido a que 2.34 se encuentra en la región de rechazo, es decir, más allá de 1.645. Se descartaría la hipótesis nula según el razonamiento de que es muy improbable que un valor z tan grande se deba al azar, esto es, a una variación muestral.

Si hubiera sido el valor calculado igual a 1.645 o menor, por ejemplo 0.71, la hipótesis nula sería aceptada. Se razonaría que un valor calculado tan pequeño podría ser atribuido al azar, esto es, a variación en el muestreo.

Como se observó, es posible una de dos decisiones en la prueba de hipótesis: aceptar o rechazar la hipótesis nula. En vez de "aceptar" la hipótesis nula, H_0, algunos investigadores prefieren enunciar la decisión como: "No rechazar H_0", "No es posible descartar H_0", o "Los resultados muestrales no permiten rechazar H_0". Se utilizarán estos enunciados en forma intercambiable.

Debe subrayarse que siempre existe la remota posibilidad de que la hipótesis nula se rechace cuando debería haberse aceptado (error de Tipo I). Además, hay una posibilidad definible de que la hipótesis nula se acepte cuando debería haberse rechazado (error de Tipo II).

Además, debe observarse que la decisión de aceptar o rechazar, la toma el estadígrafo que realiza la investigación. Tal persona puede ser un estadígrafo profesional, un contador, un administrador de mercadotecnia, un ingeniero de control de calidad, o un ejecutivo. Se plantea la hipótesis nula y alternativa, decide el nivel de significación, selecciona una muestra, y toma la decisión de rechazar o no la hipótesis nula. El estadígrafo formula una recomendación con base en esta evidencia muestral, no obstante, a menos que sea una decisión de rutina, los jefes o directivos por lo general toman la decisión final.

Antes de realizar una prueba de hipótesis, se diferenciará entre una prueba de significación de una y de dos colas.

PRUEBAS DE SIGNIFICACION DE UNA Y DE DOS COLAS

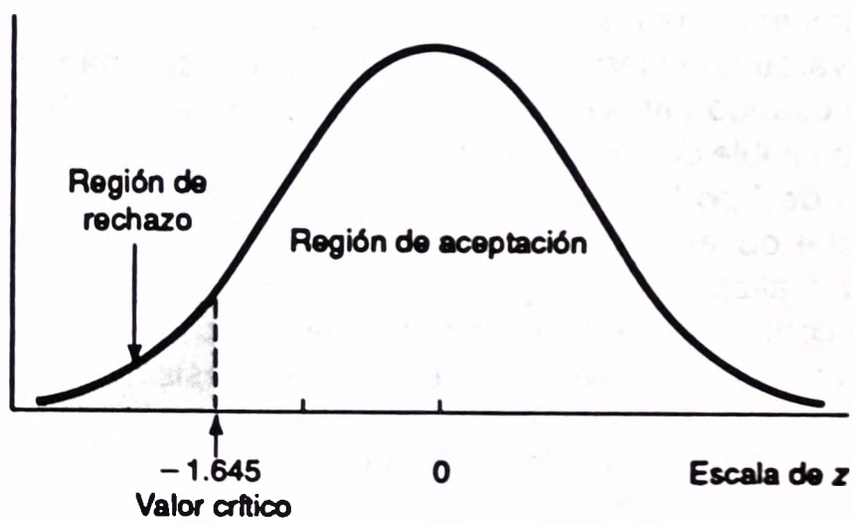
En el diagrama 9-1 se aplica una prueba de una cola o extremo. La región de rechazo está sólo en una de las extremidades de la curva. Para ilustrar el concepto de prueba de una cola, considere el problema de los fabricantes de automóviles, las compañías

grandes de renta de autos y otras que compran una gran cantidad de neumáticos. Las empresas desean que el rendimiento promedio de los neumáticos sea de, por ejemplo, 40 000 millas en condiciones normales de uso. Por tanto, se rechaza un envío de neumáticos si la prueba acelerada de duración revela que la vida de los neumáticos está significativamente por abajo de 40 000 millas, en promedio. Se acepta un envío si la vida media es de más de 40 000 millas. Sin embargo, no importa esta posibilidad. Lo único que interesa es si hay evidencia muestral para concluir que los neumáticos tendrán en promedio menos de 40 000 millas de vida útil. Por tanto, la prueba se realiza para satisfacer el interés de los fabricantes de automóviles y otras compañías de que la *vida media de los neumáticos es de menos de 40 000 millas.* Las hipótesis nula y alternativa se expresan como H_0: $\mu = 40\,000$ y H_1: $\mu < 40\,000$.

Obsérvese en el diagrama 9-2 que la región de rechazo está en la cola izquierda (inferior) de la curva normal. Una forma de determinar la ubicación de la región de rechazo es observar la dirección en que apunta el signo de desigualdad en la hipótesis alternativa (ya sea $<$ o bien $>$). En este problema apunta a la izquierda y, por tanto, la región de rechazo está en la cola de la izquierda.

DIAGRAMA 9-2

Distribución muestral para la estadística *z*, prueba de una cola, nivel de significación 0.05



La región de rechazo está en la cola de la derecha (superior) si la hipótesis alternativa afirma que, por ejemplo, H_1: $\mu > 453$ gramos. (En el diagrama 9-1 se muestra esto.) Como ejemplo adicional, algunos cereales se empaquetan en cajas de 453 gramos de peso. Si hay preocupación de que el cereal se empaque con un peso *mayor de* 453 gramos, las hipótesis que se probarán son H_0: $\mu = 453$ y H_1: $\mu > 453$. El signo $>$ apunta a la región de rechazo en la cola superior.

En resumen, una prueba es de una extremidad cuando la hipótesis alternativa H_1 indica una dirección, como:

H_0: *No* hay diferencia entre el ingreso medio de hombres y el de mujeres.
H_1: El ingreso medio de hombres es *mayor que* el ingreso medio de mujeres.

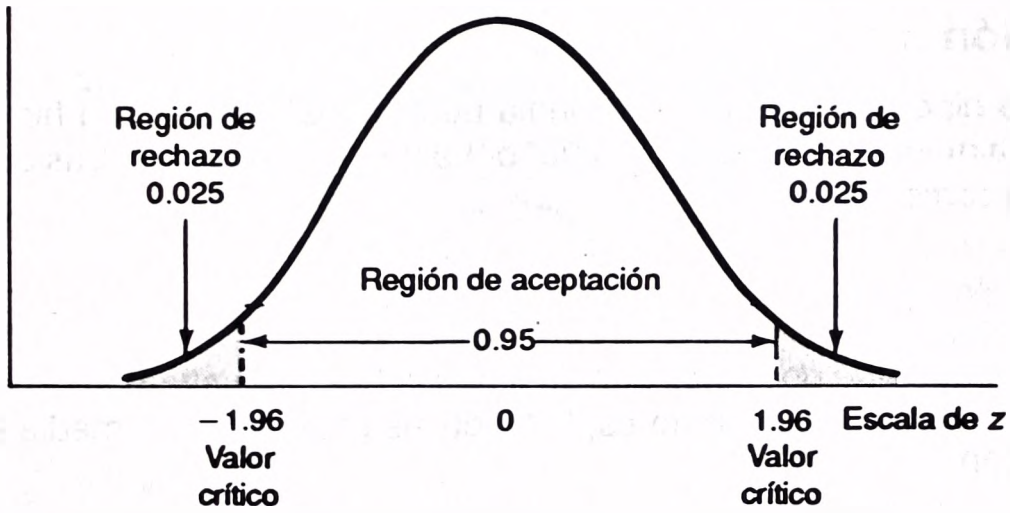
Si no se especifica dirección según la hipótesis alternativa, se aplica una *prueba de dos colas*, o extremidades. Como ejemplo se modifica la hipótesis alternativa anterior:

H_0: *No* hay diferencia entre el ingreso medio de hombres y el de mujeres.
H_1: *Hay* una diferencia en el ingreso medio de hombres y mujeres.

Si se rechaza la hipótesis nula y se acepta H_1, el ingreso medio de hombres podría ser mayor que el de mujeres, o viceversa. Para dar cabida a estas dos posibilidades, el 5% que representa el área de rechazo se divide por igual en las dos colas de la distribución muestral (2.5% cada una). En el diagrama 9-3 se muestran las dos áreas y los valores críticos.

DIAGRAMA 9-3

Regiones de aceptación y de rechazo para una prueba de dos colas, nivel de significación de 0.05



Ahora se demostrará una hipótesis acerca de la media de una población tomando una muestra grande de ésta. Recuérdese que una muestra de 30 o más se considera grande.

PRUEBAS PARA LA MEDIA DE POBLACION: MUESTRA GRANDE Y SE CONOCE LA DESVIACION ESTANDAR DE LA POBLACION

La contestación a estas preguntas expresa una media de población:

- ¿El ingreso medio de ejecutivos de alto nivel en la fabricación es de $325 000 (dólares)?

- ¿La longitud media de las barras cortadas es de 2.0000 pulg?
- ¿La edad media de los internos en reclusorios es menor de 40 años?
- ¿La cantidad media que deben quienes son suscriptores de tarjeta de crédito es mayor de $1 000 dólares?
- ¿La tasa media de eficiencia de los empleados de producción en Roller Bearings, Inc. es igual a 200?

Se utilizará el procedimiento de cinco pasos de prueba de hipótesis para probar la última pregunta.

Prueba de dos colas

✱ Ejemplo

Se sabe que la distribución de las tasas de eficiencia para los trabajadores de producción en Roller Bearings, Inc. se distribuye normalmente con una media poblacional (μ) de 200 y una desviación estándar de la población (σ) de 16. El departamento de investigación cuestiona esa media, afirmando que es diferente de 200. Usar el nivel de significación 0.01 y probar la hipótesis de que la media poblacional es 200. (Obsérvese que se conoce la desviación estándar de la población.)

✔ Solución

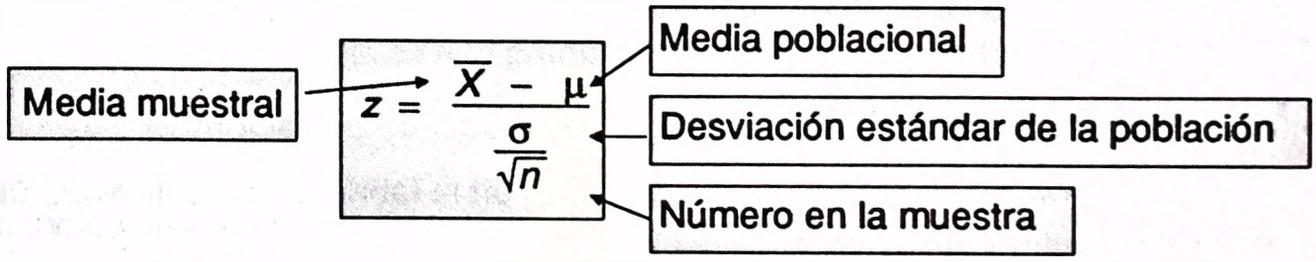
Paso 1. La hipótesis nula es: "La media poblacional es 200". La hipótesis alternativa es: "La media es diferente de 200" o "La media no es 200". Las dos hipótesis se expresan como sigue:

$$H_0: \mu = 200$$
$$H_1: \mu \neq 200$$

Esta es una *prueba de dos colas* debido a que la hipótesis alternativa no establece la dirección de la diferencia. Esto es, la hipótesis no indica si la media es mayor o menor que 200.

Paso 2. Como se observó, se utilizará el nivel de significación 0.01 que es α, la probabilidad de cometer un error de Tipo I. Es decir, es la probabilidad de rechazar una hipótesis verdadera.

Paso 3. El estadístico de prueba adecuado es z. (Este es el valor z que se presentó en el capítulo 7.) La transformación de los datos a unidades estándares (valores z) permite que se usen en un gran número de problemas diferentes. La fórmula es:



donde

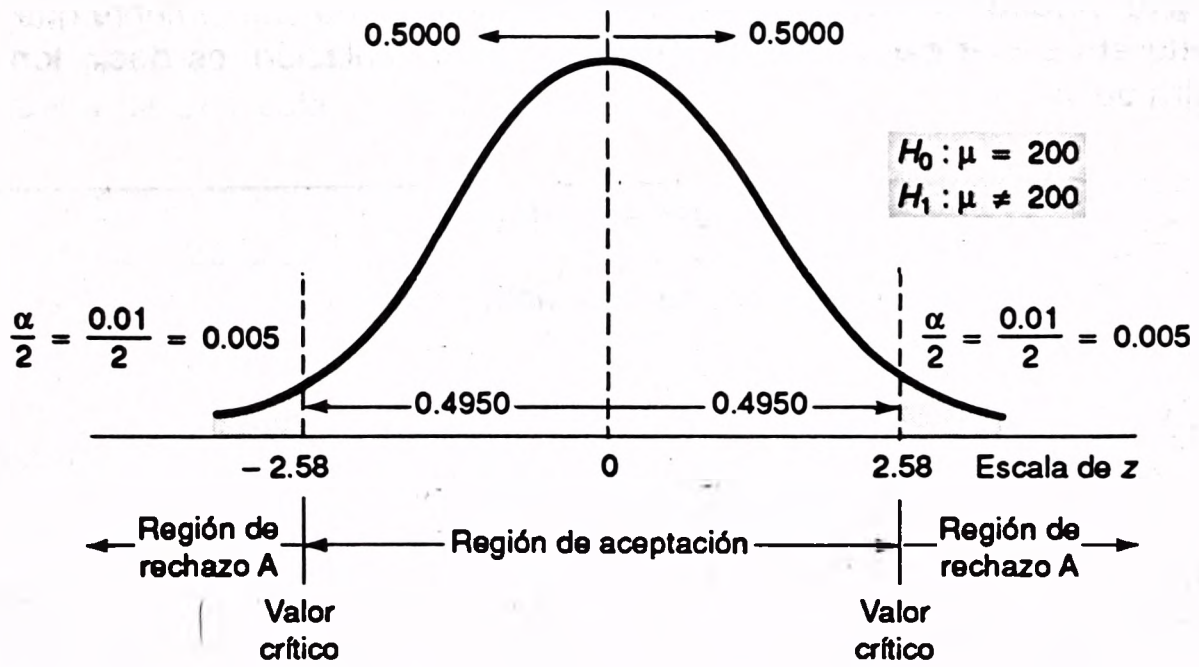
$\overline{X}$ es la media muestral.
μ es la media poblacional.
$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el error estándar de la media (descrito en el capítulo 8).
σ es la desviación estándar de la población.
n es el tamaño de la muestra.

Paso 4. La regla de decisión se formula hallando el valor crítico de z a partir del apéndice D. Puesto que ésta es una prueba de dos colas, la mitad de 0.01, o sea 0.005, está en cada extremidad. El área de aceptación, que se localiza entre las dos colas, es, por consiguiente, 0.99. El apéndice D se basa en sólo la mitad del área bajo la curva, o sea 0.5000. Luego 0.5000 − 0.005 es 0.4950, y así 0.4950 es el área entre 0 y el valor crítico. Localice 0.4950 en el cuerpo de la tabla. El valor más cercano a 0.4950 es 0.4951. Entonces se lee el valor crítico en el margen correspondiente a 0.4951, y resulta 2.58.

Todas las facetas de este problema se muestran en el diagrama 9-4.

DIAGRAMA 9-4

Areas de aceptación y rechazo para el nivel de 0.01



Por consiguiente, la regla de decisión es: rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa (que establece que la población media no es 200) si el valor calculado de z no queda en la región entre −2.58 y +2.58. En caso contrario, no se rechaza la hipótesis nula.

Paso 5. Se toma una muestra de la población (tasas de eficiencia); se calcula z y, con base en la regla de decisión, se toma la decisión de rechazar H_0 o no rechazar H_0.

Se analizaron las calificaciones de eficiencia de 100 empleados de producción. Se calculó que la media de la muestra, $\overline{X}$, es 203.5. Cálculo de z:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{203.5 - 200}{\frac{16}{\sqrt{100}}} = \frac{3.5}{1.6}$$

$$= 2.19$$

Como 2.19 queda en la región de aceptación, la hipótesis nula, que indica que la media poblacional no es diferente de 200, se acepta en el nivel 0.01. La diferencia entre 203.5 y 200 puede atribuirse a una variación aleatoria.

Al aceptar la hipótesis nula, en realidad se señala que los datos muestrales *no permiten rechazar* dicha hipótesis. Por tanto, se supone que la hipótesis nula es verdadera.

No se rechazó la hipótesis nula de que la calificación de eficiencia de la media poblacional es 200 con base en la evidencia muestral. Sin embargo, no se demostró que H_0 es verdadera. La única manera de demostrar indudablemente que es 200 consiste en revisar cada tasa de eficiencia de la población, es decir, tomar una muestra de 100%.

AUTOEXAMEN 9-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

La tasa anual media del resurtido de un medicamento es 6.0. (Esto indica que las existencias del medicamento tienen que renovarse en promedio seis veces al año en un establecimiento.) La desviación estándar es 0.5. Se sospecha que el volumen de ventas promedio no es 6.0. Se utilizará el nivel de significación 0.05 para demostrar esta hipótesis.

1. Plantee H_0 y H_1.
2. ¿Cuál es la probabilidad de un error de Tipo I?
3. Proporcione la fórmula para el estadístico de prueba.
4. Enuncie la regla de decisión.
5. Se seleccionó una muestra aleatoria de 64 frascos de ese fármaco. Se calculó que la tasa media de ventas es 5.84. ¿Debe rechazarse la hipótesis nula en el nivel 0.05? Interprete sus resultados.

Cabe agregar una nota sobre el procedimiento de prueba de hipótesis. En este capítulo se ha subrayado la importancia de seleccionar el nivel de significación *antes*

de plantear la regla de decisión y muestrear la población. En el ejemplo, la hipótesis nula de que $\mu = 200$ se *aceptó* en el nivel del 1%. Pudo producirse un sesgo en la última decisión por no seleccionar inicialmente el nivel 0.01. En vez de esto, se podría haber esperado hasta *después* del muestreo y seleccionar un nivel de significación que provocaría el *rechazo* de la hipótesis nula. Por ejemplo, se podría haber elegido el nivel 0.05. Los valores críticos para este nivel son más o menos 1.96. Como el valor calculado de z (2.19) se encuentra más allá de 1.96, la hipótesis nula se habría rechazado, y se podría concluir que la tasa de eficiencia media *no* es 200. ¡Esta decisión sería exactamente contraria a la decisión anterior!

Prueba de una cola

Con anterioridad se subrayó que si la hipótesis alternativa indica una dirección (ya sea "mayor que" o "menor que"), la prueba es de *una cola*. El procedimiento para demostrar una hipótesis por lo general es igual a la prueba de dos colas, excepto que el valor crítico es diferente. Ahora se modificará la hipótesis alternativa del problema anterior, sobre la calificación de eficiencia de los trabajadores de producción de Roller Bearing, Inc., de:

$$H_1: \mu \neq 200 \text{ (prueba de dos colas)}$$

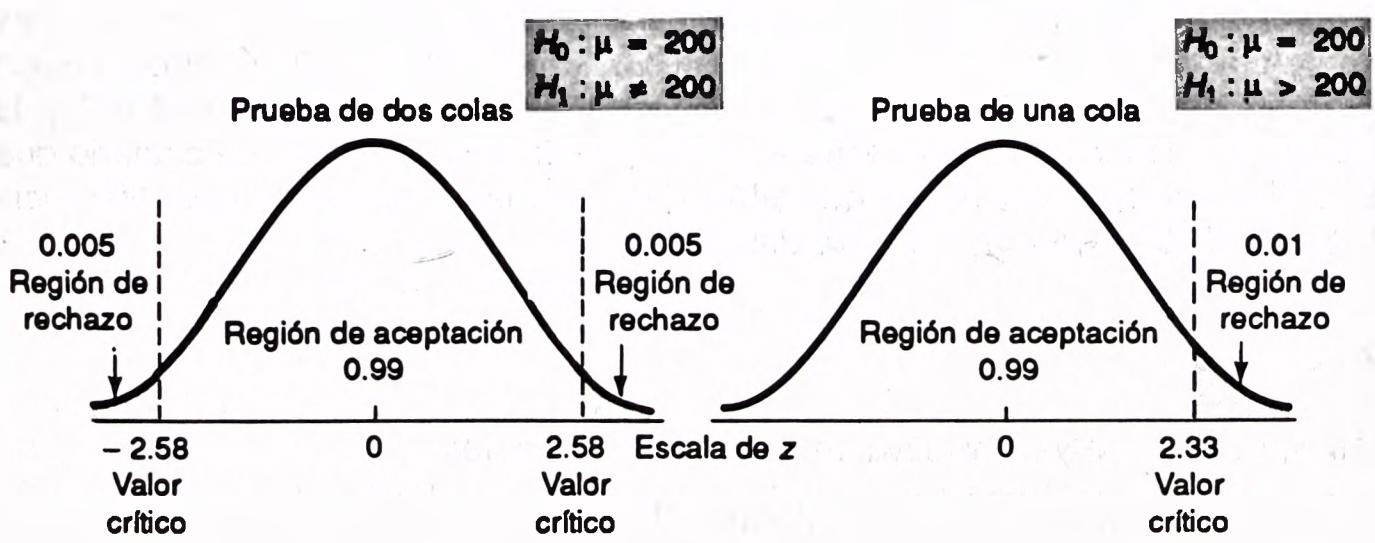
a

$$H_1: \mu > 200 \text{ (prueba de una cola)}$$

Los valores críticos para la prueba de dos colas eran −2.58 y +2.58 (véase el diagrama 9-5). La región de rechazo para una prueba de una extremidad está en la cola derecha (el signo de desigualdad, >, apunta a la región de rechazo). Para una prueba de una cola, el valor crítico es +2.33, que se obtiene mediante: 1)

DIAGRAMA 9-5

Regiones de aceptación y de rechazo, pruebas de dos y una colas
$\alpha = 0.01$



sustrayendo 0.01 de 0.5000 y 2) encontrando el valor crítico asociado a 0.4900 en el apéndice D.

AUTOEXAMEN 9-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase el autoexamen 9-1.

1. Suponga que este problema de prueba de hipótesis se modifica a una prueba de una cola. ¿Cómo se denotaría simbólicamente la hipótesis nula si planteara que:"La media poblacional es igual a 6.0?"
2. ¿Cómo se denotaría simbólicamente la hipótesis alternativa si planteara que: "La media poblacional es menor que 6.0?"
3. Muestre la regla de decisión gráficamente. Señale las regiones de aceptación y de rechazo e indique el valor crítico.

PRUEBAS PARA LA MEDIA POBLACIONAL: MUESTRA GRANDE, Y SE DESCONOCE LA DESVIACION ESTANDAR DE LA POBLACION

En los problemas anteriores se conocía σ, o la desviación estándar de la población. Sin embargo, en la mayoría de los casos es poco probable que se conozca la desviación estándar de la población. Así, σ debe basarse en estudios previos o se estima utilizando la desviación estándar de la muestra s. En el siguiente ejemplo la desviación estándar de la población se desconoce, por lo que debe usarse la desviación estándar de la muestra para estimar σ.

✱ Ejemplo

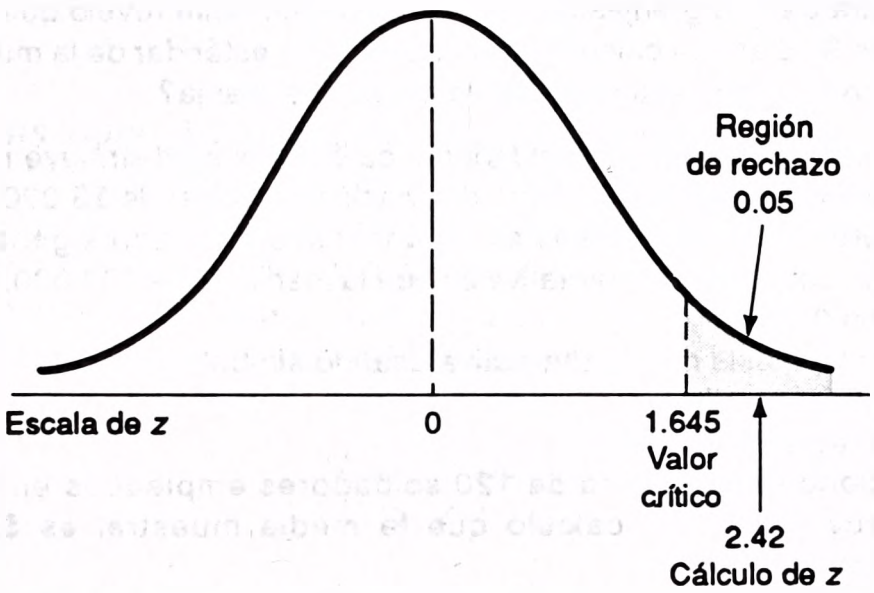
Una cadena grande de tiendas de autoservicio, expide su propia tarjeta de crédito. El gerente de investigación desea averiguar si el saldo insoluto medio mensual es mayor que $400 (dólares). El nivel de significación se fija en 0.05. Una revisión aleatoria de 172 saldos insolutos reveló que la media muestral es $407 y la desviación estándar de la muestra es $38. ¿Debería concluir ese funcionario que la media poblacional es mayor que $400, o es razonable suponer que la diferencia de $7 (de $407 − $400 = $7) se debe al azar?

✔ Solución

Las hipótesis nula y alternativa se enuncia como sigue:

$$H_0: \mu = \$400$$
$$H_1: \mu > \$400$$

Debido a que la hipótesis alternativa indica un sentido o dirección, se aplica una prueba de una cola. El valor crítico de z es 1.645. El valor calculado de z es 2.42. A continuación se muestran gráficamente los cálculos y la regla de decisión:



$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\$407 - \$400}{\frac{\$38}{\sqrt{172}}} = \frac{\$7}{\$2.8975} = 2.42$$

Un valor así de grande ocurrirá menos de 5% de las veces. Así, el gerente de investigación rechazaría la hipótesis nula, H_0, de que el saldo insoluto medio es \$400 a favor de H_1, que plantea que la media es mayor a \$400.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Una nueva organización para acciones de control del peso personal anuncia que quienes se inscriban en su programa reducirán, en promedio, al menos 10 libras (unos 5 kg) las primeras dos semanas (H_0: $\mu = 10$, H_1 $\mu < 10$). Una muestra aleatoria de personas que se inscribieron en el nuevo programa de reducción de peso reveló que la media de pérdida de peso fue de 9 libras. Se calculó que la desviación estándar de la muestra es 2.8 libras. En el nivel 0.05 de significación, ¿es posible demostrar que quienes se inscriben en el curso no pierden en promedio el peso anunciado de 10 libras?
   a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de un error de Tipo I?
   c. Enuncie la regla de decisión.
   d. Tome una decisión. Explíquela a dicha organización.
2. Una agencia de bienes raíces, se especializa en la venta de granjas en todo el estado de Nebraska. Sus registros indican que el tiempo medio de venta de una granja como propiedad es de 90 días. Debido a las condiciones recientes de sequía, se cree que el tiempo medio de venta ahora es de más de 90 días. Se tomará una muestra de las

granjas que la agencia ha vendido en todo el estado para actualizar las estimaciones, empleando el nivel de significación 0.10.

a. Plantee las hipótesis nula y alternativa usando símbolos.
b. ¿Cuál es el riesgo alfa?
c. Enuncie la regla de decisión.
d. Una muestra de 100 granjas que vendió recientemente reveló que el tiempo medio de venta es 94 días. Se calculó que la desviación estándar de la muestra es 22 días. ¿Se ha incrementado el tiempo de venta de una granja?

3. El ingreso bruto anual medio de soldadores calificados se distribuye normalmente con una media de $30 000 (dólares) y una desviación estándar de $3 000. Una asociación de constructores de barcos desea averiguar si sus soldadores ganan más o menos $30 000 al año. La hipótesis alternativa es que la media *no* es $30 000. Se usará el nivel de significación 0.10.
   a. Plantee las hipótesis nula y alternativa usando símbolos.
   b. ¿Cuál es el riesgo alfa?
   c. Enuncie la regla de decisión.
   d. Se seleccionó una muestra de 120 soldadores empleados en la construcción de embarcaciones. Se calculó que la media muestral es $30 500. ¿Debe rechazarse H_0?

4. La nueva directora de una oficina local del servicio contra desempleo creyó que el tiempo medio de 28 minutos en la fila de espera para tramitar una solicitud era demasiado. Por tanto, instauró una serie de cambios para acelerar el proceso. Tres semanas más tarde se seleccionó una muestra de tamaño 127. A medida que cada persona desempleada entró a la oficina para tramitar una solicitud, se le dio una ficha que marcaba la hora de llegada. Cuando se recibió la solicitud, se volvió a registrar la hora. Se calculó que el tiempo medio de espera era de 26.9 minutos, y la desviación estándar de la muestra fue 8 minutos. ¿Debe rechazarse la hipótesis nula de $\mu = 28$ a favor de la hipótesis alternativa de $\mu < 28$ en el nivel de significación 0.02?

PRUEBA DE HIPOTESIS: DOS MEDIAS POBLACIONALES

El siguiente ejemplo, que implica una prueba de significación entre dos medias poblacionales, es característico de un problema industrial práctico.

Se utilizan bloques de concreto en los cimientos de varios edificios. Las especificaciones indican que la media aritmética mínima de la resistencia a la compresión de una muestra de bloques debe ser 1 000 libras por pulgada cuadrada (psi). Si dos compañías envían muestras de bloques que tienen resistencias superiores a la mínima (1 000 psi), entonces las especificaciones estipulan que debe tomarse una de dos acciones: 1) Si se aplica una prueba estadística a los resultados muestrales que indica que ambas muestras pueden venir de poblaciones iguales, o idénticas, el contrato para los bloques se dividirá por igual. 2) Si las estadísticas muestrales indican que comprende dos poblaciones, al fabricante que envíe los bloques con resistencia a la compresión más alta se le adjudicará el contrato.

Supóngase que los bloques de concreto de la Stanblock Company y de la Hicompressive Company se seleccionaron aleatoriamente para pruebas. Antes de que se pruebe la resistencia a la compresión de los bloques, se plantearán las hipótesis nula y alternativa, se seleccionará un nivel de significación, se decidirá qué prueba estadística es adecuada, y se formulará una regla de decisión.

Paso 1. Hipótesis nula La hipótesis nula es que *no* hay diferencia entre las resistencias medias a la compresión de los bloques de concreto que manufactura Stanblock Company y la de los bloques que fabrica Hicompressive Company. Por tanto, constituyen una sola población coincidente, de bloques de concreto. La hipótesis alternativa, H_1, es que *hay* una diferencia significativa entre las dos resistencias medias a la compresión. Simbólicamente:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Como la hipótesis alternativa no especifica dirección (como que la resistencia media a la compresión de los bloques de Stanblock es mayor que la media de los bloques de Hicompressive), se usará una prueba de dos colas.

Paso 2. Nivel de significación Se elige 0.01 de significación. Esto equivale a decir que la probabilidad de cometer un error de Tipo I es 0.01.

Paso 3. Prueba estadística Se seleccionarán aleatoriamente cuando menos 30 bloques, (n_1), de los bloques de la Stanblock Company, y al menos 30 de la Hicompressive, (n_2). Como se observó con anterioridad, cuando n_1 y n_2 es 30 o más, se considera que las muestras son grandes, y puede aplicarse la prueba z como prueba de significación. El proceso de selección también cumple con otro supuesto en que se basa la prueba z, es decir, independencia. Esto significa que la selección de un bloque de concreto de ninguna manera afecta la selección de otro bloque. En la prueba z se supone que los datos al menos están en escala de intervalos. Por supuesto, cualquiera de las dos poblaciones podría designarse como número uno. Sin embargo, una vez que se designa una población particular con el número uno, debe seguirse denominando así.

La teoría en que se basa la distribución muestral de z (el valor crítico) se expondrá brevemente. En parte esta teoría estipula que:

> Si un número grande de muestras aleatorias independientes se selecciona de dos poblaciones, la distribución de las diferencias entre las dos medias dividida entre el error estándar de la diferencia entre las dos medias (el valor crítico) se aproximará a una distribución normal.

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}} \quad \text{o bien} \quad \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Diferencia entre dos medias muestrales

Error estándar de la diferencia entre las dos medias

Para ilustrar esta teoría, supóngase que se han tomado muchas muestras de tamaño 100 de la Stanblock Company, y muchas muestras de 100 bloques de la Hicompressive Company. Con fines de simplificación, considérese que se calcula que la desviación estándar de cada muestra es 20 psi. Calcule después los valores z:

Muestra	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$\dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}}$	z
1	1 020	1 020	0	$\frac{0}{2.8} =$	0
2	1 022	1 020	+2	$\frac{+2}{2.8} =$	+0.71
3	1 030	1 021	+9	$\frac{+9}{2.8} =$	+3.21
4	1 018	1 021	−3	$\frac{-3}{2.8} =$	−1.07

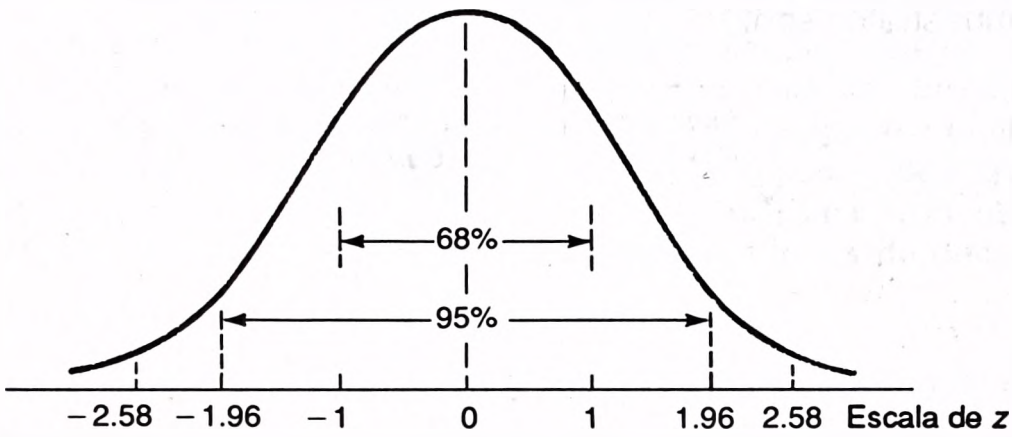
Así, en teoría, si las dos medias poblacionales son iguales y si los valores z de 0, +0.71, +3.21, −1.07, etc., se grafican, la distribución de estos valores z se aproximaría a una distribución normal.

Las áreas bajo la curva normal (apéndice D) revelan que aproximadamente 68% de los valores z quedarían dentro de 0 ± 1.0; alrededor de 95% dentro de 0 ± 1.96; y aproximadamente 99% dentro de 0 ± 2.58 (véase el diagrama 9-6).

Paso 4. La regla de decisión Se mostró que aproximadamente 99% de los valores z calculados estarán entre −2.58 y +2.58 bajo el supuesto de que no hay diferencia entre las medias de las dos poblaciones. Recuérdese que se seleccionó el nivel de significación 0.01. Se utilizará una prueba de dos colas (debido a que la hipótesis alternativa H_1 no indica que la resistencia media a la compresión de los bloques de una compañía es mayor que la resistencia media a la compresión de los bloques producidos por la otra). Entonces, si el valor z calculado no queda dentro

DIAGRAMA 9-6

Distribución de z cuando $\mu_1 - \mu_2 = 0$

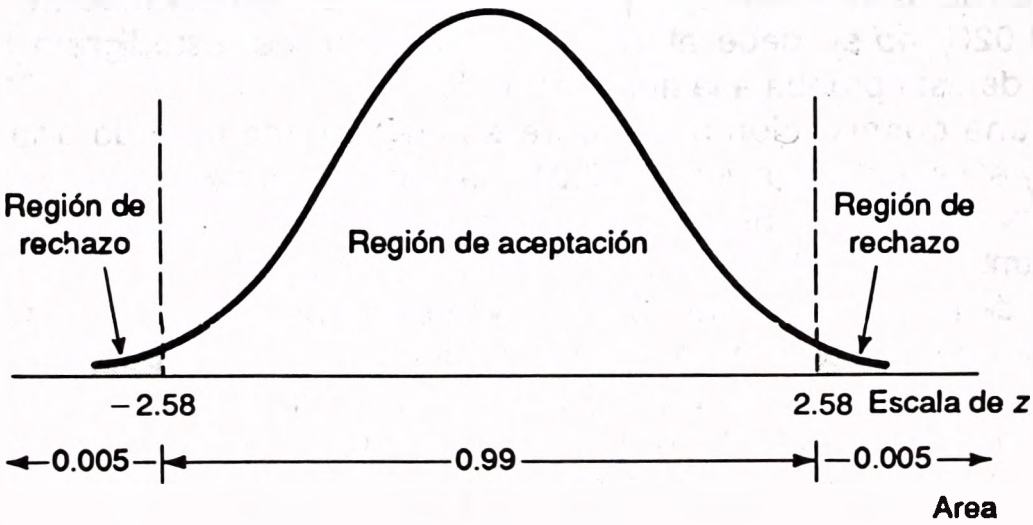


de la región entre más y menos 2.58, se *acepta* la hipótesis nula. Se concluiría que la diferencia entre las dos medias muestrales se debe al azar.

Si el valor z calculado es mayor que 2.58, se *rechaza* la hipótesis nula. La hipótesis nula se rechazaría con base en que es sumamente improbable que un valor z calculado pudiera ser 2.58 o mayor debido *al azar*. Por supuesto, H_0 también se rechaza si el valor z calculado está a la izquierda de −2.58. Esta regla de decisión se representa en el diagrama 9-7.

DIAGRAMA 9-7

Prueba de dos colas, áreas de aceptación y de rechazo, con un nivel de riesgo de 0.01



Paso 5. Los resultados muestrales y la decisión Se seleccionaron aleatoriamente un total de 81 bloques de la producción de la Stanblock Company, y se determinó la resistencia a la compresión de cada uno. Se calcularon la desviación estándar de la muestra y dicha resistencia. Se seleccionaron aleatoriamente 64 bloques de la Hicompressive Company y se siguió el mismo procedimiento. Las estadísticas muestrales son:

Stanblock Company	*Hicompressive Company*
$\overline{X}_1 = 1\,070$ psi	$\overline{X}_2 = 1\,020$ psi
$n_1 = 81$	$n_2 = 64$
$s_1 = 63$ psi	$s_2 = 57$ psi

El estadístico de prueba calculado (z) es 5.01, que se obtuvo mediante:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}} = \frac{1{,}070 - 1{,}020}{\sqrt{\left(\frac{63}{\sqrt{81}}\right)^2 + \left(\frac{57}{\sqrt{64}}\right)^2}} = \frac{50}{\sqrt{99.765625}} = 5.01$$

o bien

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{1{,}070 - 1{,}020}{\sqrt{\frac{(63)^2}{81} + \frac{(57)^2}{64}}} = \frac{50}{9.98827} = 5.01$$

El valor z calculado de 5.01 queda en el área de rechazo. La hipótesis nula, H_0, se *rechaza* al nivel 0.01, y la hipótesis alternativa, H_1, se acepta. Esto indica que $\mu_1 \neq \mu_2$. Así, se concluye que la media poblacional de la resistencia a la compresión de los bloques de Stanblock Company *no* es igual a la media poblacional de los bloques de Hicompressive Company. La diferencia en las medias muestrales (1 070 y 1 020) *no* se debe al azar. Es obligación del estadígrafo informar los resultados de esta prueba a la administración.

Cabe una observación final sobre este problema usando una prueba de dos colas y el nivel de significación 0.01. Hay dos áreas de rechazo, una arriba de +2.58 y otra abajo de −2.58. Se ilustran en el diagrama 9-7. Así, la hipótesis nula, $\mu_1 = \mu_2$, también se rechazaría al nivel de significación 0.01 si se calculara que el estadístico de prueba (z) fuera −5.01 en vez de +5.01. Es decir, la hipótesis nula también se rechazaría si las resistencias medias a la compresión estuvieran al revés, y los bloques de Stanblock Company tuvieran una media de 1 020 y los bloques de Hicompressive 1 070 [de ahí que (1 020 − 1 070)/9.98827 = −5.01]. Independientemente de si z es +5.01 o −5.01, se aceptaría la hipótesis alternativa $\mu_1 \neq \mu_2$.

AUTOEXAMEN 9-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Fatear es un producto químico diseñado específicamente para añadir peso al maíz durante la estación de crecimiento. Se trataron con Fatear terrenos alternados durante la estación de crecimiento. Para determinar si el producto fue o no eficaz, se seleccionaron aleatoriamente 400 mazorcas de maíz que recibieron el tratamiento Fatear. Cada mazorca se pesó, y se calculó que el peso medio es de 16 onzas, con una desviación estándar de 1 onza. De igual manera, se pesaron 100 mazorcas de maíz no tratado. La media fue de 15.2 onzas, y la desviación estándar fue de 1.2 onzas.

1. Utilizando una prueba de una cola y el nivel 0.05, ¿es posible decir que Fatear actúa eficazmente para dar más peso al maíz?
2. Muestre la regla de decisión gráficamente.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. La Fuerza Aérea de Estados Unidos (USAF) entrena a personal de computación en dos bases: Cass AFB, y Kingston AFB, y se aplica un examen final común. Como parte de un estudio existente sobre el programa de entrenamiento, se compararán las calificaciones finales de las pruebas. ¿Hay alguna diferencia significativa en los resultados finales de los dos programas educativos? Utilice una alfa de 0.04.
   a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
   b. ¿Cuál es el nivel de significación?
   c. Muestre la regla de decisión en forma de diagrama.
   d. Las muestras aleatorias de las calificaciones de las pruebas revelaron que:

	Cass AFB	*Kingston AFB*
Número muestreado	40	50
Calificación media	114.6	117.9
Desviación estándar de la muestra	9.1	10.4

   Tome una decisión. Explique su decisión al comité que estudia el programa.
6. Corrigan Industries ganó un contrato grande para abastecer de partes de tubería a la compañía Angus Oil, que realiza perforaciones petroleras en el área de Escocia-Irlanda. En el pasado, dos subcontratistas especializados en productos de acero abastecían a la cía. industrial con productos de alta calidad como tuercas, pernos, barras de acero y revestimientos. Una de las preocupaciones de Corrigan es el tiempo de entrega de los dos subcontratistas, Jackson Steel y Alabama Distributors. La cuestión a explorar es si hay una diferencia en los tiempos de entrega de los dos subcontratistas.

   Muestras aleatorias tomadas de los archivos de Corrigan revelaron las siguientes estadísticas sobre tiempos de entrega:

	Jackson Steel	*Alabama Distributors*
Número en la muestra	45	50
Tiempo medio de entrega (días)	20	21
Desviación estándar de la muestra (días)	4	3

a. Escriba un informe estadístico sobre su procedimiento para resolver el problema. Incluya las hipótesis nula y alternativa, el nivel de significación que seleccionó, los cálculos, etc.
b. Explique su decisión a Corrigan Industries.

7. El motor Smith-Green se usará en herramientas motorizadas a ensamblar tanto en el primero como en el segundo turnos de trabajo, y se requiere atención crítica y mucho cuidado para que el motor tenga condiciones de operación óptimas. Debido a las quejas en aumento sobre el funcionamiento del motor, se hace una revisión de los registros de control de calidad acerca de la velocidad (rpm) del motor, que se inspeccionaron en ambos turnos durante la semana pasada. Tales registros indican que 64 unidades del primer turno tienen un valor promedio de 2 175 rpm, con una desviación estándar de 12, y que 36 unidades del segundo turno tienen un valor promedio de 2 050, con una desviación estándar de 20. Debido a que la compañía desea dedicar los esfuerzos de análisis de la manera más productiva posible, se interesa en determinar si hay, o no, una diferencia suficiente entre los valores del primer y segundo turnos para concentrar los esfuerzos en esta área. La empresa está dispuesta a asumir un riesgo de 10% de no reconocer cuando hay una diferencia significativa.
   a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
   b. Pruebe la diferencia de turnos en $\alpha = 0.10$.
   c. ¿Qué decisión estadística debe tomarse? ¿Qué recomendaciones habría para la administración?
8. Se realizó un estudio sobre los ingresos anuales de ciertos vigilantes judiciales en áreas metropolitanas de menos de 100 000 habitantes y en áreas metropolitanas de más de 500 000. A continuación se presentan algunas estadísticas muestrales:

Estadística de la muestra	*Población de menos de 100 000*	*Población de más de 500 000*
Tamaño de la muestra	45	60
Media muestral	$21 290	$21 330
Desviación estándar de la muestra	$ 1 060	$ 1 900

Pruebe la hipótesis de que los ingresos anuales de tales personas en áreas con una población de más de 500 000 es significativamente mayor que los que se pagan en áreas de menos de 100 000 habitantes. Se sugiere seguir un enfoque sistemático al plantear las hipótesis nula y alternativa, la prueba estadística que se usará, y así sucesivamente.

ERRORES TIPO II, CURVAS CARACTERISTICAS DE OPERACION Y CURVAS DE PODER (O PODER DISCRIMINADOR)

Errores Tipo II

Recuérdese que un error de Tipo I, que también se denomina riesgo alfa de una prueba estadística, *es el riesgo de rechazar la hipótesis cuando en realidad es*

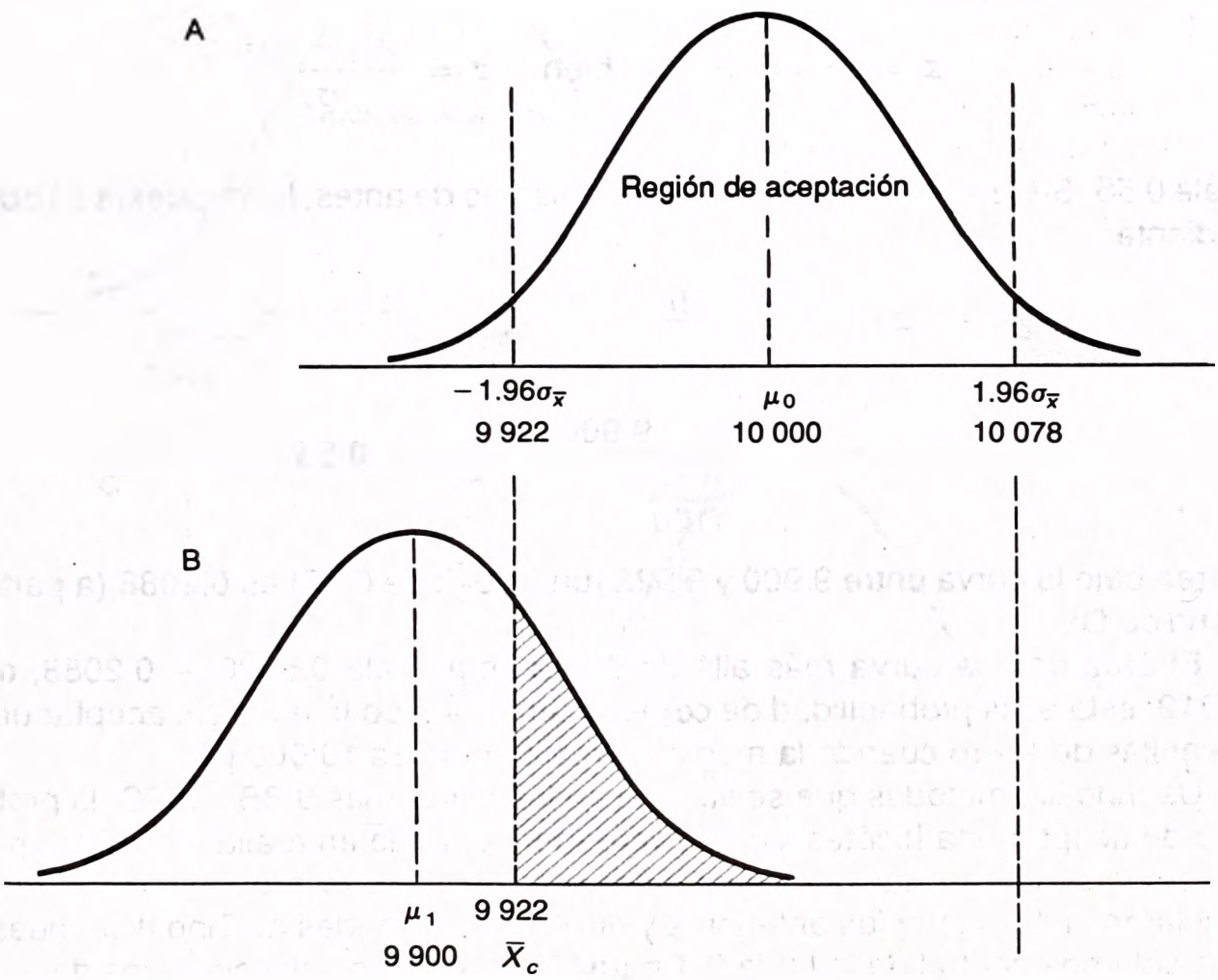
verdadera. Este riesgo es igual al nivel de significación seleccionado. Como se observó, los niveles que por lo general se usan son 0.05, 0.01 y 0.10.

El error tipo II, que se denota mediante β, *es la probabilidad de aceptar la hipótesis como verdadera cuando en realidad no lo es*. Para ilustrar el cálculo de la probabilidad de cometer un error Tipo II, supóngase que un fabricante compra varillas de acero para hacer pasadores de chaveta. La experiencia ha revelado que la verdadera resistencia media a la tensión de todos los envíos que llegan es 10 000 psi (lb/plg^2) y la desviación estándar (σ) 400 psi.

Para tomar una decisión acerca de las remesas de varillas de acero, la empresa plantea esta regla que debe seguir el inspector de control de calidad: "Tómese una muestra de 100 piezas de varillas de acero. Si la resistencia media ($\overline{X}$) queda entre 9 922 psi y 10 078 psi, se acepta el lote. De otra manera, el lote se rechazará". Véase el diagrama 9-8 y la gráfica A. Esta muestra la región de aceptación y las regiones de rechazo. La media de esta distribución se denota mediante μ_0. Las colas de la curva representan la probabilidad de cometer un error Tipo I, esto es, rechazar el lote recibido de varillas cuando en realidad todo el conjunto es bueno, con una media de 10 000 psi.

DIAGRAMA 9-8

Gráficas para los errores Tipo I y Tipo II



¿Cómo se calcula la probabilidad de un error de Tipo II? (Recuérdese que es la probabilidad de aceptar un "lote bueno" cuando en realidad la media no es de 10 000 psi.)

✱ Ejemplo

Considérese que la media desconocida del lote recibido, denotada μ_1, en realidad es de 9 900 psi. ¿Cuál es la probabilidad de que el inspector de control de calidad se equivoque al rechazar la remesa (un error Tipo II)?

✔ Solución

La probabilidad de cometer un error Tipo II, que se represente con el área rayada en el diagrama 9-8, gráfica B, puede calcularse determinando el área bajo la curva normal que se encuentra arriba de 9 922 libras. El cálculo de las áreas bajo la curva normal se analizó en el capítulo 7. Haciendo un breve repaso, primero es necesario determinar la probabilidad de que la media muestral quede entre 9 900 y 9 922. Después se resta esta probabilidad de 0.5000 (que representa toda el área más allá de la media de 9 900) a fin de especificar la probabilidad de cometer un error Tipo II.

Recuérdese que el número de unidades estándares (valores z) entre la media del lote recibido (9 900), denotado mediante μ_1 y $\overline{X}_c$ y que representa el valor crítico para 9 922, se calcula mediante:

$$z = \frac{\overline{X}_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{o bien} \quad z = \frac{\overline{X}_c - \mu_1}{\sigma_x}$$

z vale 0.55. Suponiendo que n y σ son las mismas de antes, la respuesta se obtiene mediante:

$$z = \frac{\overline{X}_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{9\,922 - 9\,900}{\frac{400}{\sqrt{100}}} = \frac{22}{40} = 0.55$$

El área bajo la curva entre 9 900 y 9 922 (un valor z de 0.55) es 0.2088 (a partir del apéndice D).

El área bajo la curva más allá de 9 922 libras vale 0.5000 − 0.2088, o sea 0.2912; esta es la probabilidad de cometer un error Tipo II, es decir, aceptar un lote de varillas de acero cuando la media en realidad no es 10 000 psi.

Usando los métodos que se ilustran en los diagramas 9-8B y 9-9C, la probabilidad de aceptar una hipótesis como verdadera cuando en realidad es falsa puede determinarse para cualquier valor particular de μ_1. Las probabilidades que se calcularon en los ejemplos anteriores y otras probabilidades de Tipo II se muestran en la columna central de la tabla 9-1 para varios valores seleccionados de μ.

AUTOEXAMEN 9-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Supóngase que la media verdadera de un lote recibido de varillas de acero es 10 120 psi. ¿Cuál es la probabilidad de que el inspector de control de calidad acepte los productos como si tuvieran una media de 10 000 psi? (Parecería incongruente que se rechacen las varillas de acero si la resistencia a la tensión es más alta que lo especificado. Sin embargo, puede ser que el pasador de chaveta tenga una función doble en un motor náutico fuera de borda. Puede estar diseñado para que no se rompa por cizallamiento si el motor choca contra un objeto pequeño, pero para que se rompa si golpea contra una roca. Por tanto, el acero no debe ser *demasiado resistente*.)

El área rayada en el diagrama 9-9C representa la probabilidad de aceptar falsamente la hipótesis de que la resistencia media a la tensión del lote recibido es 10 000 psi. ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error Tipo II?

DIAGRAMA 9-9

Errores Tipo I y Tipo II

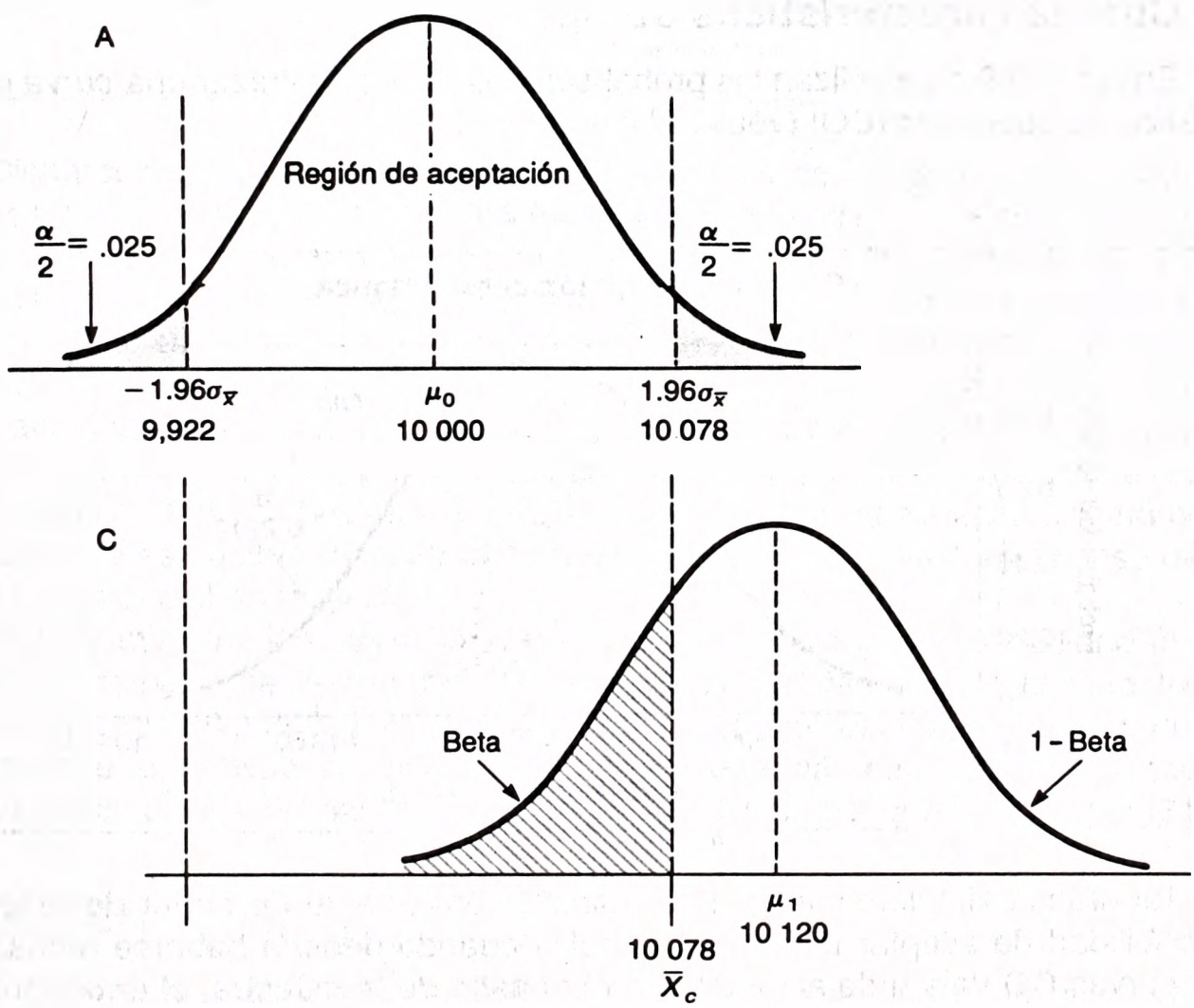


TABLA 9-1

Probabilidades de un error Tipo II y funciones de poder para μ_0 = 10 000 libras y medias alternativas seleccionadas, nivel de significación de 0.05

Medias alternativas seleccionadas (libras)	*Probabilidad de un error Tipo II (β)*	*Probabilidad de no cometer un error Tipo II ($1 - \beta$)*
9 820	0.0054	0.9946
9 880	0.1469	0.8531
9 900	0.2912	0.7088
9 940	0.6736	0.3266
9 980	0.9265	0.0806
10 000	—*	—
10 020	0.9265	0.0806
10 060	0.6736	0.3266
10 100	0.2912	0.7088
10 120	0.1469	0.8531
10 180	0.0054	0.9946

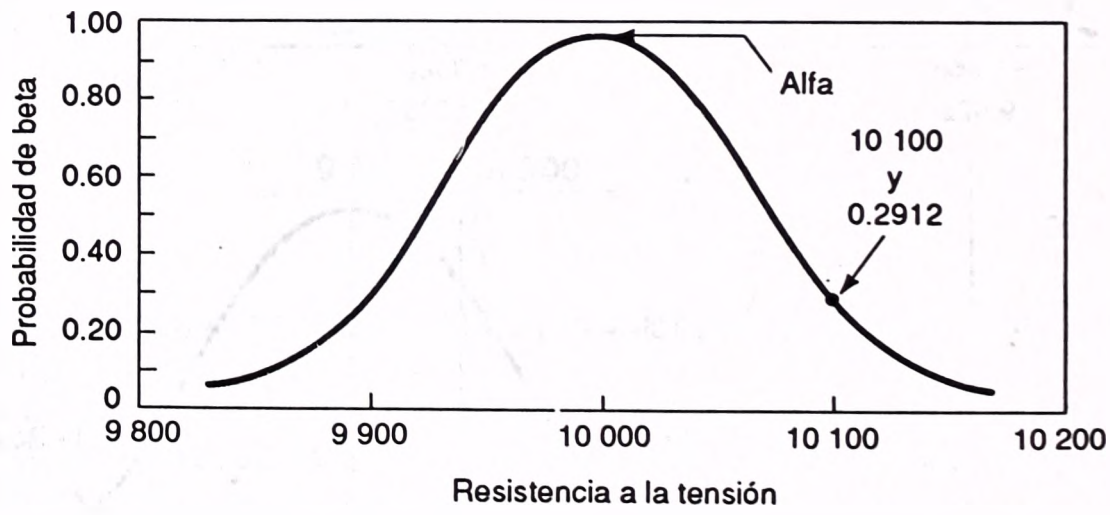
* No es posible cometer un error de Tipo II cuando $\mu = \mu_0$.

Curvas características de operación

En la tabla 9-1 se utilizan las probabilidades beta para trazar una *curva característica de operación* (CO) (véase el diagrama 9-10).

DIAGRAMA 9-10

Curva de operación característica

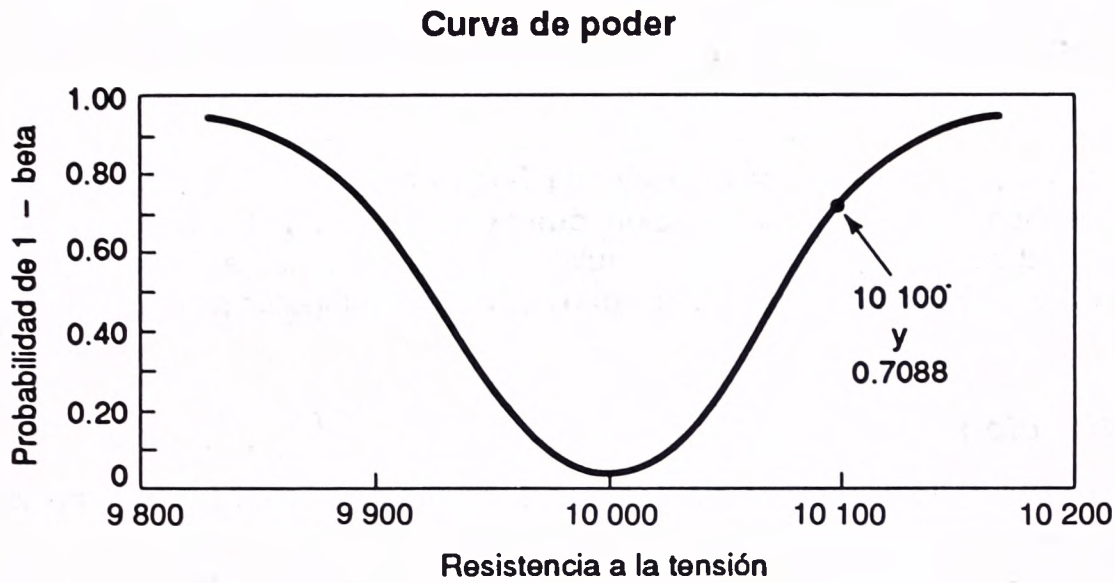


Tal gráfica simplemente es una manera conveniente de poner de relieve la probabilidad de aceptar una hipótesis falsa cuando debería haberse rechazado. Las curvas CO varían de acuerdo con el tamaño de la muestra, el error estándar de la media y el nivel de significación seleccionado.

Curvas de poder (o poder discriminador)

Véase la tabla 9-1, la tercera columna simplemente representa la probabilidad de *no* cometer un error Tipo II, esto es, 1 − β. Estas probabilidades son la base para la *curva de poder* que se muestra en el diagrama 9-11.

DIAGRAMA 9-11



Dicha curva sólo es una representación gráfica de las probabilidades de no cometer un error Tipo II. El conjunto de probabilidades de 1 − β en la columna 3 de la tabla 9-1 se denomina *función de poder* de la prueba. Cuanto más altas sean las probabilidades, tanto mayor será la aptitud discriminadora de la prueba. Para explicar esto, supóngase que la resistencia media a la tensión del envío recibido de varillas de acero es 9 880 libras por pulgada cuadrada (psi). Si se probara la resistencia a la tensión en un número grande de muestras de 100 varillas, aproximadamente 85.31% de las muestras proporcionarían la decisión correcta de rechazar el envío recibido. Debe observarse que cuando disminuye o aumenta ligeramente la media, no es posible detectar el cambio tan fácilmente como en el caso de un cambio sustancial en la media.

Si la administración desea una mayor discriminación, una posibilidad es aumentar el tamaño de la muestra. Supóngase que el tamaño de la muestra se incrementa de 100 a 200, y la probabilidad 1 − β se calcula que es 0.9200. Puede decirse que la muestra de tamaño 200 proporciona más potencia para descubrir que la media del envío recibido no es 10 000 psi (debido a que 0.9200 0.8531).

RESUMEN

Las dos clases de problemas que se consideraron en este capítulo exigen que la muestra, o las muestras, seleccionadas sean grandes (de 30 o más). Las pruebas también pueden

usarse siempre que la población bajo estudio esté distribuida normalmente con una desviación estándar conocida. La primera prueba de hipótesis implica determinar si una media poblacional hipotética, μ, es razonable.

El segundo tipo de problema de prueba de hipótesis se refiere a dos medias. La prueba puede ser de *dos colas* o de *una extremidad*. Si es de dos, la *hipótesis nula* plantea que $\mu_1 = \mu_2$ la *hipótesis alternativa* es $\mu_1 \neq \mu_2$. La hipótesis nula y la hipótesis alternativa para una prueba de una cola se expresan como sigue:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{array}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{array}}$$

Son posibles dos errores de decisión: de Tipo I y de Tipo II. La probabilidad de un error de Tipo I es igual al nivel de significación, que se selecciona antes de iniciar la prueba. Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera. Un error de Tipo II es lo contrario, esto es, la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando en realidad es falsa.

Recapitulación

I. El objetivo de la prueba de hipótesis es comprobar la validez de afirmaciones según un parámetro poblacional.

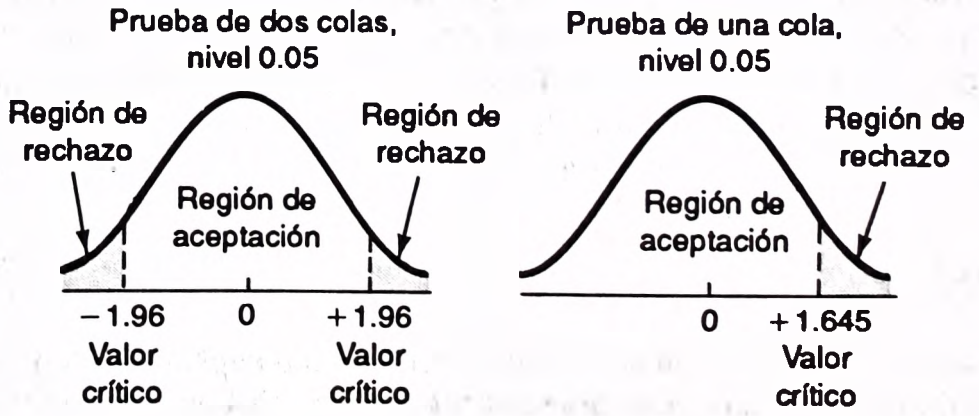
II. Los procedimientos que se utilizan en la *prueba de hipótesis* son:

A. Plantear la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1.

B. Seleccionar el nivel de significación. Los niveles de 0.10, 0.05 y 0.01 son tres de los que se usan por lo general. Es la probabilidad de rechazar una hipótesis verdadera y es el error Tipo I.

C. Decidir acerca del estadístico de prueba. Se aplica la distribución normal estándar usando la estadística de prueba z para problemas con muestras grandes.

D. Plantear la regla de decisión. Con base en la distribución muestral, pueden identificarse un área de aceptación y una de rechazo. En los siguientes diagramas se muestran las áreas mencionadas para una prueba de dos colas y una prueba de una cola para las que se aplicará la prueba con z. Si se aplica una prueba de dos colas, la regla de decisión plantea que si el valor calculado de z queda entre más y menos 1.96, se acepta la hipótesis nula. De otra manera se rechaza. (Véase el diagrama de la izquierda.)



E. Tomar una muestra y adoptar una decisión. Si el valor del estadístico de prueba z calculado queda en el área de aceptación, no se rechaza H_0. De otra manera se rechaza H_0 y se acepta H_1.

III. Prueba de una hipótesis sobre la media poblacional.

A. *Ejemplo.* El censo de 1980 reveló que la edad media de la población en una región es 41.3 años. ¿Ha cambiado desde entonces la edad media?

B. *Fórmula para z.* Si se conoce la desviación estándar de la población, σ.

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Si no se conoce σ se sustituye la desviación estándar de la muestra, s, cuando puede esperarse razonablemente que s se aproxime a σ.

IV. Prueba de hipótesis: dos medias, muestras grandes.

A. *Objetivo.* Utilizando los procedimientos usuales de prueba de hipótesis, determinar si existe o no una diferencia entre dos medias poblacionales usando muestras grandes (de 30 o más).

B. *Fórmula para z*:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2}} \quad \text{o bien} \quad \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

V. Errores de Tipo I y Tipo II.

A. Un error de Tipo I, denotado mediante α, es igual al nivel de significación seleccionado. Un error Tipo I de 0.05 es la probabilidad de que una hipótesis nula verdadera se rechace.

B. Un error Tipo II, denotado mediante β, es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula como verdadera cuando en realidad no lo es.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Una persona cree que las latas de 16 onzas de piña se están llenando en exceso. El departamento de control de calidad tomó una muestra aleatoria de 50 envases y encontró que el peso medio aritmético es de 16.05 onzas, con una desviación estándar de la muestra de 0.03 onzas. En el nivel de significación de 5%, ¿puede rechazarse la hipótesis de que el peso medio es igual a 16 onzas?

10. Un Consejo de Educación desea considerar un nuevo programa académico que patrocina el Departamento de Educación de Estados Unidos. Para que se considere la solicitud de fondos federales, el ingreso medio aritmético por familia no debe ser de más de $15 000 (dólares). El consejo contrató a una empresa de investigación para reunir los datos necesarios. En su informe, la firma indicó que el ingreso medio aritmético en el área es de $17 000. Además se señaló que se estudiaron 75 familias y que la desviación estándar de la muestra es $3 000. ¿Es posible que el consejo discuta que la diferencia entre el ingreso medio resultante de la investigación muestral y la media especificada por el Departamento de Educación se deba al azar (muestreo)? Especifique la evidencia. Utilice el nivel 0.05.

11. Durante los últimos años, las encuestas de ciudadanos de Estados Unidos que regresan de vacaciones en el extranjero (de 21 días o menos) indicaron que gastan, en promedio, $1 010 (dólares) en artículos como recuerdos, alimentos y gastos de viaje. Un estudio reciente de tamaño 400 realizado por una organización de investigaciones, dio como resultado una media muestral de $1 250 y una desviación estándar de la muestra de $205. Pruebe la hipótesis de que μ = $1 010; es decir, ¿puede atribuirse al muestreo la diferencia en las dos medias, o ha habido un alza reciente en la cantidad media de los gastos? Utilice el nivel 0.01. Se sugiere seguir un alcance sistemático para plantear la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, la prueba estadística que se usará, y así sucesivamente.
12. El Servicio de Salud Pública de Estados Unidos da a conocer las *Annual Data Tabulations, Continuous Air Monitoring Projects*, que indican que una ciudad grande del medio oeste tiene un nivel medio anual de dióxido de azufre de 0.12 (concentración en partes por millón). Suponga que con la finalidad de reducir esta concentración excesivamente alta, muchas fábricas de acero y otras industrias instalaron equipo anticontaminante. En 900 comprobaciones aleatorias que se realizaron el año pasado, se encontró que la media muestral fue 0.09 y la desviación estándar de la muestra 0.03. Evalúe los esfuerzos de estas industrias. Utilice el nivel 0.05.
13. Después de muchas pruebas, se adoptó una pintura oficial ("Trópico") para regiones tropicales lluviosas. Se han continuado las pruebas de laboratorio rociando agua sobre paneles de prueba pintados con ese producto. Los registros indican que, en promedio, la pintura soporta 200 000 toneladas de agua antes de perder su color. Se calculó que la desviación estándar de muchos de los paneles probados es de 12 000 toneladas de agua. La Painto Manufacturing Company afirma que su pintura tropical ("Painto II") es tan buena como la pintura oficial, e incluso mejor. Se probó este producto pintando 144 tiras y aplicando la prueba común de agua. La cantidad media aritmética de agua rociada en los paneles antes de que perdieran el color fue de 190 000 toneladas. Aunque Painto II no soportó bien el promedio de 200 000 toneladas, el fabricante de Painto II afirma que tal diferencia probablemente se debe al muestreo. Utilice el nivel 0.05 y acepte o rechace esta afirmación.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Los propietarios de Franklin Park Mall están estudiando los hábitos de compra de sus clientes. A partir de estudios anteriores, los propietarios tienen la impresión de que un cliente común pasa 0.75 horas en el centro comercial, con una desviación estándar de 0.10 horas. Recientemente los propietarios del centro comercial lo han ampliado incluyendo algunos restaurantes de especialidades diseñados para mantener más tiempo a los clientes en el centro comercial. Se ha contratado a una firma consultora, para evaluar los efectos de los restaurantes. Una muestra de 45 clientes que se estudió reveló que el tiempo medio de permanencia en el centro comercial aumentó a 0.80 horas.
   a. Elabore una prueba de hipótesis para determinar si el tiempo medio de permanencia en el centro comercial es más de 0.75 horas. Utilice el nivel de significación de 0.05.
   b. Suponga que el tiempo medio de compras en realidad aumentó de 0.75 a 0.77 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que este incremento no fuera detectado?
   c. Cuando la empresa presentó la información dada en *b* a los propietarios del centro comercial, les alteró la afirmación de que una investigación no podría detectar un

cambio de 0.75 a 0.77 horas de tiempo de compras. ¿Cómo podría reducirse esta probabilidad?

2. Se proporcionan las siguientes hipótesis nula y alternativa:

$$H_0: \mu = 50$$
$$H_1: \mu > 50$$

Suponga que la desviación estándar de la población es 10. Se fija la probabilidad de un error de Tipo I en 0.01 y la probabilidad de un error de Tipo II en 0.30. Considere que la media poblacional cambia de 50 a 55. ¿Qué tan grande debe ser una muestra para cubrir estos requisitos?

EXAMEN CAPITULO 9

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. La experiencia con un neumático con banda de acero que produce Cooper Tire and Rubber indica que, en promedio (media), se pueden recorrer 40 000 millas con un neumático tal antes de que se necesite cambiarlo. En un esfuerzo por incrementar aún más el rendimiento, se rediseñó la cara de rodadura y se hicieron otros cambios. Se probaron 100 neumáticos utilizando maquinaria para prueba acelerada. Se encontró que el rendimiento promedio es de 43 000 millas, y la desviación estándar de la muestra, 2 000 millas. Utilice el nivel 0.10 de significación, determine si hay o no un incremento significativo en el rendimiento medio.
   a. Plantee la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.
   b. ¿La prueba que se utiliza es de una cola o de dos colas? Explique su respuesta.
   c. ¿Cuál es el valor crítico?
   d. Tome una decisión. Explique el razonamiento en que se basa tal decisión.
2. Una muestra aleatoria de tamaño 100 de empresas manufactureras grandes indicó que la edad media del presidente de la compañía en el momento en que llegó a ser presidente es de 47 años. De manera semejante, una muestra aleatoria de 80 firmas manufactureras de tamaño medio reveló una edad promedio de 45 años. Las desviaciones estándares de las dos muestras son, para las compañías grandes, de 15 años, y para las de tamaño medio, de 5 años.

   H_0: No hay una diferencia significativa en las edades medias.
   H_1: Hay una diferencia significativa en las edades medias.

   a. ¿Se utiliza una prueba de una o de dos colas? Explique su respuesta.
   b. Al demostrar la hipótesis nula en el nivel 0.05, ¿cuál es el valor crítico?
   c. Tome una decisión. Explique su respuesta.
   d. ¿Podría suponerse razonablemente que la diferencia de dos años se debe a variación muestral?

Autoexámenes

9-1 1. $H_0: \mu = 6.0$. $H_1: \mu \neq 6.0$.

2. 0.05.

3. $$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

4. Aceptar la hipótesis nula si el valor z calculado queda entre -1.96 y $+1.96$. De otra manera, rechazarla.

5. Sí; $z = -2.56$, que se obtiene mediante:

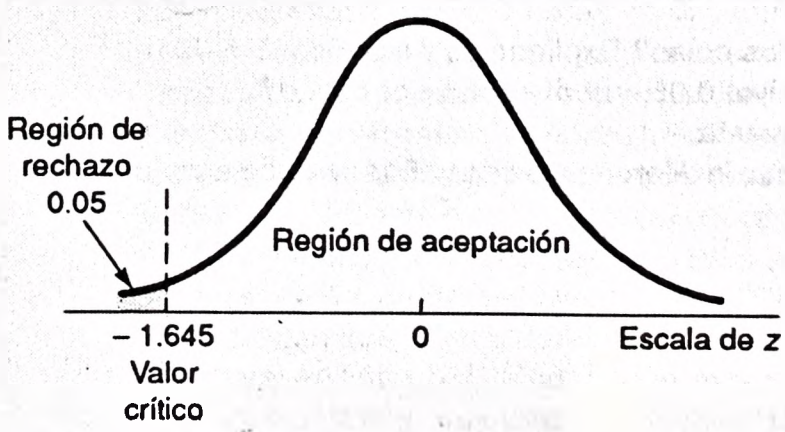
$$\frac{5.84 - 6.0}{\frac{0.5}{\sqrt{64}}} = \frac{-0.16}{0.0625} = -2.56$$

Rechazar H_0 en el nivel 0.05. Aceptar H_1. La tasa media del volumen de ventas no es igual a 6.0.

9-2 1. $H_0: \mu = 6.0$.

2. $H_1: \mu < 6.0$.

3. Observe que el signo de desigualdad (<) en la hipótesis alternativa apunta en la dirección de la región de rechazo. Para determinar el valor crítico: $0.5000 - 0.05 = 0.4500$. Se tiene que z, del apéndice D, es aproximadamente 1.645 (en realidad -1.645).



9-3. 1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$. $H_1: \mu_1 > \mu_2$. H_0 se rechaza si se calcula que z es > 1.645.

Fatear es eficaz. El valor calculado de z es 6.15, que se obtiene mediante:

$$z = \frac{16.0 - 15.2}{\sqrt{\frac{(1)^2}{400} + \frac{(1.2)^2}{100}}}$$

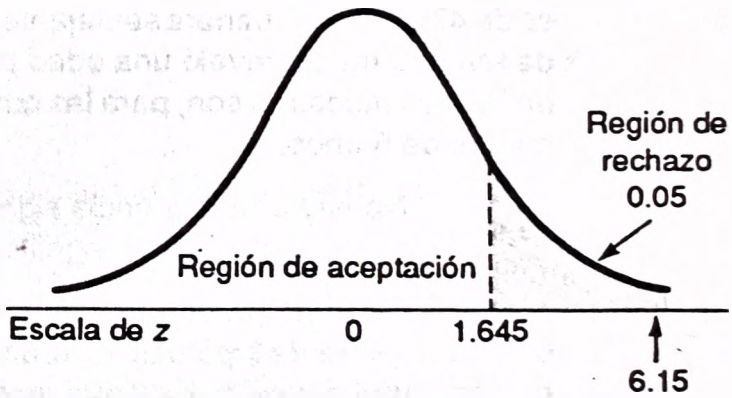
$$= \frac{0.8}{\sqrt{0.0025 + 0.0144}}$$

$$= \frac{0.8}{0.13}$$

$$= 6.15$$

Como $6.15 > 1.645$ (valor crítico), se rechaza la hipótesis nula de $\mu_1 = \mu_2$; la hipótesis alternativa, $\mu_1 > \mu_2$, se acepta.

2.



9-4 0.1469, que se obtiene determinando el área bajo la curva entre 10 078 y 10 120 (Diagrama 9-9C).

$$z = \frac{\overline{X}_c - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{10\,078 - 10\,120}{\frac{400}{\sqrt{100}}}$$

$$= -1.05$$

El área bajo la curva para un valor z de -1.05 es 0.3531 (apéndice D); y $0.5000 - 0.3531 = 0.1469$, que es el área entre 10 078 y 10 120.

Examen capítulo 9

1. a. H_0: $\mu = 40\,000$.
   H_1: $\mu > 40\,000$.
   b. De una cola, debido a que la hipótesis alternativa indica una dirección.
   c. 1.28.
   d. $z = 15$, que se obtiene mediante:

$$z = \frac{43\,000 - 40\,000}{\frac{2\,000}{\sqrt{100}}}$$

   Rechazar la hipótesis nula (ya que 15 es mayor que 1.28). Es muy poco probable que el rendimiento medio sea 40 000. Puede concluirse que el nuevo neumático desarrollado no dura más, en promedio, que los neumáticos anteriores.
2. a. La prueba es de dos colas debido a que H_1 no indica una dirección (como: la edad promedio de los presidentes de grandes empresas es *mayor que* la media para los presidentes de empresas medias).
   b. Más o menos 1.96, que se obtiene determinando el valor z para el área bajo la curva asociada con 0.4750.
   c. Aceptar la hipótesis nula en el nivel 0.05. El valor z calculado es aproximadamente 1.25, que se obtiene mediante:

   El valor z calculado de 1.25 queda en el área de aceptación, cuya ubicación se define entre +1.96 y −1.96.
   d. Sí.

10

Pruebas de hipótesis: proporciones

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Definir una proporción.
2. Demostrar una hipótesis acerca de una proporción poblacional.
3. Demostrar una hipótesis acerca de dos proporciones poblacionales.

En el capítulo 9 se inició el estudio de las pruebas de hipótesis. Recuérdese que una *hipótesis* es una afirmación, o supuesto, que se hace acerca de un parámetro de población desconocido, como la media poblacional. El procedimiento que se sigue para finalmente tomar una decisión sobre la hipótesis nula se denomina *prueba de hipótesis.* El método incluye plantear las hipótesis nula y alternativa, seleccionar un nivel de significación, o significancia, elegir la prueba estadística, formular una regla de decisión, tomar una muestra de la población o poblaciones, calcular estadísticas muestrales y, con base en estas estadísticas, adoptar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula. Es necesario demostrar una hipótesis utilizando datos muestrales, ya que pocas veces es posible estudiar la población completa. La importancia del procedimiento de prueba de hipótesis es evidente cuando, por ejemplo, se plantea la hipótesis de que la media poblacional es de 210 libras, y la media de la muestra es 208 libras. La prueba responde a la pregunta, "¿la media muestral está lo suficientemente cercana a la media poblacional hipotética para que sea posible aceptar la hipótesis nula?"

En el capítulo 9 se analizaron medidas de intervalo y medidas de niveles de proporción, con variables como ingresos, pesos y edades. En este capítulo se plantearán preguntas como: ¿El 60% de los votantes registrados darán sus votos a favor del candidato republicano? ¿El 10% de los relevadores electrónicos que acaban de recibirse están defectuosos? ¿15% de las personas de 18 años de edad y mayores planean adquirir un nuevo automóvil este año? ¿Hay una diferencia en la proporción de ejecutivos hombres y mujeres que desean cambiar de empresa para lograr una promoción?

Obsérvese que por proporción se designa al resultado comparativo de contar algo. Se cuenta el número de partes defectuosas y se cuenta el número de votantes registrados que planean votar por un candidato. Así, la prueba de hipótesis en este capítulo implica niveles nominales de medida. En primer lugar se demostrará una hipótesis sobre una proporción poblacional y después se realizará una prueba de hipótesis sobre dos proporciones poblacionales.

PRUEBA PARA UNA PROPORCION POBLACIONAL

Proporción La fracción, porción relativa o porcentaje que expresa la parte de la población o muestra que tiene un atributo particular de interés.

Como ejemplo de este concepto de proporción, supóngase que 92 de 100 en un sondeo están a favor del horario para ahorrar luz de día. La proporción muestral es 92/100, o 0.92, o 92%. Si $\bar{p}$ representa la proporción muestral, entonces:

$$\bar{p} = \frac{\text{Número de éxitos en la muestra}}{\text{Número de éxitos}}$$

Antes de probar una proporción poblacional deben considerarse algunos supuestos y cumplirse algunas condiciones. Para demostrar una hipótesis sobre una proporción poblacional, se seleccionará una muestra aleatoria de la población (este proceso se denomina experimento). Se supone que se cumplen los supuestos binomiales que se analizaron en el capítulo 6: 1) los datos muestrales recolectados son el resultado de conteos; 2) un resultado de un experimento se clasifica en una de dos categorías mutuamente excluyentes, un "éxito" o un "fracaso"; 3) la probabilidad de éxito se mantiene idéntica para cada intento; y 4) los intentos son independientes, lo que significa que el resultado de un ensayo o intento no afecta el resultado de cualquier otro.

La prueba que se realizará en breve es adecuada cuando tanto np como $n(1 - p)$ son mayores que 5; n es el tamaño de muestra y p es la proporción poblacional. La prueba se presenta en esta sección debido a que es una extensión especial de la prueba que se presentó en el capítulo anterior y también es de uso común. Esta prueba es un buen ejemplo del caso en donde la distribución probabilística normal se aplica para aproximar una distribución probabilística binomial con una gran exactitud.

Prueba de una cola

✱ Ejemplo

Supóngase que elecciones anteriores en un estado federal indican que es necesario que un candidato a gobernador logre al menos 80% de los votos en la sección norte del estado para que resulte elegido. El gobernador actual está interesado en evaluar qué oportunidad tiene de lograr la reelección en el cargo y planea la realización de una encuesta que incluya 2 000 electores registrados en dicha sección norte del estado. Puede emplearse la siguiente prueba, ya que tanto np como $n(1 - p)$ son mayores que 5: $np = 2\,000(0.80) = 1\,600$, y $n(1 - p) = 2\,000(1 - 0.80) = 400$.

Se debe emplear el procedimiento de prueba de hipótesis para evaluar las probabilidades de reelección del gobernador.

✔ Solución

Se aplica el procedimiento de cinco pasos de prueba de hipótesis que se expuso en el capítulo 9 para tomar una decisión, es decir:

1. Se plantean las hipótesis nula y alternativa.
2. Se fija el nivel de significación.
3. Se elige una prueba estadística.
4. Se enuncia una regla de decisión.
5. Se selecciona una muestra o muestras y la hipótesis nula se rechaza o no.

Paso 1 La hipótesis nula, H_0, es que la proporción poblacional p es 0.80 (o mayor). La hipótesis alternativa, H_1, es que la proporción es menor que 0.80. Desde un punto de vista práctico, el gobernador actual se preocupa sólo cuando la proporción

muestral es de menos de 0.80. Si es igual o menor que 0.80, no tendrá problema, es decir, los datos muestrales indicarían que probablemente será reelegido. Estas hipótesis se expresan simbólicamente como sigue:

$$H_0: p = 0.80$$
$$H_1: p < 0.80$$

H_1 indica una dirección. Así, la prueba es de una cola, y el signo de desigualdad señala hacia la extremidad de la curva que comprende la región de rechazo.

Paso 2 El nivel de significación es 0.05. Esta es la probabilidad de cometer un error de Tipo I; es decir, la probabilidad de que se rechace una hipótesis verdadera.

Paso 3 El desvío normal z es el estadístico adecuado, que se evalúa por

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sigma_p}$$

donde:

p es la proporción poblacional.
$\bar{p}$ es la proporción muestral.
σ_p es el error estándar de la proporción poblacional. Se calcula mediante $\sqrt{p(1 - p)/n}$, por lo que la fórmula para z se convierte en

$$\boxed{z = z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1 - p)}{n}}}}$$

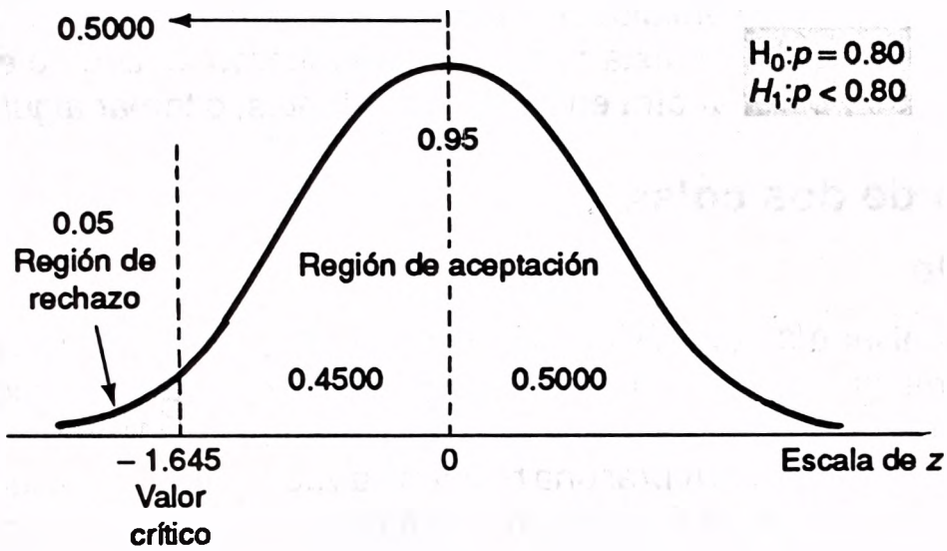
donde n es el tamaño de la muestra.

Paso 4 El valor o valores críticos de z forman el punto o puntos de división entre la región de aceptación y la de rechazo. Como la hipótesis alternativa indicó una dirección, esta es una prueba de una cola. El signo de desigualdad señala hacia la izquierda, por lo que se usa sólo la mitad izquierda de la curva (véase el capítulo 10-1). En el Paso 2 se especificó que alfa es 0.05. Esta probabilidad se encuentra en la cola izquierda y determina la región de rechazo. El área entre cero y el valor crítico es 0.4500, que se obtiene de 0.5000 − 0.0500. Consultando el apéndice D y buscando 0.4500, se encuentra que el valor crítico de z es aproximadamente 1.645. Por tanto, la regla de decisión es: rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa si el valor calculado de z queda a la izquierda de −1.645; de otra manera se acepta H_0.

Paso 5 Se muestrea y se toma una decisión respecto a H_0. La investigación muestral de 2 000 votantes potenciales en el área norte del estado reveló que

DIAGRAMA 10-1

Regiones de aceptación y de rechazo para el nivel de significación 0.05, prueba de una cola



1 550 planeaban votar por el gobernador actual. ¿La proporción de 0.775 (que se obtiene de 1 550/2 000) es "lo suficientemente cercana" a la proporción necesaria de 0.80 para afirmar que el gobernador será reelegido?

En este problema:

- $\bar{p}$ es 0.775, la proporción en la muestra de quienes planean votar por el gobernador.
- n es 2 000, el número de electores en la encuesta.
- p es 0.80, la proporción poblacional hipotética.
- z es una estadística de prueba distribuida normalmente cuando la hipótesis es verdadera y los otros supuestos son también verdaderos.

Calculando z:

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1\,550}{2\,000} - 0.80}{\sqrt{\dfrac{0.80(1 - 0.80)}{2\,000}}}$$

$$= \frac{0.775 - 0.80}{\sqrt{0.00008}} = \frac{-0.025}{0.0089443} = -2.80$$

El valor calculado de z (–2.80) está en la región de rechazo, por lo que se descartará la hipótesis nula en el nivel 0.05. La diferencia de 2.5 puntos porcentuales entre el porcentaje muestral (77.5%) y el porcentaje poblacional hipotético en la

parte norte del estado, necesaria para ganar la elección en el estado (80%) es estadísticamente significativa. Quizá esto no se debe a variaciones muestrales. Puesto en otros términos, la evidencia obtenida no fundamenta la aseveración de que el gobernador saliente regresará al puesto por otros cuatro años.

Como se indicó en el capítulo 9, ésta es una decisión "estadística". El gobernador puede estar de acuerdo con esta decisión. Sin embargo, puede no estar conforme con los hallazgos y ordenar otra encuesta de votantes, o tomar alguna otra acción.

Prueba de dos colas

✱ Ejemplo

Pruebe en el nivel 0.01 la aseveración de que 55% de las familias que planean adquirir una residencia vacacional en Florida desean un condominio. La hipótesis nula es $p = 0.55$, y la alternativa es $p \neq 0.55$. Una muestra aleatoria de 400 familias que indicaron planeaban comprar una residencia vacacional, revela que 228 desean un condominio. ¿Qué decisión debe tomarse respecto a la hipótesis nula?

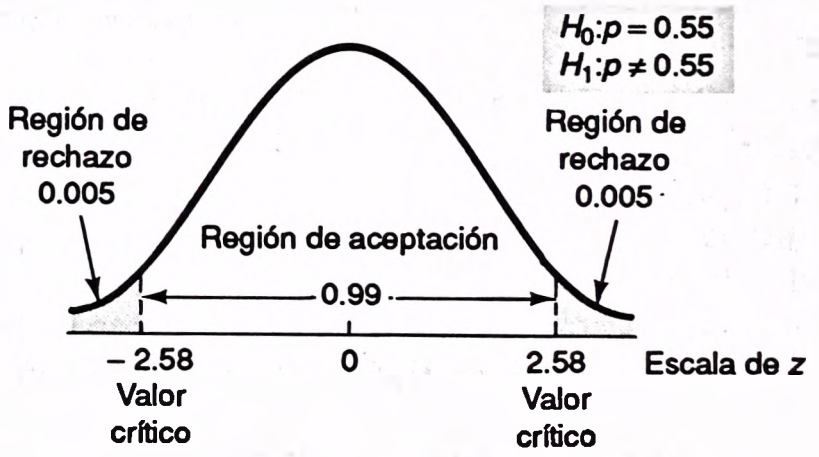
✔ Solución

Puede usarse la prueba z, ya que tanto np como $n(1 - p)$ es mayor que 5: $np = 220$ y $n(1 - p) = 180$.

Puesto que no se estableció una dirección en la hipótesis alternativa, la prueba es de dos colas. La regla de decisión se muestra gráficamente en el diagrama 10-2.

DIAGRAMA 10-2

Areas de aceptación y de rechazo, nivel de significación 0.01; prueba de dos colas



En este problema:

$\bar{p}$ es 0.57, la proporción en la muestra de quienes desean un condominio (228/400 = 0.57).

n vale 400, el número en la muestra.
p es 0.55, el porcentaje de la población de quienes se supone quieren un condominio.

Calculando z:

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}}$$

$$= \frac{0.57 - 0.55}{\sqrt{\frac{0.55(1 - 0.55)}{400}}}$$

$$= \frac{0.02}{0.0248747} = 0.80$$

La hipótesis nula de que la proporción verdadera es 0.55 no se rechaza en el nivel 0.01. Aunque existe una diferencia entre la proporción hipotética (0.55) y la proporción muestral (0.57), puede atribuirse a error muestral. Se concluye que de las familias que planean comprar una residencia vacacional en Florida, 55% desean adquirir un condominio.

AUTOEXAMEN 10-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

La siguiente aseveración se investigará en el nivel 0.02: "Cuarenta por ciento de las personas que se retiraron de un empleo industrial antes de llegar a los 60 años de edad volverían a trabajar si existieran empleos adecuados". Setenta y cuatro personas de una muestra de 200 dijeron que volverían a laborar.

1. ¿Puede utilizarse la prueba z? ¿Por qué sí o por qué no?
2. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
3. Muestre de modo gráfico la regla de decisión.
4. Calcule z y llegue a una decisión.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Para atraer un ingreso mayor por anuncios comerciales, una nueva telenovela matutina debe garantizar a las agencias publicitarias que al menos 20% del teleauditorio verá el programa. Los productores de la nueva telenovela, contrataron a una empresa de mercadotecnia para que realizara una investigación entre 2 000 personas del teleauditorio. De las 2 000 personas, 300 ven la telenovela al menos una vez a la semana. En el nivel 0.05 de significación, ¿puede afirmarse que 20% del teleauditorio ve la telenovela? O bien, ¿esta proporción muestral es lo suficientemente cercana a la necesaria

(20%) para afirmar que la diferencia entre los dos porcentajes podría deberse a error de muestreo?

2. La empresa "Pollo al momento" asegura que 90% de sus pedidos se entregan a más tardar 30 minutos después de que se formularon. Para demostrar esta afirmación, una muestra de 100 pedidos reveló que 82 se entregaron en el tiempo prometido. ¿Es válida la aseveración de la empresa en el nivel 0.10 de significación? H_1 es $p < 0.90$.
3. Una investigación en una universidad indica que 50% de los estudiantes cambian su área principal de especialización después del primer año en el programa de estudios.[1] Suponga que una muestra aleatoria de 100 estudiantes reveló que 48 de ellos cambió su área principal de especialización después del primer año del programa de estudios. ¿Ha habido un decremento significativo en la proporción de estudiantes que cambian su área de especialización después del primer año en el programa? Realice la prueba en el nivel 0.05 de significación.
4. La experiencia en una agencia de viajes indicó que 44% de las personas que solicitaron la planeación de sus vacaciones deseaban viajar a Europa. Durante la temporada activa más reciente, se seleccionó una muestra de 1 000 planes de viaje aleatoriamente de los archivos, y se encontró que 480 personas deseaban viajar a Europa de vacaciones. ¿Ha habido un cambio significativo en el porcentaje de personas que desean ir al Viejo Continente? Realice la prueba en el nivel 0.05. Utilice los pasos comunes de prueba de hipótesis.

PRUEBA DONDE INTERVIENE LA DIFERENCIA ENTRE DOS PROPORCIONES POBLACIONALES

A continuación se presentan varios casos comunes que comprenden dos proporciones poblacionales:

La maqueta de un nuevo automóvil propuesto se mostró a dos grupos, cada uno de 150 personas. Un grupo constó de personas entre 18 y 25 años de edad, y el otro, de personas de más de 50 años. Aproximadamente 80% de los integrantes del grupo más joven calificó en forma satisfactoria el modelo, pero sólo 50% de los integrantes del grupo de mayor edad dio una calificación similar. Al evaluar el potencial de mercado del automóvil propuesto, ¿es razonable esperar que resultará atractivo principalmente a las personas jóvenes? ¿O es posible que esta diferencia de 30 puntos porcentuales se deba a muestreo, es decir, podría ser que a los dos grupos de edades en la población les agrade de igual manera el automóvil propuesto?

Se considera la compra de dos máquinas nuevas de alta velocidad diseñadas por diferentes compañías. Un factor para la elección final es el porcentaje de piezas defectuosas que produce cada máquina. Una muestra de la producción de una de las máquinas reveló que 6% de las piezas eran defectuosas. Una muestra de la producción de la otra máquina indicó que 10% del total de las piezas resultaban defectuosas. ¿La máquina con el 6% de grado de defectos es significativamente mejor que la que produce 10% de piezas defectuosas? ¿O hay alguna probabilidad de que las dos máquinas produzcan un porcentaje igual de piezas defectuosas?

---

[1] Estudio inédito, Office of Institutional Research, The University of Toledo.

Las semillas de maíz híbrido Comstock se dividieron en dos lotes antes de sembrarse. Las semillas de un lote se remojaron en un producto químico del cual se afirma reduce significativamente el barrenillo del maíz. El otro lote no se sometió a tratamiento alguno. Las semillas se plantaron en hileras alternadas y se identificaron claramente. Se seleccionaron aleatoriamente muestras de cada hilera durante la época de cosecha y se descubrió que 20% del maíz tratado estaba infestado de barrenillos y 80% de la muestra no tratada tenía tal plaga. ¿Fue eficaz el tratamiento?

Un fabricante de perfumes ha desarrollado un nuevo producto llamado Stay-Away. Varias pruebas de comparación indican que el perfume tiene un buen potencial en el mercado. Sin embargo, los departamentos de mercadotecnia y publicidad quieren planear su estrategia de manera que el producto llegue e impresione al sector más grande posible del público comprador. Una de las preguntas es si preferirá el perfume una proporción mayor de mujeres jóvenes o una proporción mayor de mujeres maduras. Por tanto, existen dos poblaciones: una que consta de mujeres jóvenes y otra de damas maduras. Se usó una prueba estándar de aroma. Se seleccionaron damas aleatoriamente y se les pidió que olieran varios perfumes en sucesión, incluyendo el que suelen usar y, por supuesto, Stay-Away. La persona que realiza la prueba es la única que conoce los nombres de los perfumes. Cada mujer selecciona el perfume que le agrada más.

Prueba de dos colas

Los procedimientos a seguir en la toma de una decisión estadística, que comprenden la diferencia entre dos proporciones, se analizarán a continuación. Se ha elegido el problema del perfume.

***Paso 1 Planteamiento de* H_0 *y* H_1** En este problema la hipótesis nula es: "No hay diferencia entre la proporción de las jóvenes que prefieren Stay-Away y la de damas maduras que tienen tal preferencia". Si la proporción de mujeres jóvenes en la población se designa como p_1 y la de damas maduras es p_2, entonces la hipótesis nula es $p_1 = p_2$. La hipótesis alternativa es que las dos proporciones no son iguales, o sea $p_1 \neq p_2$. (Obsérvese nuevamente que la letra p designa las proporciones de población.)

Paso 2 El nivel de significación Se decidió usar el nivel 0.05.

Paso 3 La estadística de prueba Si tanto la muestra aleatoria de damas jóvenes n_1 como la muestra de damas maduras n_2 cumplen con el requisito de que np y $n(1 - p)$ son mayores que 5, puede usarse la prueba z, que se muestra a continuación. Como antes, la estadística de prueba z se aproxima a la distribución normal estándar y se calcula mediante:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_1} + \dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_2}}}$$

donde:

n_1 es el número de jóvenes seleccionadas en la muestra.
n_2 es el número de damas maduras seleccionadas en la muestra.
$\bar{p}_c$ es la media *ponderada* de las dos proporciones muestrales, que se calcula con la fórmula siguiente:

$$\bar{p}_c = \frac{\text{Número total de éxitos}}{\text{Número total de muestras}} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

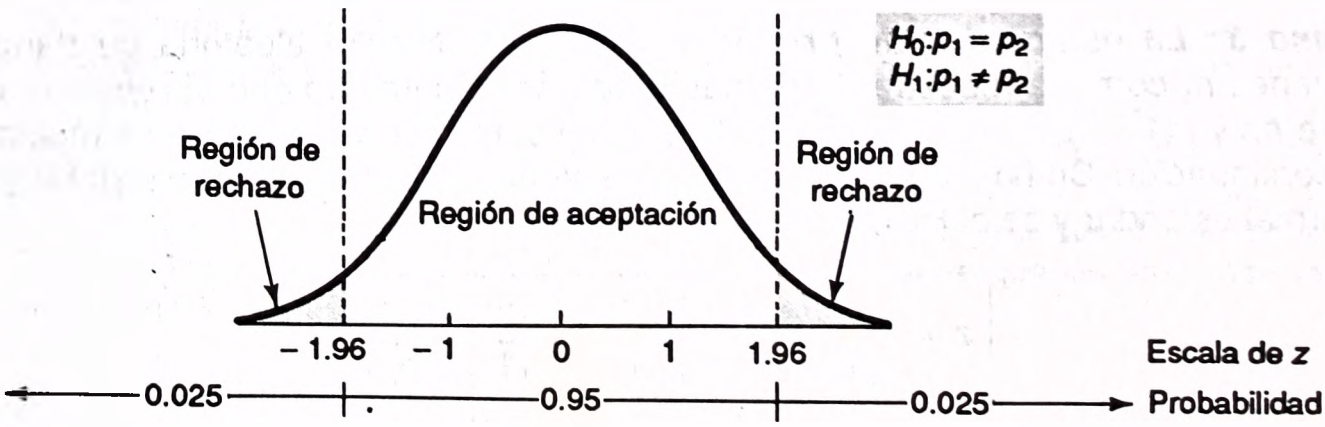
X_1 es el número de jóvenes (muestra 1) que prefieren Stay-Away.
X_2 es el número de damas maduras (muestra 2) que lo prefieren.

$\bar{p}_c$ por lo general se conoce como *estimador combinado de la proporción poblacional.* Es la mejor estimación de la proporción de mujeres en la población que prefieren el producto y no considera si son maduras o jóvenes. Por tanto, es un estimador "combinado".

Paso 4 La regla de decisión Recuérdese que la hipótesis nula, H_0, indica que $p_1 = p_2$ y la hipótesis alternativa, H_1, es $p_1 \neq p_2$. Puesto que H_1 no indica ninguna dirección (como $p_1 < p_2$) la prueba es de *dos colas.* Así, los valores críticos para el nivel 0.05 son −1.96 y +1.96. Igual que en otros casos, si el valor calculado de z queda en la región entre −1.96 y +1.96, la hipótesis nula no se rechaza. Si esto sucede, se supone que cualquier diferencia entre las dos proporciones muestrales se debe a variación por azar (véase el diagrama 10-3).

DIAGRAMA 10-3

Prueba de dos colas, áreas de aceptación y rechazo, nivel de significación 0.05



Paso 5 La decisión Un total de 100 mujeres jóvenes se seleccionaron aleatoriamente y a cada una se le aplicó la prueba estándar de olfato. Veinte de las 100 mujeres jóvenes eligieron Stay-Away como el perfume que más les agradó.

X_1 número de damas que prefieren Stay-Away = 20.
n_1 número en la muestra = 100.

$$\bar{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{20}{100} = 0.20$$

Se seleccionaron aleatoriamente doscientas damas maduras y a cada una se le aplicó la misma prueba estándar. 100 de las 200 prefirieron Stay-Away.

X_2 número de mujeres que prefieren el producto = 100.
n_2 número en la muestra = 200.

$$\bar{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{100}{200} = 0.50$$

La proporción ponderada combinada, p_c, es:

$$\bar{p}_c = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{20 + 100}{100 + 200} = \frac{120}{300} = 0.40$$

Obsérvese que la proporción ponderada de 0.40 se aproxima más a 0.50 que a 0.20. (Se incluyeron en la muestra más damas maduras que jóvenes.)

Calculando z:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_1} + \dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_2}}}$$

$$= \frac{0.20 - 0.50}{\sqrt{\dfrac{0.40(1 - 0.40)}{100} + \dfrac{0.40(1 - 0.40)}{200}}}$$

$$= \frac{-0.30}{0.06} = -5.00$$

El valor z calculado de –5.00 se encuentra en el área de rechazo, es decir, a la izquierda de –1.96. Por tanto, la hipótesis nula se descarta en el nivel de significación 0.05. Dicho en otras palabras, la hipótesis de que la proporción de mujeres jóvenes en la población que prefieren Stay-Away es igual a la proporción de damas maduras en la población que prefieren tal perfume, se rechaza en el nivel 0.05. Es poco probable que una diferencia tan grande entre las dos proporciones muestrales (0.30) pueda deberse al azar (muestreo).

La probabilidad de cometer un error de Tipo I es 0.05, que es igual al nivel de significación que se seleccionó antes de que se iniciara el estudio. Esto indica que hay un riesgo del 5% de rechazar la hipótesis verdadera de que $p_1 = p_2$.

AUTOEXAMEN 10-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

De 150 adultos que probaron un nuevo caramelo, 87 lo calificaron de excelente. De 200 niños en una muestra, 123 lo estimaron también como excelente. Utilizando el nivel de significación 0.10, ¿es posible concluir que hay una diferencia en la proporción de adultos y niños que califican al producto como excelente?

1. ¿Cuál es la hipótesis nula? ¿Cuál es la hipótesis alternativa?
2. ¿Cuál es el error de Tipo I?
3. ¿Esta es una prueba de una o de dos colas?
4. ¿Cuál es el valor crítico?
5. ¿Debe rechazarse o no la hipótesis nula?

Prueba de una cola

✱ Ejemplo

La empresa Guymon, Inc., está probando dos máquinas cortadoras de alta velocidad. Royal Industries manufactura una de ellas y la otra la produce Cordell. Royal asevera que su máquina produce un porcentaje más bajo de piezas defectuosas. Para investigar esta afirmación, se seleccionaron aleatoriamente 200 piezas cortadas de cobre de un lote producido con la máquina Royal. Un conteo reveló que 14 estaban defectuosas. Un experimento similar con la máquina Cordell reveló que 10 de las 100 piezas seleccionadas al azar eran defectuosas. En el nivel de significación 0.05, ¿la evidencia estadística fundamenta la afirmación de Royal Industries?

✔ Solución

La hipótesis nula es: el porcentaje de piezas defectuosas para la máquina Royal, p_1, es igual al porcentaje de piezas defectuosas para la Cordell, p_2. Lo anterior se escribe H_0: $p_1 = p_2$. La hipótesis alternativa es que p_1 es menor que p_2, que se expresa como H_1: $p_1 < p_2$. Como la hipótesis alternativa señala una dirección, la prueba es de una cola. El signo de desigualdad apunta en la dirección de la región de rechazo. Utilice el nivel de significación 0.05.

Si se aplica el mismo procedimiento anterior, la regla de decisión sería: rechazar la hipótesis nula si el valor calculado de z se encuentra en el área de la curva a la izquierda de −1.645, y aceptar la hipótesis alternativa. De otra manera, no se debe rechazar la hipótesis nula.

El estimador combinado de la proporción p_c es 0.08, que se obtiene por:

$$p_c = \frac{\text{Número total de éxitos}}{\text{Número total de muestras}} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{14 + 10}{200 + 100} = 0.08$$

en donde:

X_1 es el número de piezas defectuosas producidas por la máquina Royal en la muestra (14).
n_1 es el número de piezas producidas con la Royal en la muestra (200).
X_2 es el número total de piezas defectuosas producidas con la máquina Cordell en la muestra (10).
n_2 es el número total de piezas producidas con la máquina Cordell en la muestra (100).

Si, de hecho, no hay diferencia entre las máquinas, tal estimador combinado de 8% es la mejor estimación de la proporción de piezas defectuosas.

Calculando z:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_1} + \dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_2}}}$$

$$= \frac{0.07 - 0.10}{\sqrt{\dfrac{0.08(1 - 0.08)}{200} + \dfrac{0.08(1 - 0.08)}{100}}}$$

$$= \frac{-0.30}{\sqrt{0.001104}} = -0.90$$

Puesto que −0.90 está a la derecha de −1.645, es decir, en la región de aceptación, la hipótesis nula se acepta al nivel de significación 0.05. La diferencia de 0.03 entre las dos proporciones muestrales puede atribuirse al azar. Con base en estos datos muestrales, la fábrica Royal no puede afirmar que la máquina industrial que manufactura produce menos piezas defectuosas.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. El departamento de investigación en la casa matriz de una firma aseguradora realiza una investigación acerca de las causas de accidentes automovilísticos, las características de los conductores, etc. Se seleccionó una muestra aleatoria de 400 pólizas expedidas a personas solteras, y se descubrió que en el periodo anterior de tres años, 120 de ellas sufrieron al menos un accidente automovilístico. En forma semejante, una muestra de 600 pólizas expedidas a personas casadas reveló que 150 habían tenido al menos un accidente. ¿Hay diferencia significativa en el nivel de significación 0.05 en las proporciones de personas solteras y casadas que sufrieron un accidente durante un lapso de tres años?

6. A una muestra nacional de ciudadanos influyentes (republicanos y demócratas) se les preguntó, como parte de una encuesta global, si estaban a favor de disminuir las normas de protección ambiental de manera que pudiera utilizarse como combustible, carbón de alto contenido de azufre en plantas térmicas de energía. Los resultados fueron:

	Republicanos	*Demócratas*
Número muestreado	1 000	800
Número a favor	200	168

Al nivel de significación 0.02, ¿puede concluirse que hay una proporción mayor de demócratas a favor de aminorar las normas?

7. Una empresa farmacéutica, la productora de una tableta que se asegura previene las jaquecas, está convencida de que es más efectiva que la antigua tableta a la que sustituirá. Para evaluar la convicción de los productores, se pidió a 200 personas que tomaran el producto (*New* Go-Away). Durante el periodo de prueba, 180 de ellas no padecieron de jaqueca. Un grupo de otras 300 personas tomó el antiguo producto (Go-Away) y 261 no tuvieron dolor de cabeza durante el periodo de prueba. La convicción del fabricante de que el nuevo fármaco es más eficaz se probará al nivel 0.05.
   a. ¿Los datos muestrales cumplen con los requisitos para usar la prueba z?
   b. ¿Cuál es la proporción de éxitos con *New* Go-Away y con Go-Away?
   c. ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa?
   d. ¿Cuál es el valor crítico?
   e. ¿Cuál es el valor calculado de z? ¿Cuál será su decisión?
8. Suponga que una muestra aleatoria de 1 000 ciudadanos nacidos en Estados Unidos reveló que 198 están a favor de reanudar las relaciones diplomáticas con Cuba. De manera semejante, 117 de una muestra de 500 ciudadanos nacidos en el extranjero están a favor. Pruebe al nivel de significación 0.05 que no hay diferencia en la proporción de ciudadanos nacidos en Estados Unidos y ciudadanos nacidos en el extranjero, que están a favor de reanudar las relaciones diplomáticas con Cuba. H_1 asevera que hay una diferencia, es decir, que las dos proporciones no son iguales.

RESUMEN

Este capítulo es la continuación del análisis de prueba de hipótesis que se inicio en el capítulo 9. Las pruebas en este capítulo exigen que los datos sean de nivel nominal. Es decir, los datos sólo pueden clasificarse en categorías como "defectuoso" comparado con "no defectuoso", o "votará por el gobernador actual" comparado con "no votará por el gobernador actual". Además, las pruebas necesitan que las muestras aleatorias se seleccionen de acuerdo con un modelo (binómico o binomial), lo que significa que hay una probabilidad constante de éxito, los ensayos son aleatorios, y así sucesivamente.

Se aplica el procedimiento común de cinco pasos para la prueba de hipótesis. El primero es plantear las hipótesis nula y alternativa. La forma como la hipótesis alternativa H_1 se plantee, nos indica si se usará una prueba de una o de dos colas. Si se indica una dirección (< o bien >), se empleará una prueba de una cola.

Después de que se ha seleccionado un nivel de significación y formulado una regla de decisión, se calcula z y se compara con el valor crítico. Si el valor calculado de z queda fuera de la región de aceptación, se rechaza la hipótesis nula. De otra manera, no se descarta.

La segunda prueba comprende dos proporciones poblacionales. Se realiza este tipo de prueba tomando muestras de cada población y calculando z. Con base en la magnitud del valor z calculado, la hipótesis nula se rechaza o no.

Recapitulación

I. El procedimiento para demostrar una hipótesis es:
   A. Para utilizar con seguridad esta prueba particular para una proporción, hay que asegurar de que np y $n(1 - p)$ sean mayores que 5. Para dos proporciones, np y $n(1 - p)$ en ambas muestras deben ser mayores que 5.
   B. Aplicar el procedimiento común de cinco pasos para prueba de hipótesis.
      1. Plantear las hipótesis nula y alternativa.
      2. Decidir cuál es el nivel de significación.
      3. Elegir una prueba estadística adecuada.
      4. Formular una regla de decisión.
      5. Tomar una muestra, o varias y, con base en el valor z calculado, adoptar la decisión de rechazar o no la hipótesis nula.

II. Para probar la proporción poblacional:
   A. Plantear la hipótesis nula, H_0. Por ejemplo, podría ser: $p = 0.42$. La hipótesis alternativa, H_1, podría ser $p \neq 0.42$, $p < 0.42$, o bien $p > 0.42$. En resumen, las posibilidades son:

$$H_0: p = 0.42 \qquad H_0: p = 0.42 \qquad H_0: p = 0.42$$
$$H_1: p \neq 0.42 \qquad H_1: p < 0.42 \qquad H_1: p > 0.42$$

   B. Calcular z:

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1 - p)}{n}}}$$

en donde:

$\bar{p}$ es la proporción en la muestra que posee el rasgo de interés.
n es el tamaño de la muestra.
p es la proporción poblacional hipotética.

III. Una prueba de la diferencia entre dos proporciones poblacionales comprende:
   A. Plantear la hipótesis nula, $H_0: p_1 = p_2$. La hipótesis alternativa, H_1, podría ser $p_1 \neq p_2$, $p_1 < p_2$, o bien $p_1 > p_2$.
   B. Cálculo de z:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_1} + \dfrac{\bar{p}_c(1 - \bar{p}_c)}{n_2}}}$$

en donde:

n_1 es el número total en la primera muestra.
n_2 es el número total en la segunda muestra.

$\bar{p}_c$ es el estimador combinado de la proporción poblacional, que se obtiene mediante:

$$\bar{p}_c = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

X_1 es el número que tiene el rasgo de interés en la primera muestra.
X_2 es el número que tiene el rasgo en la segunda muestra.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Garages Unlimited es una cadena nacional que vende dispositivos para abrir puertas, luces guía, bancos de trabajo, y otros artículos para garajes. A fin de establecer una tienda filial rentable en una ciudad, 40% o más de las casas deben tener garajes. Una muestra aleatoria de 2 000 casas en Knoxville, Tennessee, reveló que 760 tienen cochera. Utilizando el nivel 0.05 de significación, ¿puede decirse que el porcentaje muestral ¿es lo suficientemente próximo al porcentaje necesario de 40 para establecer una tienda filial en Knoxville? Esto es, ¿puede expresarse que la diferencia entre el porcentaje muestral y el porcentaje necesario es atribuible al azar (muestreo)? Aplique un enfoque formal al plantear las hipótesis nula y alternativa, y así sucesivamente.
10. Un nuevo cereal para el desayuno, Very Right, se está sometiendo a pruebas de mercado en ciudades seleccionadas en las costas este y oeste. Se utilizan paneles de consumidores para evaluar en cada una de las ciudades seleccionadas, y después de cuatro semanas de consumir el producto, se obtienen las siguientes reacciones de los consumidores:

	Costa este	*Costa oeste*
Total de respuestas	632	428
Cereal preferido, o que se considera equivalente a otros	468	327

   a. La experiencia en pruebas de mercado indica que al menos 76% de la aceptación de paneles de consumidores debe mostrarse antes de que un producto tenga posibilidades de tener éxito. ¿Los resultados indican que el criterio de 76% se ha logrado con un riesgo alfa de 0.01?
   b. También hay interés en determinar si existen o no diferencias regionales en la aceptación del producto por parte de los consumidores. Para responder a esta pregunta realice una prueba de hipótesis sobre los resultados de las dos muestras en un nivel alfa de 0.01. Haga sus recomendaciones a la administración.
11. Fisher, un fabricante de equipo estereofónico, presenta los nuevos modelos de receptores, audiocasetes y otros componentes de audio. Se investiga en las tiendas de venta al menudeo inmediatamente después de la temporada de Navidad respecto al surtido existente de cada pieza de equipo. Se descubrió que a menos que se venda en Navidad 40% del equipo que ordenaron las tiendas durante el otoño, son necesarias reducciones inmediatas en la producción.

    El fabricante sabe que comunicarse por correo con las tiendas después de Navidad, es frustrante debido a que muchas jamás contestan. Este año el productor seleccionó 80 tiendas aleatoriamente, y las llamó por teléfono para preguntar acerca del receptor

Modelo TX 3040. Se descubrió que 38% de esos receptores se habían vendido. Puesto que 38% es menor que 40%, ¿significa esto que son necesarias reducciones inmediatas en la producción, o esta diferencia de 2% puede atribuirse al muestreo? Realice la prueba en el nivel 0.05.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Una de las viejas teorías en el beisbol de ligas mayores es que un equipo debe ganar aproximadamente 75% de sus juegos locales, y alrededor de 50% de los juegos en otros lugares. Después de sus primeros 103 juegos, los puntos ganados en 1988 por los Boston Red Sox (Medias Rojas) es 36–18 en juegos locales y 24–25 en otros lugares. Al nivel de significación 0.05, ¿puede concluirse que el equipo ganará un porcentaje mayor de sus juegos locales?
2. A través de los años Coca Cola y Pepsicola han realizado muchos estudios para determinar si los clientes pueden o no diferenciar los dos productos. Supóngase que se realizan investigaciones sobre este tema y se selecciona una muestra aleatoria de 500 personas. Se sirve en un vaso una pequeña cantidad de cada bebida. Los vasos no están marcados, pero se sabe qué producto hay en cada uno. De las 500 personas de la muestra, 265 son capaces de identificar el producto que están probando. Al nivel de significación, 0.05, ¿puede concluirse que las personas en realidad pueden diferenciar entre las dos bebidas?

EXAMEN CAPITULO 10

Las respuestas se dan al final del capítulo.

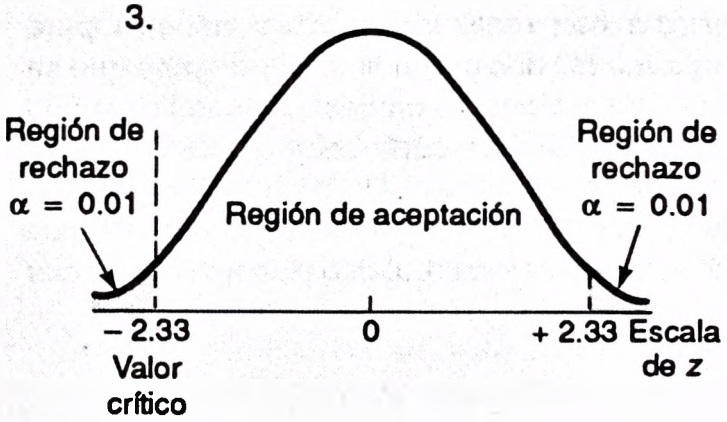
1. La máquina automática Tolson de alta velocidad produce en serie rondanas pequeñas. La experiencia revela que 70% de la producción de cada día es perfecta. La mayoría de las rondanas o arandelas restantes presentan rebabas que deben limarse antes de que puedan instalarse en un montaje. Como un intento para incrementar el porcentaje de la producción que no tiene rebabas, la máquina se modifica ligeramente. Después se revisa una muestra de 100 arandelas y se encontró que 72% son perfectas. El jefe de producción considera que no ha habido cambios. Sin embargo, el director de la fábrica cree que la producción de la máquina modificada ha mejorado definitivamente la calidad del producto. Es decir, el porcentaje de rondanas perfectas es mayor de 70. ¿Está en lo correcto el director de la planta? Realice la prueba al nivel 0.02.
2. Una comisión que estudia las relaciones entre empresarios y empleados en ZMA propuso que se adopte un sistema de calificación. Cada empleado debe calificar a su supervisor inmediato; a su vez éste debe calificar a cada empleado. Para determinar si hay diferencia entre las reacciones del personal de oficina y el personal de la fábrica acerca de la propuesta, se seleccionaron aleatoriamente a 120 personas del personal de oficina y a 160 del personal de la planta; 78 de las personas del personal de oficina y 90 del personal de planta estuvieron a favor de la propuesta. ¿Hay evidencias suficientes para fundamentar la consideración de que la proporción del personal de oficina a favor de la propuesta es mayor que la del personal de fábrica o planta? Utilice el nivel 0.05.

Autoexámenes

10-1 1. Sí, porque np y $n(1 - p)$ son mayores que 5. $np = 200(0.40) = 80$, y $n(1 - p) = 200\ (0.60) = 120$.

2. H_0: $p = 0.40$.
H_1: $p \neq 0.40$

3.



4. $z = -0.87$, que se obtiene mediante:

$$z = \frac{0.37 - 0.40}{\sqrt{\dfrac{0.40(1 - 0.40)}{200}}}$$

$$= \frac{-0.03}{\sqrt{0.0012}}$$

$$= \frac{-0.03}{0.34641} = -0.866$$

Se acepta la hipótesis nula al nivel 0.02.

10-2 1. H_0: $p_1 = p_2$; H_1: $p_1 \neq p_2$

2. 0.10.

3. De dos colas.

4. –1.645 y +1.645.

5. No se rechaza. Se calcula $z = -0.66$.

$$p_c = \frac{87 + 123}{150 + 200} = \frac{210}{350} = 0.60$$

entonces:

$$z = \frac{0.58 - 0.615}{\sqrt{\dfrac{0.60(0.40)}{150} + \dfrac{0.60(0.40)}{200}}}$$

$$= \frac{-0.035}{\sqrt{0.0028}} = -0.66$$

Examen capítulo 10

1. El jefe está en lo correcto. Prueba de una cola. El valor crítico es aproximadamente de 2.05. El valor calculado de z es 0.44, que se obtiene por

$$z = \frac{0.72 - 0.70}{\sqrt{\frac{(0.70)(0.30)}{100}}} = \frac{0.02}{\sqrt{0.0021}}$$

Se acepta la hipótesis nula ya que 0.44 se encuentra en el área entre 0 y 2.05. No hay diferencia significativa. La diferencia de 2% puede atribuirse al muestreo.

2. H_0: $p_1 = p_2$. H_1: $p_1 > p_2$. El valor crítico es 1.645. Se calcula que z es 1.48, que resulta de

$$z = \frac{0.65 - 0.5625}{\sqrt{\frac{0.60(1 - 0.60)}{120} + \frac{0.60(1 - 0.60)}{160}}}$$

El estimador combinado es 0.60, que se obtiene mediante (78 + 90)/(120 + 160). Se acepta la hipótesis nula, ya que 1.48 se halla en la región de aceptación entre 0 y 1.645.

Repaso de los capítulos 8 – 10

Esta sección es un repaso de los principales conceptos y términos que se presentaron en los capítulos 8 a 10. En el capítulo 8 se investigó por qué es casi imposible estudiar todos los elementos de algunas poblaciones. Por ejemplo, sería demasiado costoso y tomaría mucho tiempo localizar y registrar los ingresos anuales de todos los funcionarios bancarios de Estados Unidos. Por tanto, para estimar un parámetro poblacional se muestrea una población. Una muestra es una parte de tal población. Debe tenerse cuidado para asegurarse de que cada elemento poblacional tenga oportunidad de que se le seleccione. De otra manera las conclusiones pueden resultar sesgadas. Es posible utilizar varios métodos de muestreo de tipo probabilístico, como el *muestreo aleatorio simple,* el *sistemático,* el *estratificado* y el *muestreo por conglomerados.*

Independientemente del método de muestreo seleccionado, es poco probable que una media muestral sea exactamente igual a la media poblacional. La diferencia entre este estadístico muestral y el parámetro poblacional es el *error de muestreo.* Si las medias de todas las muestras posibles de un tamaño específico, seleccionadas a partir de una población se organizaran en una distribución denominada *distribución muestral de medias,* la media de la distribución muestral sería igual a la media poblacional. Si el tamaño de muestra es lo suficientemente grande, la distribución de las medias muestrales se distribuye en forma casi normal.

Estos conceptos son el fundamento del *teorema de límite central,* que es la base teórica en que se fundamenta la *inferencia estadística.* En resumen, la inferencia estadística consiste en deducir algo acerca de un parámetro poblacional con base en una estadística muestral. En el capítulo 8 se analizó un aspecto de la inferencia estadística, la *estimación.* Los capítulos 9 y 10 se concentraron en otro aspecto de la inferencia estadística, la *prueba de hipótesis.*

Quizá se deseara estimar un parámetro poblacional particular. Si, con base en una muestra, se calcula que la media poblacional es de 87.5 pulg, al estimador se le denomina *estimador por puntos.* Si se plantea que la media poblacional probablemente se encuentra en el intervalo entre $ 35 200 y $ 35 400, a esta estimación se le denomina *estimador por intervalo.* Si, por ejemplo, se señala que 95 de las 100 medias muestrales se encuentran en el intervalo entre $ 35 200 y $ 35 400, estos dos valores se denominan *límites de confianza.*

Una *hipótesis* es una afirmación acerca de uno (o varios) parámetros de población. Un enunciado de esta clase es "El peso neto medio de latas de sopa es

319 gramos". Mediante un procedimiento sistemático denominado *prueba de hipótesis,* se decide si se acepta o rechaza esa hipótesis. El procedimiento requiere plantear la hipótesis nula, seleccionar un nivel de significación y la estadística de prueba adecuada, formular una regla de decisión, tomar una muestra y (con base en los resultados muestrales), aceptar o rechazar la hipótesis nula. En el capítulo 9 se presentaron pruebas de hipótesis para una media poblacional y dos medias de población. En el capítulo 10 se describieron pruebas para una proporción poblacional y dos proporciones de población.

GLOSARIO

Capítulo 8

Distribución muestral de medias Distribución probabilística que consta de todas las medias muestrales posibles seleccionadas de la población, y sus probabilidades de ocurrencias correspondientes.

Error de muestreo Diferencia entre una estadística muestral y el parámetro poblacional correspondiente. Por ejemplo: el ingreso medio muestral es $ 22 100 y la media poblacional vale $ 22 000. El error de muestreo es así $ 22 100 − $ 22 000 = $ 100. Este error puede atribuirse al muestreo, es decir, al azar.

Estimador por intervalo El intervalo en el que probablemente se encuentra un parámetro poblacional, con base en información muestral. Por ejemplo: Según datos muestrales, podría decirse que la media poblacional probablemente se encuentra en el intervalo entre 1.9 y 2.0.

Estimador por puntos Número que se calcula a partir de una muestra que sirve para estimar un parámetro poblacional. Por ejemplo: si la media muestral es 1 020 lb/plg^2, es el mejor estimador de la resistencia a la tensión de los elementos de una población.

Muestra probabilística Una muestra de elementos que se eligen de modo que cada miembro de la población tenga una oportunidad conocida de que se le incluya en la muestra.

Muestreo aleatorio estratificado Una población se divide primero en subgrupos denominados estratos. Después se elige una muestra de cada estrato. Si, por ejemplo, la población de interés consta de todos los estudiantes de licenciatura, el diseño muestral podría pedir una muestra que incluyera a 62 estudiantes de primer año, 51 de segundo, 40 de tercero, y 39 del último.

Muestreo aleatorio simple Un método de muestreo en el que cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionado.

Muestreo aleatorio sistemático Suponiendo que la población está organizada de alguna manera, como en orden alfabético, por estaturas o en un archivo, se selecciona un punto de inicio. Después, cada *k*-ésimo miembro se convierte en integrante de la muestra. Si un diseño muestral necesita entrevistar cada novena casa en Avenida Central empezando con la número 932 de esta calle, la muestra debe constar de las casas de números 932, 941, 950 etc.

Muestreo por conglomerados A veces se utiliza para reducir el costo de muestrear, si la población está dispersa en un área geográfica extensa. El área se divide de alguna manera en unidades más pequeñas (distritos, barrios, manzanas, etc.), denominadas unidades primarias. Después se seleccionan unas pocas unidades primarias, y se elige una muestra aleatoria de cada unidad.

Sesgo Una consecuencia posible si a ciertos miembros de la población se les niega la oportunidad de ser seleccionados en la muestra. Como resultado, la muestra puede no ser representativa de la población.

Teorema de límite central Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la distribución de medias muestrales se aproximará a la distribución normal, independientemente de la forma de la población. Además, la media de la distribución muestral será igual a la media poblacional.

Capítulos 9 y 10

Hipótesis Enunciado acerca del valor de un parámetro poblacional. Ejemplos: 40.7% de todas las personas de 65 años de edad y mayores, viven solas. El número medio de personas por familia es 3.33.

Proporción Fracción o porcentaje comparativos de una muestra o una población que tiene un rasgo de interés particular. Si a 5 de 50 personas de una muestra les agradó un nuevo producto, la proporción es 5/50, o sea 0.10 o 10%.

Prueba de dos colas Se utiliza cuando la hipótesis alternativa no indica una dirección, como $H_1: \mu \neq \$75$, que se lee "la media poblacional no es igual a \$75". Hay una región de rechazo en cada cola.

Prueba de hipótesis Procedimiento que se basa en evidencia muestral y en la teoría probabilística que se emplea para determinar si la hipótesis planteada es una afirmación razonable y debe aceptarse, o si no es razonable y debe ser rechazada.

Prueba de una cola Se utiliza cuando la hipótesis alternativa indica una dirección, como $H_1: \mu > 40$. La región de rechazo se encuentra sólo en una extremidad o cola.

Valor crítico Número que es el punto divisorio entre la región de aceptación y la de rechazo. Para una prueba de una cola, sólo hay un valor crítico, como −1.96 o 2.58. Para una prueba de dos colas, existen dos valores críticos, uno en cada extremidad, como −1.96 y + 1.96.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

Parte I - Selección múltiple

1. A cada nuevo empleado se le da un número de identificación. Los archivos de personal se ordenan secuencialmente, iniciando con el empleado número 0001. Para muestrear a los empleados, el número 0153 se selecciona primero. Los números 0253, 0353, 0453, etc., se vuelven miembros de la muestra. Este tipo de muestreo se denomina:
   a. Muestreo aleatorio simple.
   b. Muestreo sistemático.
   c. Muestreo aleatorio sistemático.
   d. Muestreo por conglomerados.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

2. Se divide un barrio en manzanas. Después se seleccionan aleatoriamente 12 manzanas y se concentran los esfuerzos de muestreo en esas 12. Este tipo de muestreo se denomina:
   a. Muestreo aleatorio simple.
   b. Muestreo aleatorio sistemático.

c. Muestreo aleatorio estratificado.
d. Muestreo por conglomerados.
e. Muestreo no probabilístico.

3. El "error de muestreo", como se usa en la inferencia estadística,
   a. Indica que se ha cometido un error de Tipo I.
   b. Indica que se ha cometido un error de Tipo II.
   c. Es la diferencia entre una estadística muestral y su parámetro poblacional correspondiente.
   d. Indica que debe usarse la prueba z.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

4. De 180 calculadoras de una muestra, 5 estaban defectuosas. La proporción de éxitos se obtiene mediante:
   a. $\dfrac{\text{Número de éxitos en la muestra}}{\text{Número muestreado}}$
   b. $n = \left(\dfrac{z \cdot s}{E}\right)^2$
   c. $\dfrac{s}{\sqrt{n}}$
   d. $\dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

5. Los puntos extremos de un intervalo de confianza se denominan:
   a. Niveles de confianza.
   b. Estadísticas de prueba.
   c. Grados de confianza.
   d. Límites de confianza.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

6. Si se usa una prueba de una cola y el nivel de significación es 0.01, el valor crítico es:
   a. −1.96 o bien +1.96.
   b. −1.645 o bien +1.645.
   c. − 2.58 o bien +2.58.
   d. 0 o bien 1.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

7. Se comete un error de Tipo II si:
   a. Se rechaza una hipótesis nula verdadera.
   b. Se acepta una hipótesis nula verdadera.
   c. Se rechaza una hipótesis alternativa verdadera.
   d. Se aceptan tanto la hipótesis nula como la alternativa al mismo tiempo.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

8. Las hipótesis son H_0: $\mu = 240$ pulg; H_1: $\mu \neq 240$ pulg.
   a. Se aplica una prueba de una cola.
   b. Se aplica una prueba de dos colas.
   c. Se aplica una prueba de tres colas.
   d. Se aplica la prueba incorrecta.

e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

9. Se usa el nivel 0.01 en un experimento y se aplica una prueba de una cola. El valor calculado de z es -1.8. Esto indica que:
   a. H_0 debe aceptarse.
   b. Debe rechazarse H_0 y aceptarse H_1.
   c. Debe tomarse una muestra más grande.
   d. Se debió haber utilizado el nivel 0.05 de significación.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

10. Para probar una hipótesis que comprende proporciones, np y $n(1 - p)$ deben:
   a. Ser mayores de 30.
   b. Ser mayores de 5.
   c. Encontrarse en el intervalo de 0 a 1.
   d. Ser al menos -2.58.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

Parte II - Problemas

11. Una máquina está programada para producir pelotas de tenis de manera que el rebote medio de la pelota sea de 36 pulg cuando se deja caer desde una plataforma. El supervisor sospecha que el rebote medio ha cambiado y es de menos de 36 pulg. Se realizará un experimento usando 42 pelotas de tenis, con un nivel de 5% para probar la hipótesis: se calculó que la media muestral es de 35.5 pulg, y la desviación estándar de la muestra, 0.9 pulg. ¿Está en lo correcto el supervisor?

12. Las investigaciones de la casa matriz de Illinois Banking Corp. revelaron que sólo 8% de los clientes de la empresa esperan más de cinco minutos para realizar sus operaciones bancarias durante el horario de más afluencia. En la matriz se considera que este es un porcentaje razonable y no se emplearán nuevos cajeros de medio tiempo a menos que la proporción se vuelva significativamente mayor que 8%. La gerente de una sucursal cree que más de 8% de los clientes espera más de 5 minutos. Tal gerente solicitó ayuda adicional durante el horario de mayor afluencia. En una muestra aleatoria de 100 clientes se midió el tiempo de espera y se encontró que 10 aguardaron más de cinco minutos. Pruebe la hipótesis de que la proporción poblacional aún es de 8%, realizando lo siguiente:
   a. Plantee la hipótesis nula y alternativa.
   b. Establezca el nivel de significación.
   c. Proporcione la fórmula para la estadística de prueba.
   d. Plantee la regla de decisión.
   e. Realice los cálculos necesarios y llegue a una decisión respecto a la hipótesis nula.
   f. Explique la diferencia entre la proporción muestral y la proporción poblacional hipotética.

13. Se tiene interés en actualizar un estudio de los errores en las facturas de una compañía. El que se realizó hace varios años reveló que 5% de las facturas presentaban al menos un error. Se decide usar el nivel 0.05, y el error en la predicción no debe exceder más o menos 2% de la proporción poblacional.
   a. ¿Cuántas facturas deben examinarse?
   b. Supóngase que el tamaño de la muestra que se calculó en la parte *a* necesitaba de mucho tiempo. ¿Qué podría hacerse para reducir el tamaño de la muestra?

14 Se desea determinar la cantidad media de dinero que los aficionados a los deportes gastan en alimentos y bebidas al asistir a un partido de futbol profesional. Se decide usar el nivel 0.01 y calcular la media entre más o menos 20 centavos (de dólar). ¿Cuántos aficionados deben incluirse en la muestra si se calculó que la desviación estándar en una encuesta piloto es de 50 centavos?

15. Una empresa con fábricas en dos áreas metropolitanas ajusta el salario (por hora) que se paga a sus obreros en un área si existe una diferencia significativa entre las dos medias poblacionales de los salarios. Con base en los siguientes datos muestrales, ¿hay diferencia entre los dos salarios medios? Para resolver el problema, responda a estas preguntas:
    a. ¿Cuáles son las hipótesis nula y alternativa?
    b. ¿Es esta una prueba de una o de dos colas? ¿Por qué?
    c. ¿Cuál es la fórmula para la estadística de prueba?
    d. Usando el nivel de 0.05, ¿cuál es el valor o valores críticos?
    e. ¿Cuál es su decisión respecto a la hipótesis nula?

Area metropolitana	*Media muestral de salario por hora*	*Desviación estandar de la muestra*	*Número en la muestra*
Cartersville	$8.40	$0.60	180
Kingston	8.50	0.30	200

16. Una distribuidora mayorista de repuestos para automóvil tiene bodegas en Chicago y Dallas. Aunque siempre se evalúan los inventarios, el número de artículos en los estantes y el número almacenado en los registros de la computadora, a veces indican que hay errores en el conteo de algunos artículos. Por ejemplo, si el registro en la computadora indica que hay 122 cajas de faros GE #5 en los estantes, pero un conteo reveló 124, el registro de computadora para este artículo está equivocado. Se realizará un experimento para determinar si hay diferencia entre la proporción equivocada de artículos en Chicago y la proporción errónea de artículos en la bodega de Dallas.
    a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
    b. ¿Esta es una prueba de una o de dos colas? ¿Por qué?
    c. Proporcione la fórmula de la estadística de prueba.
    d. Use el nivel de 0.05 y plantee la regla de decisión.
    e. Una muestra de 200 artículos en la bodega de Chicago reveló que los registros de computadora y el conteo no difieren para 180 de los 200. Una muestra aleatoria de 100 artículos en la bodega de Dallas reveló que los registros de computadora y los conteos en estantes no difieren para 87 de los 100. ¿Qué decisión debe tomarse respecto a la hipótesis nula? Explique su respuesta.

11

Prueba *t* de Student: muestras pequeñas

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Analizar las principales características de la distribución *t* de Student.
2. Probar una hipótesis que implica una media, cuando la desviación estándar de la población se desconoce y el tamaño de muestra es pequeño.
3. Probar una hipótesis que implica la diferencia entre dos medias poblacionales cuando se desconocen las desviaciones estándares de la población y los tamaños de muestra son pequeños.
4. Realizar una prueba de hipótesis para la diferencia entre un conjunto de observaciones en pares, cuando los tamaños de muestra son pequeños.

En el capítulo 9 se inició el estudio de la prueba de hipótesis. En ese capítulo se describió el procedimiento de cinco pasos para la prueba de hipótesis. Se utilizó la distribución normal estándar, la distribución *z*, como estadístico de prueba. Para emplear dicha distribución la población debe ser normal y conocerse la desviación estándar poblacional. En muchas situaciones del mundo real, la población es aproximadamente normal, pero se desconoce la desviación estándar de la población. En este caso *s*, se utiliza la desviación estándar muestral en vez de σ. Si el tamaño de la muestra es al menos 30, los resultados se consideran satisfactorios.

¿Qué sucede si el tamaño de muestra es de menos de 30 observaciones? Para estos proyectos de investigación, la distribución *z* no es el estadístico de prueba adecuado. La *t* de Student, o la **distribución *t***, como se denomina comúnmente, se utiliza como estadístico de prueba.

En primer lugar se examinarán las características de la distribución *t* y después se analizarán tres casos de prueba de hipótesis.

CARACTERISTICAS DE LA DISTRIBUCION *t* DE STUDENT

Las características de esta distribución se examinarán antes de que se considere su aplicación para probar una hipótesis. Tal distribución fue desarrollada por William S. Gossett, un maestro cervecero de la cervecería Guinness en Irlanda, quien la publicó en 1908 bajo el seudónimo de "Student". A Gossett le interesaba el comportamiento de

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

cuando *s* debía usarse como estimador de σ. En particular le preocupaba la discrepancia entre *s* y σ cuando se calculaba *s* a partir de una muestra muy pequeña. La distribución *t* y la distribución normal estándar se exhiben gráficamente en el diagrama 11-1.

Las siguientes características de la distribución *t* se basan suponiendo que la población de interés es normal, o casi normal.

1. Como la distribución *z*, es una distribución continua.
2. Como la distribución *z*, es de forma de campana y simétrica.
3. No hay una distribución *t*, sino más bien una "familia" de distribuciones *t*. Todas tienen la misma media igual a cero, pero sus desviaciones estándares difieren de acuerdo con el tamaño de muestra, *n*. Hay una distribución *t* para un tamaño de muestra 20, otra para un tamaño de muestra 22, y así sucesivamente.
4. La distribución *t* es más extendida y menos aguda en el centro que la distribución estándar normal (véase el diagrama 11-1). Sin embargo, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, la curva de la distribución *t* se aproxima a la de la distribución normal estándar.

DIAGRAMA 11-1

La desviación normal estándar y la distribución *t* de Student

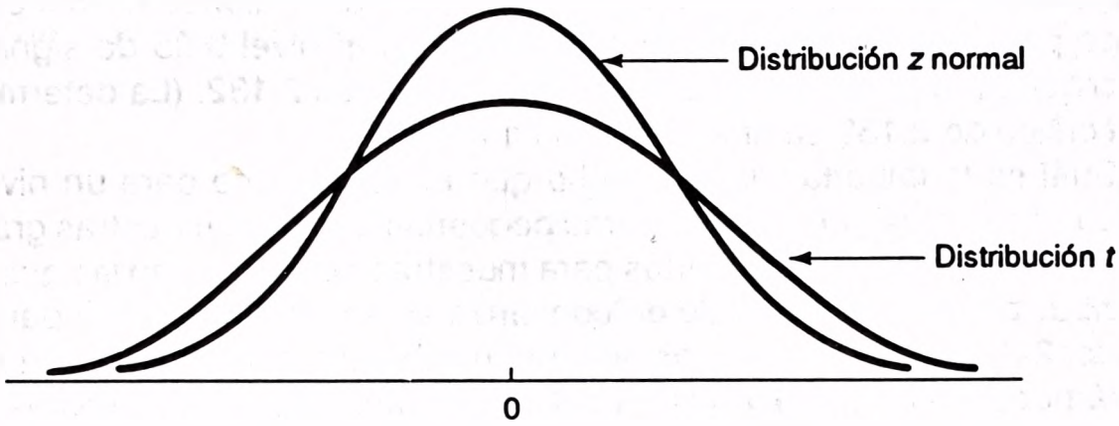
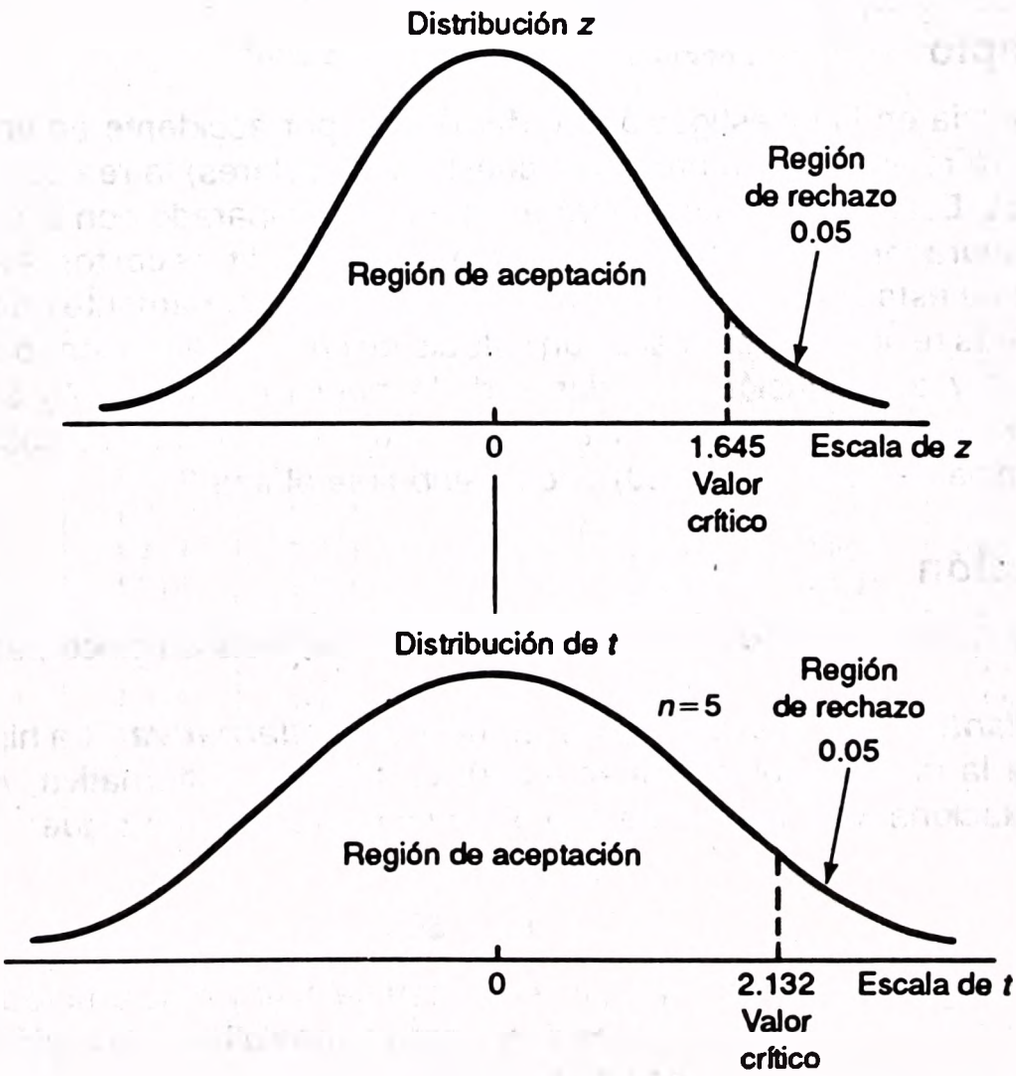


DIAGRAMA 11-2

Regiones de aceptación para las distribuciones *z* y *t*, nivel 0.05, prueba de una cola



Como se observó, la distribución *t* de Student es más extendida que la distribución *z*. Como resultado, los valores críticos de *t* para un nivel de significación dado son mayores en magnitud que los valores críticos de *z* correspondientes. En el diagrama 11-2 (página anterior) se muestran las regiones de aceptación y de rechazo para una prueba de una cola utilizando el nivel 0.05 de significación. El valor crítico para la prueba *z* es 1.645, pero para *t* es 2.132. (La determinación del valor *t* crítico de 2.132 se analizará más adelante.)

¿Cuál es la importancia del hecho que el valor crítico para un nivel dado de significación sea mayor para muestras pequeñas que para muestras grandes? Las siguientes afirmaciones son ciertas para muestras pequeñas (en las que se emplea la distribución *t*): 1) El intervalo de confianza será más amplio que para muestras grandes. 2) La región de aceptación será más amplia que para muestras grandes. 3) Será necesario un mayor valor *t* calculado para rechazar la hipótesis nula que para muestras grandes utilizando *z*. En otras palabras, debido a que hay más variabilidad en las medias muestrales calculadas a partir de muestras más pequeñas, se tiene menos confianza en los estimadores resultantes y son menos adecuados para rechazar hipótesis.

PRUEBA PARA LA MEDIA POBLACIONAL

✱ Ejemplo

La experiencia en la investigación de demandas por accidente en una institución aseguradora revela que en promedio cuesta $60 (dólares) la realización de todos los trámites. Este costo se consideró exorbitante comparado con el de otras compañías aseguradoras y se instauraron medidas para abatir los costos. A fin de evaluar el impacto de estas nuevas medidas se seleccionó aleatoriamente una muestra de 26 demandas recientes y se realizó un estudio de costos. Se encontró que la media muestral, $\overline{X}$ y la desviación estándar, *s*, de la muestra fueron $57 y $10, respectivamente. En el nivel 0.01 de significación, ¿hay una reducción en el costo promedio, o la diferencia de $3 ($57 − $60) puede atribuirse al azar?

✔ Solución

Se utiliza el procedimiento común de prueba de hipótesis en cinco pasos.

Paso 1. Plantear la hipótesis nula y la hipótesis alternativa La hipótesis nula, H_0, es que la media poblacional vale $60. La hipótesis alternativa, H_1 es que la media poblacional vale menos de $60. Esto se expresa como sigue:

$$H_0 : \mu = \$60$$
$$H_1 : \mu < \$60$$

La prueba es de *una cola*, ya que sólo interesa si hay o no una *reducción* en el costo. Esta desigualdad en la hipótesis alternativa señala hacia la región de rechazo en la cola o extremidad izquierda de la distribución.

Paso 2. Seleccionar el nivel de significación Se usará el nivel 0.01.

Paso 3. Proporcionar el estadístico de prueba Tal estadístico es la distribución *t* de Student, ya que 1) no se conoce la desviación estándar de la población, y 2) el tamaño de muestra es pequeño (de menos de 30). La fórmula para *t* es:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Paso 4. Formular la regla de decisión Los valores críticos de *t* se encuentran en el apéndice F, y en la tabla 11-1 se muestra parte de ese apéndice. La columna del extremo izquierdo de la tabla se titula "Grados de libertad, *g.l.*" Para esta prueba hay $n - 1$ grados de libertad. Se recorre hacia abajo esa columna hasta 25 ($n - 1$, o sea $26 - 1 = 25$). El valor crítico para $g.l. = 25$, una prueba de una cola, y el nivel 0.01 es 2.485.

TABLA 11-1

Parte de la tabla de la distribución *t*

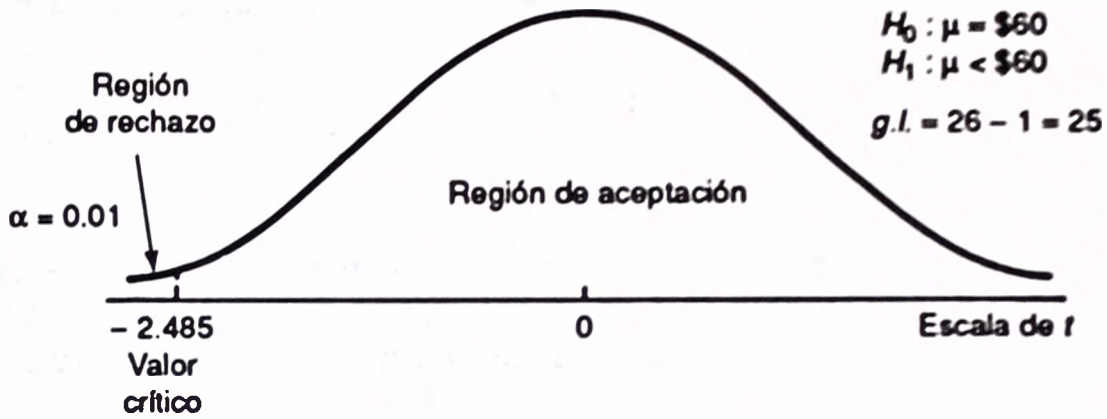
Valores críticos de *t*

Grados de libertad *g.l.*	Nivel de significación para prueba de una cola					
	0.10	0.5	0.025	0.01	0.005	0.0005
	Nivel de significación para prueba de dos colas					
	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674

Como se muestra en el diagrama 11-3, la regla de decisión para esta prueba de una cola es rechazar la hipótesis nula si el valor calculado de *t* queda en cualquier parte de la extremidad, a la izquierda de – 2.485. De otra manera, se acepta la hipótesis nula de que la media poblacional es $60.

DIAGRAMA 11-3

Regiones de aceptación y de rechazo, distribución *t*, nivel de significación 0.01



Paso 5. Calcular t y tomar una decisión Recuérdese que *t* se calcula mediante:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

con $n - 1$ grados de libertad,[1] donde:

$\overline{X}$ es la media de la muestra pequeña.
μ es la media poblacional hipotética.
s es la desviación estándar de la muestra.
n es el tamaño de muestra.

En este problema:

$\overline{X}$ = \$57, la media muestral.
μ = \$60, la media poblacional hipotética.
s = \$10, la desviación estándar de la muestra.
n = 26, el número de elementos en la muestra.

[1] En resumen, como se utilizan estadísticas muestrales, es necesario determinar el número de variables *que pueden variar*. Como ejemplo, si la suma de cuatro números es 20, pueden escribirse varias combinaciones de *tres* números, pero el *cuarto* número es obligado. Si se seleccionan 7, 4 y 1 como los tres números, el cuarto número *debe ser* 8, de manera que la suma de todos sea 20. Debido a esta restricción, se dice que "se pierde un grado de libertad".

Por ejemplo, supóngase que se sabe que la media de cuatro números es 5. Los cuatro números son 7, 4, 1 y 8. Las desviaciones de estos números respecto de la media deben ser en total 0. Las desviaciones de + 2, –1, – 4 y + 3 dan en total 0. Si las desviaciones de + 2, – 1 y – 4 se conocen, entonces el valor de + 3 es fijo (obligado) para satisfacer la condición de que la suma de las desviaciones debe ser igual a 0. Así, 1 grado de libertad se pierde en el problema de muestreo que comprende la desviación estándar de la muestra ya que se conoce un número (la media aritmética).

El valor calculado de *t* es −1.530, que se obtiene mediante:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\$57 - \$60}{\frac{\$10}{\sqrt{26}}} = -1.53$$

Puesto que −1.53 se encuentra en la región de aceptación (a la derecha de − 2.485), la hipótesis nula de que μ = \$60 no se rechaza al nivel de 1%. Esto indica que no hay una reducción en el costo promedio en la investigación de una demanda por accidente. La media sigue siendo \$60.

AUTOEXAMEN 11-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Por registros pasados se sabe que la duración promedio de una pila eléctrica que se utiliza en un reloj digital es de 305 días. Las duraciones de las pilas se distribuyen normalmente. El elemento fue modificado recientemente para que tenga mayor duración. Se probó una muestra con 20 pilas modificadas, y se encontró que la vida media era de 311 días; la desviación estándar de la muestra fue de 12 días. Al nivel de significación de 0.05, ¿la modificación incrementó la vida media de las pilas?

1. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
2. Muestre gráficamente la regla de decisión.
3. Calcule *t* y adopte la decisión. Resuma brevemente sus resultados.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. El gerente de ventas del distrito Rocky Mountain de una compañía editorial de libros para universitarios, afirma que cada uno de sus representantes de ventas realiza 40 visitas a profesores por semana. Varios representantes dicen que esta estimación es muy baja. Para investigar tal declaración, una muestra aleatoria de 28 semanas reveló que el número medio de visitas semanales es de 42. Se calculó que la desviación estándar de la muestra es de 2.1 visitas. Al nivel de significación 0.05 pruebe la afirmación del gerente citado.
   a. Plantee la hipótesis nula y la alternativa.
   b. Muestre gráficamente la regla de decisión.
   c. Llegue a una decisión e interprétela.

2. La gerencia de White Industries está considerando un nuevo método de armado o ensamblaje de su carro de golf de tres ruedas. El método actual requiere 42.3 min en promedio para armar un carro. Se incorporó el nuevo método y se realizó un estudio de movimiento y tiempos con una muestra aleatoria de 24 vehículos. Se calculó que el tiempo medio de armado es de 40.6 min. La desviación estándar de la muestra es 2.7 min. Si se utiliza el nivel de significación 0.10, ¿puede decirse que el tiempo de armado con el nuevo método es significativamente menor que antes?

3. Los registros de Yellowstone Trucks revelaron que la vida o duración promedio de un juego de bujías eléctricas para motor es de 22 100 millas. La distribución de la duración de las bujías es casi normal. Un fabricante de bujías afirmó que sus productos tienen una vida media de más de 22 100 millas. El propietario de la flotilla de camiones adquirió un número grande de juegos de bujías. Una muestra de la duración de 18 juegos reveló que la vida promedio de la muestra era de 23 400 millas; la desviación estándar muestral fue de 1 500 millas. ¿Hay evidencia suficiente para aceptar la afirmación del fabricante al nivel 0.05?
4. Fast Service, una cadena de talleres para afinación de motores de automóvil, anuncia que su personal puede cambiar el aceite, el filtro de aceite y lubricar cualquier automóvil estándar en 15 min en promedio. La National Business Bureau ha recibido quejas de clientes acerca de que el servicio se efectúa en un tiempo mucho mayor. Para verificar la afirmación de Fast Service, la oficina envió a servicio 21 automóviles sin marca. La media del tiempo de servicio fue de 18 min, y la desviación estándar de la muestra fue 1 min. Utilice el nivel de significación 0.05 para probar lo razonable de la afirmación de Fast Service.

En los ejemplos anteriores se proporcionaron la media y la desviación estándar de la muestra. En los siguientes ejemplos se necesita calcular estas medidas a partir de observaciones muestrales.

✱ Ejemplo

La longitud promedio de un elemento de equilibrio es 43 mm. Se cree que los ajustes en la máquina, que producen los elementos, hayan cambiado la longitud. La hipótesis nula, que se probará al nivel 0.02, es que no hay cambios en la longitud media $\mu = 43$. La hipótesis alternativa es que ha ocurrido un cambio $\mu \neq 43$.

Se seleccionaron aleatoriamente doce elementos ($n = 12$) y se registró su longitud. Las medidas son (en milímetros) 42, 39, 42, 45, 43, 40, 39, 41, 40, 42, 43 y 42. ¿Ha habido un cambio estadísticamente significativo en la longitud media de los elementos?

✔ Solución

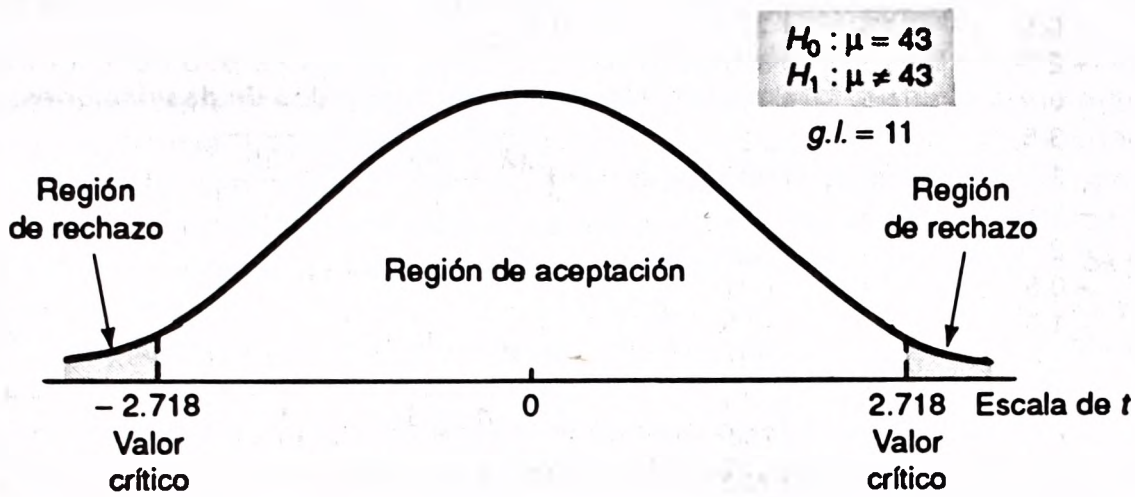
Las hipótesis nula y alternativa son:

$$H_0 : \mu = 43$$
$$H_1 : \mu \neq 43$$

La hipótesis alternativa no indica una dirección, por lo que se trata de una prueba de dos colas. Hay 11 grados de libertad, que se obtienen por $n - 1 = 12 - 1 = 11$. Por lo que, consultando el apéndice F para una prueba de dos colas en el nivel 0.02, el valor crítico es 2.718. Los valores críticos para el nivel 0.02 se muestran en el diagrama 11-4. Por tanto, la regla de decisión es rechazar la hipótesis nula si el valor calculado t no se encuentra entre + 2.718 y – 2.718. De otra manera se acepta H_0, que expresa que la longitud media de los elementos es 43 mm.

DIAGRAMA 11-4

Regiones de aceptación y rechazo, prueba de dos colas, distribución *t* de Student, $\alpha = 0.02$



La desviación estándar de la muestra puede determinarse elevando al cuadrado las desviaciones con respecto a la media, o mediante una fórmula de equivalencia que utiliza los cuadrados de los valores reales. Las dos fórmulas, obtenidas en el capítulo 4, son:

Con las desviaciones cuadráticas respecto a la media:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}}$$

Con los cuadrados de los valores reales:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}}$$

Los cálculos necesarios para estos dos métodos se muestran en la tabla 11-2. La media $\overline{X}$ es 41.5 mm, y la desviación estándar (s) vale 1.78 mm.

Ahora es fácil calcular t.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{41.5 - 43.0}{\frac{1.78}{\sqrt{12}}} = -2.92$$

La hipótesis nula de que la media poblacional es 43 mm se rechaza al nivel de significación 0.02 (ya que el valor t calculado de – 2.92 se encuentra en el área de la cola más allá del valor crítico de – 2.718). La hipótesis alternativa de que la media no es 43 mm se acepta. Aparentemente la máquina está desajustada y esto debe informarse al ingeniero de control de calidad.

TABLA 11-2

Cálculos necesarios para la desviación estándar de la muestra

X (mm)	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$	X^2
42	0.5	0.25	1 764
39	– 2.5	6.25	1 521
42	0.5	0.25	1 764
45	3.5	12.25	2 025
43	1.5	2.25	1 849
40	– 1.5	2.25	1 600
39	– 2.5	6.25	1 521
41	– 0.5	0.25	1 681
40	– 1.5	2.25	1 600
42	0.5	0.25	1 764
43	1.5	2.25	1 849
42	0.5	0.25	1764
498	0	35.0	20 702

$$\overline{X} = \frac{498}{12} = 41.5 \text{ mm}$$

Método de los cuadrados de desviaciones:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{35}{12 - 1}} = 1.78$$

Cuadrados de valores reales:

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}} = \sqrt{\frac{20{,}702 - \frac{(498)^2}{12}}{12 - 1}}$$

$$= 1.78$$

RESULTADOS POR COMPUTADORA

MINITAB, programa desarrollado en Pennsylvania State University, proporciona un modo adecuado de realizar los cálculos de rutina para la desviación estándar y para evaluar *t*. Primero se incorporan los datos en el sistema MINITAB. En segundo lugar, se utiliza el procedimiento denominado TTEST, y se especifica que la media poblacional es 43. Obsérvese que el resultado final es aproximadamente igual al que se calculó con anterioridad (– 2.91).

```
MTB>SET C2
DATA>42,39,...,42
DATA>END
MTB>NAME C2 'LENGTH'
MTB>TTEST MU=43,C2
TEST OF MU = 43.000 VS MU N.E.43.000
                N      MEAN     STEDV    SE MEAN       T    P VALUE
Length         12    41.500     1.784      0.515   -2.91      0.014
MTB>PRINT C2
Length
  42   39   42   45   43   40   39   41   40   42   43   42
```

EJERCICIOS

5. Con base en la experiencia en la cría de pollos Pure Rock, su peso promedio a los cinco meses de edad es de 1.35 libras. Los pesos se distribuyen normalmente. En un intento para incrementar el peso durante tal periodo, se mezcló un aditivo especial al alimento de las aves. Los siguientes pesos de una muestra de pollos de cinco meses de edad

fueron (en libras): 1.41, 1.37, 1.33, 1.35, 1.30, 1.39, 1.36, 1.38, 1.40 y 1.39. Al nivel 0.01, ¿el aditivo especial ha incrementado el peso de los pollos?
a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
b. ¿Cuál es la regla de decisión?
c. ¿A qué decisión se llega respecto a la eficacia del nuevo aditivo?

6. El cloro líquido que se agrega al agua de piscinas para combatir los organismos de la especie alga tiene una duración de almacenamiento relativamente corta antes de que pierda su eficacia. Los registros indican que la vida promedio de almacenamiento de una botella con 5 galones de cloro es 2 160 horas (90 días). Como un experimento, se agregó el producto Holdlonger al cloro para averiguar si permite incrementar esa duración en almacenamiento. Una muestra de nueve botellas de cloro proporcionó los siguientes valores (en horas): 2 159, 2 170, 2 180, 2 179, 2 160, 2 167, 2 171, 2 181 y 2 185. Al nivel de significación 0.025. ¿Incrementó Holdlonger el tiempo útil de almacenamiento del cloro?
7. Las pesquerías Wyoming afirman que el número de truchas que se atraparon durante un día completo de pesca con caña en el río Snake, Buffalo, y otros ríos y arroyos en el área de Jackson Hole, es de 4.0. Para realizar su actualización anual, les pidió a una muestra de pescadores con caña que contaran el número de truchas que atrapan durante el día. Los números fueron: 4, 4, 3, 2, 6, 8, 7, 1, 9, 3, 1 y 6. Al nivel 0.05, ¿hay evidencia convincente de que ha aumentado el número de truchas que se atrapan al día?
8. Una empresa de encuestas afirma que un agente realiza 53 investigaciones a fondo en hogares cada semana. Se presentó un formulario de encuesta moderno y la compañía desea evaluar su eficacia. Las encuestas realizadas durante una semana por una muestra aleatoria de agentes son: 53, 57, 50, 55, 58, 54, 60, 52, 59, 62, 60, 60, 51, 59 y 56. Al nivel 0.05, ¿cuál es su conclusión acerca del número de encuestas que se concluyeron durante una semana utilizando el nuevo formulario?

AUTOEXAMEN 11-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Se instala una máquina Corkill para llenar botellas pequeñas con 9.0 gramos de medicamento. Se afirma que el peso medio es de menos de 9.0 gramos. La hipótesis se probará al nivel 0.01. Una muestra señaló estos pesos (en gramos): 9.2, 8.7, 8.9, 8.6, 8.8, 8.5, 8.7 y 9.0.

1. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
2. ¿Cuántos grados de libertad hay?
3. Proporcione la regla de decisión.
4. Calcule *t* y adopte una decisión.

* Ejemplo

Se han propuesto dos procedimientos para armar un componente pequeño. La pregunta es: ¿qué método es más eficaz, el desarrollado por Manley (que se designa como No. 1), o el desarrollado por Fox (que se designa como No. 2)? Para evaluar objetivamente los dos métodos propuestos, se decidió realizar estudios de movi-

mientos y tiempos para algunos componentes. El objetivo de estos estudios es comparar los tiempos medios de ensamblado por unidad para los dos procedimientos.

La hipótesis nula plantea que no hay diferencia en el tiempo medio de armado entre los procedimientos No. 1 y el No. 2.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

En esta aplicación de la distribución t se supone que: 1) Las observaciones en la muestra para el No. 1 son *independientes* de las observaciones en la muestra para el No. 2, y entre sí. 2) Las dos poblaciones son aproximadamente normales. 3) Las dos poblaciones tienen variancias iguales.

Una fórmula conveniente para t es:

$$\boxed{t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}}$$

con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, en donde:

- X_1 es el valor medio aritmético del tiempo necesario para armar el componente utilizando el procedimiento No. 1.
- $\overline{X}_2$ es el valor medio aritmético del tiempo necesario para armar el componente usando el procedimiento No. 2.
- n_1 es el número en la muestra para el No. 1.
- n_2 es el número en la muestra para el No. 2.
- s_1^2 es la variancia de la primera muestra.
- s_2^2 es la variancia de la segunda muestra.

Se usará el nivel 0.10 de significación para probar la diferencia entre las dos medias.

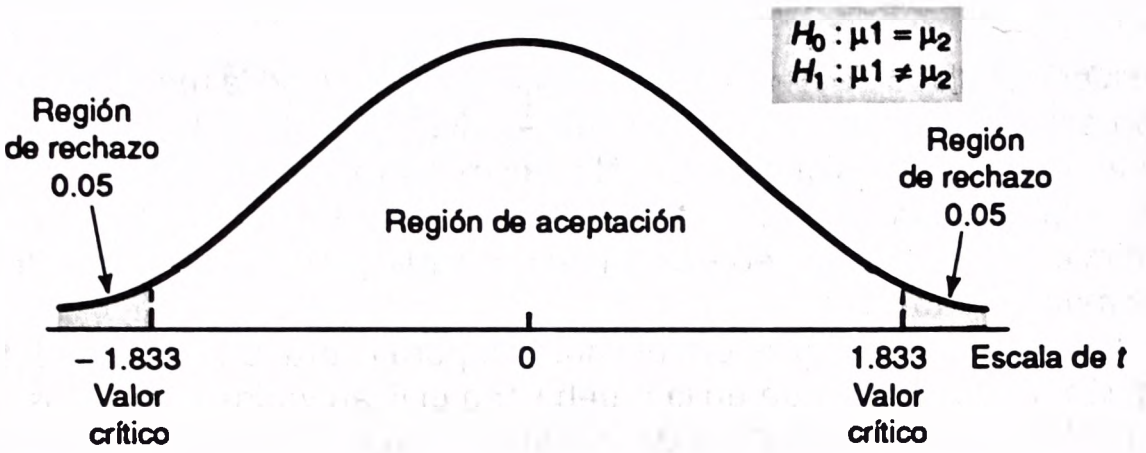
✔ Solución

El objetivo es determinar si existe diferencia entre los dos métodos de armado. Por tanto, se emplea una prueba de dos colas. La regla de decisión depende del tamaño combinado de muestra y, por supuesto, el nivel de significación seleccionado. Como se observó, los grados de libertad se calculan mediante $n_1 + n_2 - 2$. Se seleccionan cinco componentes del No. 1 y cinco componentes del No. 2. Por tanto, hay 9 grados de libertad, que se obtienen por $5 + 6 - 2$. Los valores críticos de t según el apéndice F para $g.l. = 9$, una prueba de dos colas, y el nivel 0.10 son + 1.833 y − 1.833. La regla de decisión se muestra gráficamente en el diagrama 11-5.

El cálculo de la distribución t de Student puede efectuarse en dos pasos. Primero, se calcula la variancia de cada muestra. Segundo, se determina el valor del estadístico de prueba t.

DIAGRAMA 11-5

Regiones de aceptación y de rechazo, prueba de dos colas (9 grados de libertad, $\alpha = 0.10$)



Paso 1. Cálculo de variancias

Procedimiento 1		*Procedimiento 2*	
X_1	X_1^2	X_2	X_2^2
2	4	3	9
4	16	7	49
9	81	5	25
3	9	8	64
2	4	4	16
20	114	3	9
		30	172

$$s_1^2 = \frac{\Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1}}{n - 1} \qquad s_2^2 = \frac{\Sigma X_2^2 - \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2}}{n - 1}$$

$$= \frac{114 - \frac{(20)^2}{5}}{5 - 1} \qquad = \frac{172 - \frac{(30)^2}{6}}{6 - 1}$$

$$= 8.5 \qquad = 4.4$$

Paso 2. Determinación de t Obsérvese que $\overline{X}_1 = 20/5 = 4$ y $\overline{X}_2 = 30/6 = 5$.

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{4 - 5}{\sqrt{\left(\frac{(5 - 1)8.5 + (6 - 1)4.4}{5 + 6 - 2}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}}$$

$$= -0.662 \text{ minutos}$$

El valor calculado de t(– 0.662) se encuentra dentro de la región de aceptación, que con anterioridad se señaló es entre + 1.833 y – 1.833. La hipótesis nula se acepta al nivel 0.10 de significación. No existe diferencia entre las dos medias; es decir $\mu_1 = \mu_2$ (usando el nivel 0.10). La diferencia de 1 min entre la media de 4 min (procedimiento No. 1) y la media de 5 min (procedimiento No. 2) probablemente se debe al muestreo (azar).

Uno de los términos en la fórmula anterior para la prueba t de Student necesita explicación. Recuérdese que en la prueba t se utilizan varios supuestos. El primer término subradical "combina" las dos variancias muestrales en un solo estimador de la variancia poblacional desconocida:

$$\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

RESULTADOS POR COMPUTADORA

Se ha presentado un gran número de resultados por computadora. La mayoría de ellos se obtuvieron empleando el sistema MINITAB. Otro paquete de programática (software) estadística se denomina SAS. A continuación se presenta el resultado obtenido usando el SAS para el anterior estudio de tiempos. Obsérvese que el valor de t (– 0.6621) es igual al calculado con anterioridad.

```
                    TIME STUDY ANALYSIS
                    TTEST PROCEDURE
VARIABLE: SCORE
GROUP                N          MEAN        STD DEV      STD ERROR

PROCEDURE ONE        5    4.00000000    2.91547595    1.30384048
PROCEDURE TWO        6    5.00000000    2.09761770    0.85634884

FOR HO : VARIANCES ARE EQUAL , F' =   1.93 WITH 4 AND 5 DF PROB > F' = 0 .4871

   MINIMUM       MAXIMUM      VARIANCES          T        DF     PROB > |T|
2.00000000    9.00000000    UNEQUAL        -0.6411      7.1        0.5416
3.00000000    8.00000000    EQUAL          -0.6621      9.0        0.5245
                                              ↑
                                          valor de t
```

AUTOEXAMEN 11-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los pesos netos de las botellas de una muestra que llenó una máquina fabricada por Edne, y los pesos netos en una muestra de botellas llenadas por una máquina similar que manufactura Orno, Inc., son (en gramos):

Edne: 5, 8, 7, 6, 9 y 7
Orno: 8, 10, 7, 11, 9, 12, 14 y 9

Pruebe la afirmación al nivel 0.05 de que el peso medio de las botellas que llena la máquina Orno es mayor que el peso medio de las botellas que llena la máquina Edne.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Una muestra de las calificaciones en un examen que presentaron hombres y mujeres en un curso de Estadística son:

   Hombres: 72, 69, 98, 66, 85, 76, 79, 80 y 77
   Mujeres: 81, 67, 90, 78, 81, 80 y 76

   Pruebe la hipótesis al nivel 0.01 de que la calificación media de las mujeres es más alta que la de los hombres.

10. Las calificaciones de dos grupos de reclusos de una prisión en una prueba de rehabilitación son:

	Delincuentes por primera vez	*Delincuentes consuetudinarios*
Calificación media	300	305
Variancia muestral	20	18
Tamaño de muestra	16	13

   Pruebe al nivel 0.05 que no hay diferencia entre las calificaciones medias de los dos grupos. La hipótesis alternativa es que sí hay una diferencia.

11. Como un experimento, un servicio meteorológico realizó 22 conteos de polen en el valle que rodea al poblado de Wilson, Wyoming (altitud, 6 200 pies). De manera semejante, se realizaron 25 conteos en la región del monte Teton que rodea a Wilson (altitud, 7 800 pies). Los resultados fueron:

	Valle	*Monte*
Conteo medio de polen	89	87
Desviación estándar muestral	4	6
Tamaño de muestra	22	25

   Pruebe al nivel 0.10 que hay un conteo mayor de polen en el valle de Wilson que en los montes cercanos.

12. El Kentucky Highway Department está considerando construir una nueva autopista de cuatro carriles. Han surgido varias preguntas. Una de ellas se refiere a la velocidad de los camiones en una autopista de cuatro carriles con un carril central de más de 50 pies, en comparación con una autopista con un carril central de menos de 50 pies.

    Para investigar con más detalle este aspecto, se midió la velocidad de los camiones que circulan en dos tipos de autopistas (las velocidades se dan en millas por hora).

Menos de 50 pies	*Más de 50 pies*	
55	64	65
70	68	75
68	70	63
67	70	66
70	65	49

Con base en esta información muestral preliminar y utilizando el nivel 0.01, ¿es posible decir que hay una diferencia significativa en las velocidades de los camiones en las dos autopistas? ¿Qué acción, si es que existe alguna, sugeriría que adoptara ese departamento de vialidad?

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA OBSERVACIONES POR PARES

En el problema anterior se probó la diferencia entre dos medias poblacionales. Se utilizó como ejemplo la diferencia en los tiempos requeridos para construir un componente utilizando el llamado método Manley y empleando el denominado método Fox. Las muestras eran *independientes*, es decir, que la muestra de los tiempos de producción utilizando el método Manley no estaba relacionada en forma alguna con la muestra de los tiempos de producción usando el método Fox.

Sin embargo, hay casos en los que las muestras *no* son independientes. Como ejemplo, suponga que el director de instrucción desea determinar si un programa de entrenamiento especial acrecienta o no la eficiencia de los empleados. El director tomará una muestra aleatoria de trabajadores inscritos en el programa y registrará su índice de eficiencia antes de iniciar el ensayo. Una vez concluido el programa, se anotará la eficiencia de la *misma* muestra de empleados. Así, habrá un par de índices de eficiencia para cada miembro de la muestra. El conjunto de pares de muestras se denomina *muestra por pares*. La prueba de hipótesis que se realizará para determinar si hay diferencia entre los índices antes y después del programa de entrenamiento es una *prueba de diferencia por pares*. Obsérvese que las dos muestras (una muestra "antes" y una muestra "después") dependen entre sí debido a que los mismos empleados están en ambas muestras. Por tanto, no son independientes.

Para la prueba de hipótesis que se realizará, en sí hay una sola muestra, no dos. La muestra está constituida por las *diferencias* entre los índices de eficiencia antes del programa de entrenamiento y los índices después del programa. Si los métodos de producción antes y después del programa mencionado son los mismos, lógicamente podría esperarse que algunos empleados se beneficiaran con el programa y se volvieran más eficientes. Otros empleados preferirían el método que usaban antes del programa y su eficiencia se mantendría igual o incluso disminuiría.

Así, la media de las diferencias en los índices de eficiencia, que se designa mediante μ_d, resultaría "compensada" y sería igual a cero.

Antes de adoptar las nuevas técnicas de producción que se presentan en el programa de entrenamiento, el director de éste desea saber si el programa afectará o no la eficiencia. Si fuera así, se supondría con razón que la mayoría de las diferencias serían positivas, es decir, que aumentó la eficiencia. Por tanto, la hipótesis nula que se probará es H_0: $\mu_d = 0$.La hipótesis alternativa es que la media de las diferencias es mayor que 0, lo cual se escribe H_1: $\mu_d > 0$, y significa que las diferencias son positivas.

Se usará el nivel 0.05 de significación y el estadístico de prueba es la *t* de Student, determinada mediante:

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

con $n - 1$ grados de libertad, en donde:

- $\bar{d}$ es la diferencia media entre las observaciones por pares.
- s_d es la desviación estándar de las diferencias entre las observaciones por pares.
- n es el número de observaciones por pares.

La desviación estándar de las diferencias se calculó, como antes, mediante:

El valor crítico de *t* para esta prueba de una cola de diferencias por pares es

$$s_d = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 - \frac{(\Sigma d)^2}{n}}{n - 1}}$$

1.833, que se obtiene consultando el apéndice F y leyendo hacia abajo la columna izquierda hasta $n - 1 = 10 - 1 = 9$ grados de libertad.

Se emplea el siguiente procedimiento para determinar *t*:

Miembro de la muestra	*Indice de eficiencia*		*Diferencia d*	*Diferencia al cuadrado, d^2*
	Antes	*Después*		
1	128	135	7	49
2	105	110	5	25
3	119	131	12	144
4	140	142	2	4
5	98	105	7	49
6	123	130	7	49
7	127	131	4	16
8	115	110	−5	25
9	122	125	3	9
10	145	149	4	16
			46	386

en donde

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d}{n} = \frac{46}{10} = 4.60$$

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{4.6}{\frac{4.40}{\sqrt{10}}} = 3.30$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 - \frac{(\Sigma d)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{386 - \frac{(46)^2}{10}}{10-1}} = 4.40$$

Puede emplearse el sistema MINITAB para realizar la prueba *t* de diferencias por pares. Primero, se introducen en la computadora los índices de eficiencia antes y después del programa especial. Segundo, se calcula la diferencia entre los índices antes y después del programa de entrenamiento. Por último, se utiliza el procedimiento TTEST para calcular el valor de *t*.

```
MTB > set c1
DATA > 128,105,...,145
MTB > set c2
DATA > 135,110,...,149
MTB > let c3=c2-c1
MTB > name c1 'before' c2 'after' c3 'diff'
MTB > print c1 c2 c3
MTB > ttest mu=0 c3;
SUBC> alternate=1

TEST OF MU = 0.000 VS MU G.T. 0.000

        N      MEAN      STDEV     SE MEAN       T      P VALUE
diff   10     4.600      4.402       1.392    3.30       0.0046
                                              valor de t
```

El valor calculado de *t* (que se denota con T en el resultado obtenido con MINITAB) es 3.30 (igual al que se calculó antes). Puesto que el valor calculado de *t* (3.30) se encuentra en la región de rechazo, es decir, más allá de 1.833, se descarta la hipótesis nula al nivel 0.05, y se acepta la hipótesis alternativa de que la media de las diferencias es mayor que 0. El director de entrenamiento tiene pruebas convincentes de que el programa especial fue eficaz para aumentar la eficiencia.

El sistema MINITAB proporciona información adicional acerca de la "fuerza" del rechazo. Consulte la sección en el resultado de MINITAB bajo el encabezado "P VALUE". Esto da la probabilidad correspondiente a una cola de determinar un valor *t* de 3.30 o mayor con 9 grados de libertad. Por tanto, se está en condiciones de evaluar la fuerza del rechazo. Un valor *p* ligeramente menor que 0.05 habría indicado que H_0 apenas se rechazó, en tanto que un valor *p* mucho menor que 0.05

indica que H_0 se rechazó con más fuerza. En resumen, suponiendo que H_0 es verdadera, un valor p es la posibilidad de especificar un resultado muestral menos probable que el observado.

En el autoexamen y los ejercicios siguientes del capítulo se sugieren otros usos de la prueba de hipótesis para observaciones por pares.

AUTOEXAMEN 11-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una estación agrícola experimental de Iowa planea probar la eficacia de dos soluciones prerremojantes para semillas de maíz. El objetivo del experimento es determinar si hay diferencia en la eficacia de las dos soluciones, designadas solución A y solución B. Varias semillas de maíz, como Iowa Whopper y Tyson Gold, se usarán en el experimento. Se selecciona un par de semillas Iowa Whopper; una se remoja en la solución A y la otra en la solución B. Después se siembran y se registran los tiempos de germinación y crecimiento (en días). Se repite este procedimiento para Tyson Gold y las otras semillas. El número de días necesarios para la germinación y el crecimiento hasta 6 pulg se muestra para cada par en la tabla que se presenta a continuación.

1. Plantee simbólicamente la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.
2. Utilice el nivel 0.05 y muestre los valores críticos gráficamente.
3. Use los siguientes nueve pares de datos muestrales, calcule t y establezca una decisión.

	Par								
Solución	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Solución A	16	9	21	14	26	27	18	14	30
Solución B	18	7	26	11	26	22	19	20	28

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. Se realizará un estudio en una universidad (Belden) para medir el efecto del cambio ambiental en los estudiantes extranjeros. Uno de los temas de este estudio es una comparación del peso de los alumnos al llegar a la universidad, con su peso un año más tarde. Se plantea la hipótesis de que los alimentos, más nutritivos que se ingieren en Estados Unidos, provocan incremento de peso. La hipótesis alternativa es que hay un aumento de peso. Se utilizará el nivel 0.01, y se selecciona una muestra aleatoria de 11 estudiantes extranjeros para el estudio.
    a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
    b. Muestre gráficamente la regla de decisión.
    c. A continuación se presentan los datos muestrales por pares. Aplique los procedimientos de prueba necesarios y tome una decisión.

Apellido	Peso al llegar	Peso un año después
Nassar	124	142
O'Toole	157	157
Obie	98	96
Silverman	190	212
Kim	103	116
Gross	135	134
Farouk	149	150
Thatcher	176	184
Sambul	200	209
Onassis	180	180
Pierre	256	269

14. La gerencia de una cadena de almacenes establecida en el noreste, diseñó un plan de incentivos para los vendedores. Para evaluar este plan innovador, se seleccionaron 12 empleados aleatoriamente y se registró su ingreso promedio diario antes y después del plan.

	Ingreso diario			Ingreso diario	
Vendedor(a)	Antes	Después	Vendedor(a)	Antes	Después
Sid Mahone	$320	$340	Peg Mancuso	$625	$631
Carol Quick	290	285	Anita Loma	560	560
Tom Jackson	421	475	John Cuso	360	365
Andy Jones	510	510	Carl Utz	431	431
Jean Sloan	210	210	A. S. Kushner	506	525
Jack Walker	402	500	Fern Lawton	505	619

¿Hubo un incremento significativo en el ingreso diario de los vendedores debido al plan innovador de incentivos? Utilice el nivel 0.05:

a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
b. Formule por escrito la regla de decisión.
c. Utilice los datos muestrales por pares y tome una decisión.
d. Explique la decisión a la gerencia, pero observe los costos posibles, los efectos en el personal de ventas, etc.
e. ¿El valor p sería mayor o menor que 0.05? ¿Por qué?

15. Pound Watchers, una cadena nacional de centros para ejercicio físico y dieta, tiene un nuevo programa de reducción de peso diseñado para lograr resultados notables después de tres semanas. Como consecuencia de su publicidad, más de 100 personas se inscribieron en el programa. Cada una se pesó antes y después del periodo inicial de tres semanas. Los resultados de una muestra de 10 personas inscritas son:

	Peso			Peso	
Nombre	Antes	Después	Nombre	Antes	Después
Evie Gorky	190	196	Pat O'Leary	86	89
Bob Mack	250	240	Kim Dennis	186	189
Lou Brandon	345	345	Connie Kaye	96	95
Karl Unger	210	212	Tom Dama	196	194
Sue Koontz	114	113	Maxine Sims	125	124

Al nivel de significación 0.01, ¿es posible decir que el nuevo programa de reducción de peso es un éxito?

16. Se realizó un estudio de más de 100 zonas de alta delincuencia en Santa Bárbara, California. Se registró el número de delitos en cada una de ocho áreas de muestreo durante un periodo de un año. Después se puso en marcha un programa de vigilancia por parte de los vecinos. En la siguiente tabla se muestra el número de delitos antes y después del programa de vigilancia. ¿Ha habido una disminución en el número de actos delictivos desde que se inició el programa?

	Número de delitos por área							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Antes de la vigilancia	14	7	4	5	17	12	8	9
Después de la vigilancia	2	7	3	6	8	12	3	5

a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
b. Pruebe al nivel 0.01, y muestre la regla de decisión gráficamente.
c. Aplique el procedimiento de prueba y tome una decisión respecto a la hipótesis nula.

RESUMEN

En este capítulo se estudió la prueba de hipótesis que comprende muestras pequeñas usando la distribución *t*. *Pequeña* significa un tamaño de muestra de menos de 30. Para usar la distribución *t* como estadístico de prueba en problemas con muestras pequeñas, la población o poblaciones, debe estar distribuida normalmente o ser casi normal.

Se examinaron tres tipos de problemas de prueba de hipótesis. El primero se refiere a lo razonable de una sola media poblacional, el segundo a la diferencia entre dos medias poblacionales. En el último caso, las muestras son independientes, es decir, no están relacionadas. El tercer tipo de problema comprende muestras por pares que son dependientes, es decir, que están relacionadas de alguna manera. Por lo general en estos casos, la misma persona u objeto es un miembro de ambas muestras.

Recapitulación

I. El objetivo de las pruebas de hipótesis usando muestras pequeñas es probar la validez de afirmaciones cuantitativas.
II. La distribución *t* de Student.
   A. Se utiliza cuando:
      1. El tamaño de muestra es de menos de 30.
      2. La población o poblaciones están distribuidas normalmente o casi normalmente.
   B. Características de la prueba *t* de Student.
      1. Es una distribución continua.
      2. Tiene forma de campana y es simétrica.
      3. Hay una familia de distribuciones *t*. Todas tienen la misma media, cero, pero diferentes desviaciones estándares, dependiendo del tamaño de muestra.
      4. Es más extendida en la base que la distribución normal estándar y más achatada en la cúspide de la curva.

III. La fórmula para una prueba de hipótesis sobre una media poblacional utiliza la distribución t de Student.

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

con n - 1 grados de libertad, en donde:

$\overline{X}$ es la media muestral.
μ es la media poblacional hipotética.
s es la desviación estándar muestral.
n es el número en la muestra.

IV. Supuestos y fórmulas para una prueba de hipótesis que expresa la diferencia entre dos medias poblacionales.

A. Supuestos
1. Las observaciones en una muestra son independientes de las observaciones en la otra muestra e independientes entre sí.
2. Las dos poblaciones son normales.
3. Las dos poblaciones tienen variancias iguales.

B. Fórmulas
1. La fórmula para el estadístico de prueba t:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

2. La fórmula para las variancias muestrales s_1^2 y s_2^2

$$s^2 = \frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n}}{n - 1}$$

V. Si las muestras son dependientes (por pares):

$$t = \frac{\overline{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

en donde:

$$\overline{d} = \frac{\Sigma d}{n} \qquad s_d = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 - \frac{(\Sigma d)^2}{n}}{n - 1}}$$

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

17. Un fabricante de motocicletas anuncia que su vehículo rendirá en promedio 87 millas por galón en viajes largos. La distancia recorrida (en millas) en ocho viajes largos fue 88, 82, 81, 87, 80, 78, 79 y 89. Pruebe al nivel 0.05 que el recorrido medio es menor que el anunciado.
18. Un entrenador de futbol americano señaló que, con base en los registros, el peso medio de los jugadores defensivos de la línea es de 235 libras. Una muestra de 10 jugadores de la línea reveló este año que el peso medio es de 240 libras, y la desviación estándar de la muestra es 11 libras. Al nivel 0.01, ¿hay evidencia suficiente de que aumentó el peso medio?
19. Dos grupos iguales de plantas de vivero se seleccionaron para un experimento, y todas las plantas tenían el mismo peso. A un grupo se le agregó un fertilizante 10-10-40, y al otro un fertilizante 20-20-20. A continuación se presentan los pesos medios de los dos grupos de plantas después de un periodo y otros datos pertinentes. (Recuérdese que la variancia es el cuadrado de la desviación estándar.)

Fertilizante	*Altura media de la muestra (plg)*	*Desviación estandar de la muestra (plg)*	*Tamaño de la muestra*
10–10–40	12.92	0.25	15
20–20–20	12.63	0.20	13

Al nivel 0.025, determine si el grupo de plantas de vivero a las que se fertilizó con 10–10–40 tiene o no una altura media mayor que el grupo al que se fertilizó con 20–20–20.

20. Las muestras de índices de eficiencia de los empleados de Allied Chemicals en sus plantas No. 1 y No. 2 son:

Planta No. 1	*Planta No. 2*
160	163
158	161
162	160
161	162
160	163
160	162
161	164
159	163
159	165
160	162
	159
	160

Al nivel 0.02, pruebe que $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ utilizando la hipótesis alternativa H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

21. Un operador de una taladradora debe realizar varias pruebas de seguridad antes de taladrar realmente una placa de acero. El operador debe mantener cerrado con una mano el interruptor de ENCENDIDO (START) y realizar acciones de seguridad con la otra mano. Los operadores trabajan a destajo, por lo que desean hacer su trabajo en la forma más eficiente posible. Doce operadores que se seleccionaron aleatoriamente

participaron en un experimento. Durante un periodo de una semana los operadores usaron la mano izquierda para mantener cerrado el interruptor de ENCENDIDO. Durante la segunda semana mantuvieron el interruptor cerrado con la mano derecha. A continuación se muestra el número de operaciones de taladrado que efectuaron cada semana:

	Producción por número de operador											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Mano izquierda	1 240	1 137	942	1 105	846	1 216	1 190	840	892	1 115	1 260	550
Mano derecha	1 248	1 130	940	1 105	849	1 221	1 180	841	890	1 120	1 257	551

¿Los resultados muestrales por pares proporcionan suficiente evidencia para rechazar la afirmación de que no hay diferencia entre el uso de la mano izquierda y el uso de la mano derecha para mantener cerrado el interruptor y realizar las pruebas de seguridad con la otra mano? Utilice el nivel 0.05.

22. Varios accidentes automovilísticos menores ocurrieron en varios cruces de alto riesgo en un distrito urbano a pesar de las luces de tránsito (semáforos). El departamento de vialidad afirma que una modificación en el tipo de semáforo reducirá los accidentes. El director de tránsito está de acuerdo en realizar un experimento que se propone. Se eligieron aleatoriamente ocho cruces y se modificaron los semáforos correspondientes. El número de accidentes menores durante un periodo de seis meses antes y después de las modificaciones fue:

	Número de accidentes por cruce							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Antes de la modificación	5	7	6	4	8	9	8	10
Después de la modificación	3	7	7	0	4	6	8	2

¿Las modificaciones redujeron el número de accidentes en los cruces de alto riesgo? Pruebe lo anterior al nivel de 1%.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. El gerente de un establecimiento de comestibles está realizando un estudio de la cantidad que gastan los clientes en la tienda. Una muestra de 10 compradores matutinos entre semana y 15 clientes matutinos en sábado reveló que gastaron las siguientes cantidades:

Entre semana	*Sábado*
$18.88	$21.54
24.33	34.76
27.26	45.78
35.79	46.87
42.31	56.78
53.77	66.04
62.94	68.45
73.59	70.98
76.51	72.67
88.09	76.89
	81.65
	85.61
	91.87
	94.71
	95.80

El propietario cree que los compradores matutinos de sábado gastan un promedio de $10 más que los compradores entre semana. ¿Estos datos fundamentan la afirmación del propietario? Utilice el nivel de significación 0.05.

2. A continuación se presentan los números de home runs que anotaron los beisbolistas más destacados de las Ligas Americana y Nacional desde 1960. ¿Parece haber una diferencia entre el número de home runs anotados durante este periodo? Utilice el nivel de significación 0.05.

Año	*Americana*	*Nacional*	*Año*	*Americana*	*Nacional*
1960	40	41	1974	32	36
1961	61	46	1975	36	38
1962	48	49	1976	32	38
1963	45	44	1977	39	52
1964	49	47	1978	46	40
1965	32	52	1979	45	48
1966	49	44	1980	41	48
1967	44	39	1981	22	31
1968	44	36	1982	39	37
1969	49	45	1983	39	40
1970	44	45	1984	43	36
1971	33	48	1985	40	37
1972	37	40	1986	40	37
1973	32	44	1987	49	49

3. Calcule el total de home runs de cada año. Compare las anotaciones en la década de 1970 con las de las décadas de 1960 y 1980 combinadas. Considere que $\alpha = 0.05$. (No tome en cuenta los datos de 1981, ya que fue un año de strikes y la temporada se acortó.)
4. Los siguientes números indican los años cuando el primer magistrado (o presidente) de la Suprema Corte de Estados Unidos ocupó ese cargo.

5	0	4	34	28	8	14
21	10	8	11	4	7	15
17						

¿Si se tuviera que describir la permanencia de esos funcionarios, estaría dispuesto a afirmar que el magistrado común se mantiene más de 10 años en el puesto?

EXAMEN CAPITULO 11

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En las preguntas 1 a 10, indique si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, proporcione la respuesta correcta.

1. Para aplicar la prueba *t* de Student a un problema que tenga dos medias, las dos poblaciones deben ser normales o casi normales.
2. Se realizó una prueba sobre una media poblacional. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 22 piezas de acero. Hay 22 grados de libertad.
3. A medida que aumenta el tamaño de la muestra, la distribución *t* tiende a aproximarse a la distribución normal estándar.
4. Sólo hay una distribución *t* y tiene una media igual a cero.

5. En términos generales, la distribución t de Student se utiliza cuando el tamaño de muestra es de menos de 30.
6. En la prueba de la diferencia entre dos medias poblacionales, los grados de libertad son $n_1 + n_2 - 2$.
7. En la prueba t se supone que las variancias de las dos poblaciones son iguales, o aproximadamente iguales.

Las preguntas 8 –10 se basan en lo siguiente:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ y $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
Los tamaños de muestra son 12 y 11.
Se utilizará el nivel 0.05 de riesgo.

8. La prueba es de dos colas.
9. Los valores críticos de t son – 2.069 y + 2.069.
10. Si se calcula que el valor de t es – 0.999, se aceptaría la hipótesis nula.
11. Se presentó un método radicalmente nuevo para el tratamiento de fracturas óseas en piernas. La afirmación es que se ha reducido la duración del tiempo que el paciente debe estar enyesado y usar muletas. Los registros abundantes revelaron que el método antiguo, en promedio, se necesitan 20 días para recuperarse de una fractura. Una muestra aleatoria de 16 personas que recibieron el nuevo tratamiento reveló que la duración promedio necesaria para la recuperación fue de 18 días; la desviación estándar de la muestra fue 2.5 días. ¿Está fundamentada la afirmación referente al nuevo tratamiento al nivel 0.05? Plantee las hipótesis nula y alternativa, proporcione el valor crítico y adopte una decisión.
12. La ofensiva de un equipo de futbol americano emplea un gran número de jugadas complicadas que los jugadores deben aprender rápidamente al principio de la temporada. El coordinador de la ofensiva desea experimentar dos métodos de memorización de las jugadas, el método P-W (Pow Wow) y el método D-D (Ding Ding). Para probarlos, se seleccionaron aleatoriamente 10 pares de jugadores de cada posición y se ensayaron las diferentes jugadas. Un jugador de cada grupo aprendió la jugada usando el método P-W y el otro mediante el método D-D. Exactamente antes del primer partido contra el equipo rival, se probó la ejecución de las jugadas por los 10 pares de jugadores, obteniéndose los siguientes resultados:

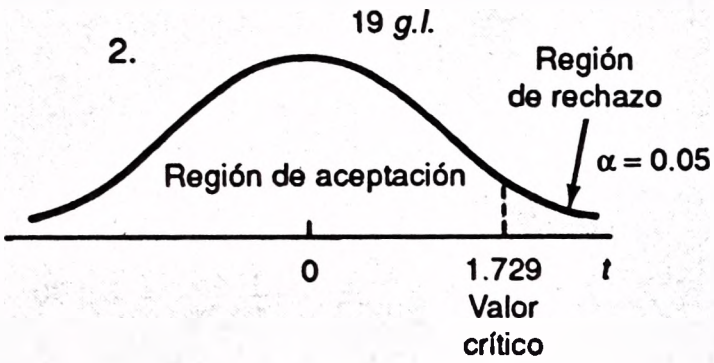
	Indices de prueba por grupo									
Método	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Método P-W	100	86	82	70	82	77	80	99	86	91
Método D-D	91	86	94	65	91	86	60	98	89	90

¿Esta información muestral indica al nivel de significación 0.05 que existe diferencia entre los dos métodos? Responda planteando H_0 y H_1, proporcione los valores críticos, calcule las estadísticas adecuadas y tome una decisión para rechazarlas o no H_0.

Autoexámenes

11-1 1.

2.



3. $$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{311 - 305}{\frac{12}{\sqrt{20}}}$$

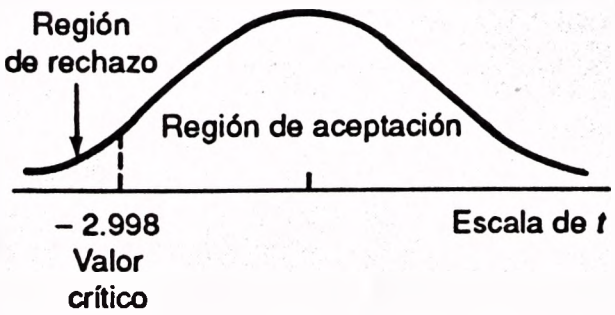
$$= 2.236$$

Se rechaza H_0, ya que 2.236 > 1.729. Se acepta H_1, que establece que la media es mayor a 305 días. Se concluye que la modificación aumentó la duración de la pila.

11-2 1. H0 : $\mu = 9.0$; $H_1 : \mu < 9.0$.

2. 7, que se obtiene mediante $n - 1 = 8 - 1 = 7$.

3. Se acepta la hipótesis nula si el valor calculado de t queda a la derecha de – 2.998. De otra manera se rechaza H_0 y se acepta H_1.



4. $t = -2.494$, que se obtiene mediante:

X	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$	X^2
9.2	0.4	0.16	84.64
8.7	– 0.1	0.01	75.69
8.9	0.1	0.01	79.21
8.6	– 0.2	0.04	73.96
8.8	0.0	0.00	77.44
8.5	– 0.3	0.09	72.25
8.7	– 0.1	0.01	75.69
9.0	0.2	0.04	81.00
70.4	0.0	0.36	619.88

$$\overline{X} = \frac{70.4}{8} = 8.8$$

$$s = \sqrt{\frac{0.36}{8 - 1}} = 0.2267785$$

o bien

$$s = \sqrt{\frac{619.88 - \frac{(70.4)^2}{8}}{8 - 1}} = 0.2267785$$

Entonces:

$$t = \frac{8.8 - 9.0}{\frac{0.2267785}{\sqrt{8}}} = -2.494$$

Puesto que – 2.494 se encuentra a la derecha de – 2.998 y está en la región de aceptación, la hipótesis nula de que $\mu = 9.0$ se acepta al nivel 0.01.

11-3 $\overline{X}_1 = 42/6 = 7$ $\quad H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$\overline{X}_2 = 80/8 = 10$ $\quad H_1 : \mu_1 = \mu_2$

El valor crítico de t es – 1.782 a partir del apéndice F. $n_1 + n_2 - 2 = 6 + 8 - 2 = 12$ grados de libertad.

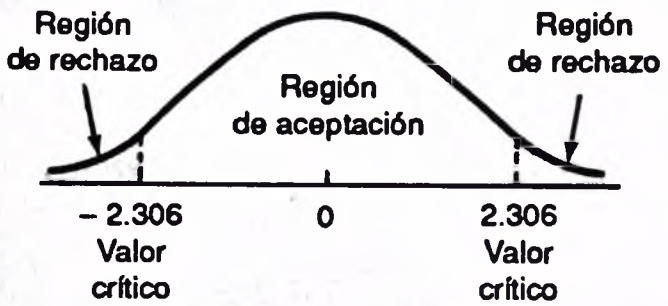
$$t = \frac{7 - 10}{\sqrt{\left(\frac{(6-1)2 + (8-1)5.142857}{6+8-2}\right)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)}}$$

$$= \frac{-3}{1.05738} = -2.837$$

Como – 2.837 queda en la cola izquierda más allá de –1 782, se rechaza la hipótesis nula al nivel 0.05. El peso medio de Orno es mayor que el peso medio de Edne.

11-4 1. $H_0 : \mu_d = 0$; $H_1 : \mu_d \neq 0$.

2. Prueba de dos colas; $n - 1 = 9 - 1 = 8$ grados de libertad; los valores críticos son – 2.306 y + 2.306.



Par	A	B	d	d^2
1	16	18	2	4
2	9	7	– 2	4
3	21	26	5	25
4	14	11	– 3	9
5	26	26	0	0
6	27	22	– 5	25
7	13	19	1	1
8	14	20	6	36
9	30	28	– 2	4
			2	108

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d}{n} = \frac{2}{9} = 0.22$$

$$s_d = \sqrt{\frac{108 - \frac{(2)^2}{9}}{9 - 1}} \simeq 3.667$$

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{0.22}{\frac{3.667}{\sqrt{9}}} = \frac{0.22}{1.222} = 0.180$$

Puesto que 0.180 se encuentra en la región de aceptación, no se rechaza la hipótesis nula de que no hay diferencia entre la eficacia de las soluciones A y B.

Examen capítulo 11

1. Verdadero.
2. Falso. 21 grados de libertad, valor que se obtiene por $n - 1 = 22 - 1$.
3. Verdadero.
4. Falso. Hay muchas distribuciones t, cada una con media igual a cero. Las formas de las distribuciones t varían según el tamaño de muestra.
5. Verdadero.
6. Verdadero.
7. Verdadero.
8. Verdadero.
9. Falso. $t = 2.080$. Hay $n_1 + n_2 - 2 = 12 + 11 - 2 = 21$ grados de libertad. Según el apéndice F, es una prueba de dos colas, nivel 0.05, 21 grados de libertad y valor crítico de t igual a 2.080.
10. Verdadero.
11. $H_0 : \mu = 20$ días; $H_1 : \mu < 20$ días. $g.l. = 15$. El valor calculado de $t = -3.20$, que se obtiene por

$$t = \frac{18 - 20}{\dfrac{2.5}{\sqrt{16}}}$$

Se rechaza la hipótesis nula al nivel 0.05, ya que el valor calculado de t de -3.20 se encuentra en la región de rechazo más allá de -1.753. El nuevo método reduce significativamente el tiempo de recuperación.

12. $H_0 : \mu_d = 0$; $H_1 : \mu_d \neq 0$. $g.l. = 9$. $n = 10$. Los valores críticos de t son -2.262 y $+2.262$ (nivel 0.05, valores de dos colas). Se calcula que $t = 0.099$. $d = 3/10 = 0.3$. $s_d = 9.56$. Entonces

$$t = \frac{0.3}{\dfrac{9.56}{\sqrt{10}}} = 0.099$$

Se acepta H_0. No hay diferencia significativa en los dos métodos.

12

Análisis de variancia

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Comprender la noción general del análisis de variancia o varianza (ANOVA).
2. Proporcionar las características de la distribución *F*.
3. Realizar una prueba de hipótesis para determinar si dos variancias muestrales provienen de las mismas poblaciones o de poblaciones iguales.
4. Establecer y organizar datos en una tabla de ANOVA.
5. Realizar una prueba para determinar si existe diferencia entre tres o más medias de tratamiento.
6. Realizar una prueba de hipótesis para determinar si hay alguna diferencia entre medias de bloques.

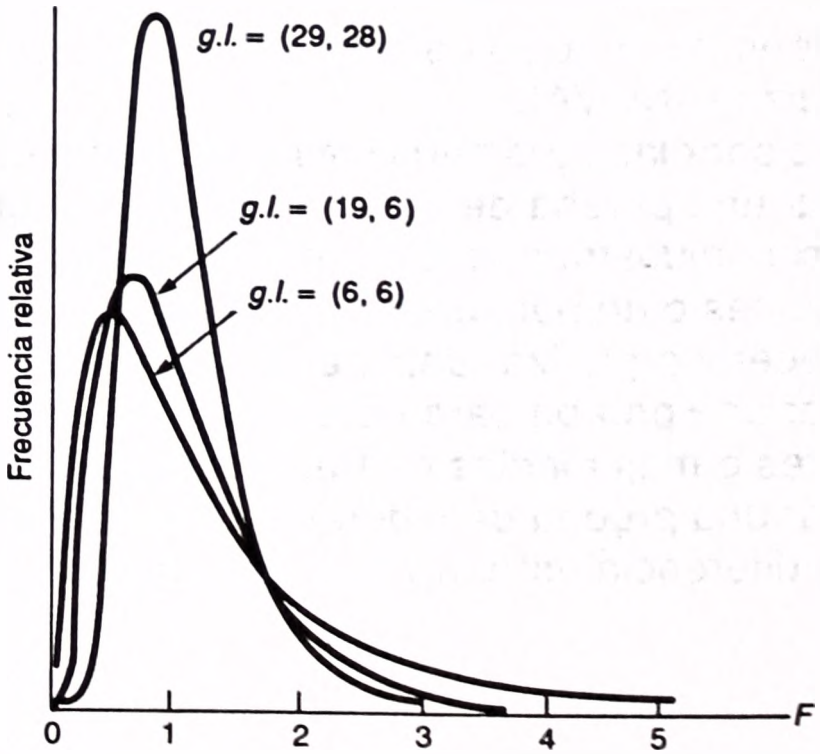
En este capítulo se prosigue con el análisis de pruebas de hipótesis. Recuérdese que en el capítulo 9 se examinó la teoría general de las pruebas de hipótesis y se aplicó a casos en los que se selecciona una muestra grande a partir de una población normal. Se empleó la distribución normal estándar como base para demostrar si una media muestral proviene de una población hipotética y si dos medias muestrales se obtuvieron de la misma población o de iguales poblaciones. En el capítulo 10 se efectuaron pruebas con una o dos muestras para proporciones, utilizando de nuevo la distribución normal estándar como estadístico de prueba. En el capítulo 11 se describieron los métodos para realizar pruebas de medias cuando las poblaciones son normales, pero las muestras son pequeñas. La distribución *t* de Student se empleó como estadístico de prueba.

DISTRIBUCION *F*

En este capítulo se describirá la distribución *F*. Esta distribución probabilística se utiliza como estadístico de prueba en varias situaciones. Sirve para demostrar si dos variancias muestrales provienen de la misma población o de poblaciones iguales, y también se aplica cuando se desean comparar simultáneamente dos o más medias poblacionales. Esta comparación simultánea de varias medias poblacionales se denomina **análisis de varianza** (**ANOVA,** de analysis of variance). En estos dos casos, las poblaciones deben ser normales y los datos deben estar al menos en escala de intervalo.

¿Cuáles son las principales características de la distribución *F*?

1. Existe una "familia" de distribuciones *F*. Un elemento específico de la familia está determinado por dos parámetros: los grados de libertad (g.l.) en el numerador y los grados de libertad en el denominador. Esto se ilustra en



la siguiente gráfica. Hay una distribución F para la combinación de 29 g.l. en el numerador y 28 g.l. en el denominador. Hay otra distribución F para 19 g.l. en el numerador y 6 g.l. en el denominador. Hay otra distribución F para 6 y 6 g.l. Obsérvese que la forma de las curvas varía a medida que cambian los grados de libertad.

2. El valor de F no puede ser negativo.
3. La distribución F es una distribución continua.
4. La curva que representa una distribución F tiene un sesgo positivo.
5. Sus valores varían de 0 a ∞. A medida que aumenta el valor de F, la curva se aproxima al eje X, pero nunca lo toca.

Comparación de dos variancias poblacionales

La distribución F se utiliza en esta sección para demostrar la hipótesis de que la variancia de una población normal es igual a la variancia de otra población normal. Así, la prueba es útil para determinar si una población normal tiene o no más variación que otra. En los siguientes ejemplos se muestra el uso de esta prueba:

Dos cizallas Barth se ajustan para producir elementos de acero de la misma longitud. Por tanto, los elementos deben tener la misma longitud. Se desea estar seguro que además de tener la misma longitud, tengan una variación similar.

La tasa media de rendimiento a la inversión de dos tipos de acciones puede ser la misma, pero hay más variación en el rendimiento de una que de otra. Una muestra de 10 acciones de industria aeroespacial y 10 acciones de servicios podrían mostrar la misma tasa media de rendimiento, pero es probable que haya más variación en el rendimiento de las acciones aeroespaciales.

Consideraciones de validación

La prueba F también puede usarse para validar supuestos con respecto a ciertas pruebas estadísticas. Como un ejemplo, recuérdese que la prueba t que se describió en el capítulo 11 se utiliza para determinar si difieren dos medias poblacionales. Para emplear esa prueba, fue necesario suponer que las dos variancias poblacionales eran iguales.

Independientemente de que se desee determinar si una población tiene más variación que otra población o se desea validar un supuesto con respecto a una prueba estadística, primero se plantea la hipótesis nula. Para cualquier investigación, la hipótesis nula es que la variancia de una población normal, σ_1^2, es igual a la variancia de otra población normal, σ_2^2. Para realizar la prueba, se consigue una muestra aleatoria de n_1 observaciones a partir de una población, y una muestra de n_2 de una segunda población. El estadístico de prueba es s_1^2/s_2^2, en donde s_1^2 y s_2^2 son las variancias muestrales respectivas. Si la hipótesis nula es verdadera (H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), el estadístico de prueba sigue la distribución F con $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$ grados de libertad. La variancia muestral *más grande* se coloca en el numerador;

en consecuencia, la razón F es mayor que 1.00 y el valor crítico de la cola superior es el único que se necesita. El valor crítico de F se obtiene dividiendo entre dos el nivel de significación ($\alpha/2$), y buscando después el número adecuado de grados de libertad en el apéndice G.

✱ Ejemplo

Lammers Limos ofrece servicio de limusinas desde el edificio del ayuntamiento de Toledo, Ohio, al aeropuerto Metro en Detroit. El director de la compañía está considerando dos rutas. Una es según la autopista U.S. 25 y otra la I-75. Desea hacer un estudio para ambas rutas y después comparar los resultados. Registró los siguientes datos. Si se utiliza el nivel de significación 0.10, ¿existe una diferencia en la variación en las dos rutas?

Rutas	*Tiempo medio (minutos)*	*Desviación estándar*	*Tamaño de muestra*
U.S. 25	56	12	7
I–75	59	5	8

✔ Solución

El Sr. Lammers observó que los dos tiempos medios son muy similares, pero hay más variación, según indica la desviación estándar, en la ruta U.S. 25 que en la ruta I–75. Esto es en parte congruente con su conocimiento de las dos rutas; en la ruta U.S. 25 hay más luces de alto, en tanto que la ruta I–75 es una autopista de acceso limitado. Sin embargo, la ruta I–75 es más larga en kilometraje. Es importante que el servicio que se ofrece sea oportuno en tiempo y consistente, por lo que decide realizar una prueba estadística para determinar si en realidad existe diferencia en la variación de las dos rutas.

Se empleará el procedimiento usual de cinco pasos para pruebas de hipótesis.

Paso 1. Se plantean la hipótesis nula y la alternativa. La prueba es de dos colas, ya que se busca la diferencia en la variación de las dos rutas. No se trata de manifestar que una ruta tiene más variación que la otra.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Paso 2. Se seleccionó un nivel de significación de 0.10.

Paso 3. El estadístico de prueba adecuado es la distribución F.

Paso 4. La regla de decisión se obtiene del apéndice G, parte del cual se reproduce en la tabla 12-1. Debido a que se utiliza una prueba de dos colas, el nivel de

TABLA 12-1

Valores críticos de la distribución F, $\alpha = 0.05$

Grados de libertad para el denominador	*Grados de libertad para el numerador*			
	5	*6*	*7*	*8*
1	230	234	237	239
2	19.3	19.3	19.4	19.4
3	9.01	8.94	8.89	8.85
4	6.26	6.16	6.09	6.04
5	5.05	4.95	4.88	4.82
6	4.39	4.28	4.21	4.15
7	3.97	3.87	3.79	3.73
8	3.69	3.58	3.50	3.44
9	3.48	3.37	3.29	3.23
10	3.33	3.22	3.14	3.07
11	3.20	3.09	3.01	2.95
12	3.11	3.00	2.91	2.85
13	3.03	2.92	2.83	2.77
14	2.96	2.85	2.76	2.70
15	2.90	2.79	2.71	2.64

significación es 0.05, que se obtiene mediante $\alpha/2 = 0.10/2 = 0.05$. Hay $n_1 - 1 = 7 - 1 = 6$ grados de libertad en el numerador, y $n_2 - 1 = 8 - 1 = 7$ grados de libertad (g.l.) en el denominador. Para alcanzar el valor crítico, recórrase en dirección horizontal la parte superior de la tabla F (apéndice G) para localizar el nivel de significación 0.05 con 6 g.l. en el numerador. Después recórrase hacia abajo en la columna hasta el valor crítico frente a 7 g.l. en el denominador. El valor crítico es 3.87. Si la razón de las variancias muestrales, s_1^2/s_2^2, es mayor que 3.87, se rechaza la hipótesis nula.

Paso 5. El valor calculado del estadístico de prueba es 5.76, que se obtiene mediante $s_1^2/s_2^2 = (12)^2/(5)^2$. La hipótesis nula se rechaza y se acepta la alternativa. La variación no es igual en las dos poblaciones.

Como se observó, el procedimiento común consiste en determinar la razón F colocando la variancia más grande en el numerador. Esto obligará a que F sea mayor que 1.00. ¿Por qué es necesario esto? Permite usar siempre la cola superior del estadístico F, por lo que se evita la necesidad de tablas F más extensas.

Una segunda pregunta surge respecto a las *pruebas de una cola*. ¿Cómo se manejan? Nuevamente se organiza la razón F de manera que siempre sea mayor que 1.00. En estas condiciones no es necesario dividir el nivel de significación a la mitad. Por tanto, se está limitado a los niveles de significación 0.05 o 0.01 (para pruebas de una cola) en el apéndice G.

AUTOEXAMEN 12-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una empresa ensambla componentes eléctricos. Durante los últimos 10 días el operario A ha producido en promedio 9 componentes defectuosos al día, con una desviación estándar de 2 piezas con defectos. La operaria B produjo en promedio 8.5 componentes defectuosos al día, con una desviación estándar de 1.5 durante el mismo periodo. Al nivel de significación 0.05, ¿es posible concluir que hay más variación en el número de componentes defectuosos al día que se atribuyen al operario A?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Dalton Research Associates realizó un estudio acerca de los hábitos de escuchar la radio de hombres y mujeres. Un aspecto del estudio comprendió el tiempo promedio de audición. Se descubrió que tal tiempo para los hombres es de 35 min al día. La desviación estándar de la muestra de 10 hombres que se estudiaron fue de 10 min diarios. El tiempo promedio de audición para las 12 mujeres en el estudio fue de 32 min y la desviación estándar de la muestra, de 12 min. Al nivel de significación 0.01, ¿es posible concluir que existe una diferencia en la variación en el número de minutos que los hombres y mujeres escuchan la radio?
2. Un corredor de bolsa en Wooster Securities informó que la tasa media de rendimiento en una muestra de 10 acciones petroleras fue de 12.6%, con una desviación estándar de 3.9%. La tasa media en una muestra de 8 acciones de servicios fue de 10.9% con una desviación estándar de 3.5%. Al nivel de significación 0.05, ¿es posible concluir que hay más variación en las acciones petroleras?

ANOVA: NOCION GENERAL

El segundo uso de la distribución *F* comprende la técnica del **análisis de variancia,** que se simboliza por **ANOVA.** Básicamente, en ese análisis se emplea información muestral para determinar si tres o más **tratamientos** producen o no resultados diferentes. El uso de la palabra *tratamiento* tiene su origen en la investigación agrícola. Se trataron campos con distintos fertilizantes o fumigantes, para determinar si había o no una diferencia global en la productividad. Se probará si cinco aditivos para gasolina (los tratamientos) dan o no como resultado una diferencia en el rendimiento en millas por galón. Además se explorará la siguiente pregunta: "¿Los cuatro métodos de entrenamiento (los tratamientos) son igualmente efectivos?"

Tratamiento Causa, o fuente específica de variación en un conjunto de datos.

A continuación se presentan aquí varios casos para ampliar un poco más el significado de tratamiento.

Hydroponics, Inc., es una empresa de investigación que cultiva tomates y otras plantas en agua. La cuestión es, ¿con qué frecuencia se deben tratar los tomates recientemente desarrollados con alimento soluble para plantas? A fin de lograr el máximo crecimiento, ¿deben recibir un tratamiento completo de alimento al principio de la época de crecimiento y después nada? ¿O debe proporcionarse a las plantas la mitad de la dosis al principio y la otra parte a mediados de la época de crecimiento de cuatro meses? ¿O bien, una cuarta parte de la solución debe proporcionarse mensualmente a las plantas?

Como experimento, se le dio el tratamiento completo a las plantas de un estanque; en otro se aplicaron los tratamientos en dos partes; en un tercer estanque se aplicaron dosis mensuales. Se pesaron muestras de tomates maduros de cada uno de los tres estanques y se registraron los pesos. Algunos de los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	Peso (gramos)		
Número de muestra	*Tratamiento completo*	*Medio tratamiento*	*Tratamiento mensual*
1	12.3	15.6	13.8
2	25.8	11.4	15.2

La pregunta es: ¿son diferentes estos tratamientos?

Para un fabricante de automóviles, los "tratamientos" diferentes pueden ser cuatro clases de gasolina. Por ejemplo, supóngase que un fabricante de autos diseñó un motor radicalmente nuevo de peso ligero, y desea recomendar la clase de gasolina que debe usarse. Las cuatro clases sin plomo, que se denominarán los "tratamientos", son: Subnormal, Normal, Extra, Super-extra. El automóvil de prueba realizó tres carreras de ensayo en la pista utilizando cada una de las cuatro clases. Suponiendo que puede usarse cualquier clase:

Número de carrera	*Kilómetros por litro*			
de prueba	*Subnormal*	*Normal*	*Extra*	*Super-extra*
1	39.31	36.69	38.99	40.04
2	39.87	40-00	40.02	39.89
3	39.87	41.01	39.99	39.93

La cuestión a resolver aplicando ANOVA es: ¿los tratamientos (clases de gasolina) producen los mismos resultados (el mismo número de kilómetros por litro)?

Los "tratamientos" pueden ser cuatro formas de realizar un trabajo. Como ejemplo, supóngase que cuatro trabajadores de BMD Electronics han presentado métodos para armar un componente. A continuación se presentan algunos datos muestrales para cada uno de los cuatro tratamientos:

	Minutos requeridos para el ensamblaje			
Número de muestra	*Método de Utz*	*Método de Lock*	*Método de Sass*	*Método de Corbea*
1	16.6	22.4	31.4	18.4
2	17.0	21.5	33.4	19.6

Aplicando la técnica de ANOVA a las observaciones muestrales, podría concluirse que no existe diferencia en el tiempo necesario, lo que significa que las diferencias en los datos muestrales se deben al azar.

CONSIDERACIONES EN QUE SE BASA LA PRUEBA ANOVA

Antes de realizar una prueba utilizando las técnicas ANOVA se examinarán las consideraciones en que se basa la prueba. Si no pueden cumplirse las consideraciones siguientes, es posible aplicar otra técnica de análisis de variancia (que desarrollaron Kruskal y Wallis y que se describe en el capítulo 17).

1. Las tres o más poblaciones de interés están distribuidas normalmente.
2. Tales poblaciones tienen desviaciones estándares iguales.
3. Las muestras que se seleccionan de cada una de las poblaciones son aleatorias e independientes, es decir, no están relacionadas entre sí.

PROCEDIMIENTO DE ANALISIS DE VARIANCIA

El procedimiento ANOVA puede ilustrarse de manera más adecuada mediante un ejemplo. Suponga que renunció el gerente de la sucursal oeste de Appliance Stores, Inc., y se considera que tres vendedores pueden ocupar este puesto. Los tres tienen la misma antigüedad, educación, etc. Para tomar una decisión, se sugirió examinar los registros de ventas mensuales de cada uno. En la tabla 12-2 se muestran los resultados muestrales de las ventas por mes. En este problema los vendedores son los "tratamientos".

TABLA 12-2

Ventas mensuales de artículos para tres vendedores

	Ventas mensuales ($000)		
	Sra. Mapes	*Sr. Sonnar*	*Sr. Mafee*
	$15	$15	$19
	10	10	12
	9	12	16
	5	11	16
	16	12	17
Media muestral	11	12	16

El procedimiento ANOVA exige el mismo método de prueba de hipótesis que se explicó en el capítulo 9 y que se empleó en los capítulos 10 y 11.

Paso 1. Hipótesis nula H_0 expresa que no hay diferencia significativa entre las ventas medias de los tres vendedores; es decir, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. H_1 plantea que al menos una media es diferente. Al igual que antes, si H_0 se rechaza, H_1 se aceptará.

Paso 2. Nivel de significación Se seleccionó el nivel 0.05.

Paso 3. Estadístico de prueba El estadístico de prueba adecuado es la distribución *F*. Este procedimiento se basa en varias consideraciones: 1) Los datos deben estar al menos en nivel de intervalo. 2) La selección real de las ventas debe hacerse utilizando un procedimiento de tipo probabilístico. 3) La distribución de las ventas mensuales para cada una de las poblaciones es normal. 4) Las variancias de las tres poblaciones son iguales, es decir, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$.

F es la razón de dos variancias:

$$F = \frac{\text{Variancia poblacional estimada según variación entre medias muestrales}}{\text{Variancia poblacional estimada según la variación en las muestras}}$$

La terminología común para el numerador es "variancia entre muestras". Para el denominador es "variancia en las muestras". El numerador tiene $k - 1$ grados de libertad (g.l.). El denominador tiene $N - k$ g.l., donde *k* es el número de tratamientos y *N* es el número de observaciones.

Paso 4. Regla de decisión Como se observó con anterioridad, la distribución *F* y la curva correspondiente tienen un sesgo positivo y dependen: 1) del número de tratamientos, *k*, y 2) del número total de observaciones, *N*. Para este problema relativo a un nuevo gerente de almacén, hay tres tratamientos (vendedores), por lo que se tienen $k - 1 = 3 - 1 = 2$ g.l. en el numerador. Hay 15 observaciones (tres muestras de cinco cada una). Por tanto, hay $N - k = 15 - 3 = 12$ g.l. en el denominador.

El valor crítico, esto es, el punto divisorio entre la región de aceptación y la de rechazo, se obtiene consultando el apéndice G. (*Nota:* hay una página para el nivel 0.05 y otra para el nivel 0.01.) Los grados de libertad para el denominador se encuentran en la columna izquierda. Con referencia al párrafo anterior, se aprecia que hay 2 g.l. en el numerador y 12 g.l. en el denominador. Para localizar el valor crítico, consulte la parte del apéndice G que se muestra en la tabla 12-3 para el nivel de significación 0.05. Recórrase horizontalmente a 2 grados de libertad en el numerador. Después vaya hacia abajo en la columna hasta llegar al número opuesto a 12 g.l. en la columna izquierda. Ese número es 3.89, y es el valor crítico de *F* para el nivel 0.05.

TABLA 12-3

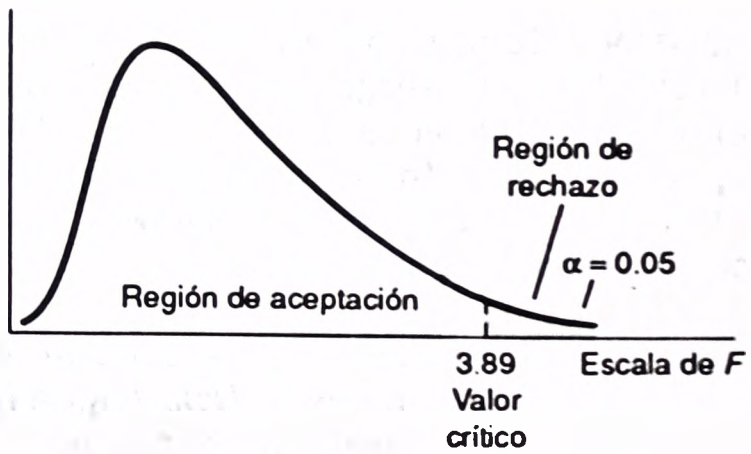
Valores críticos del estadístico *F* (nivel de significación 0.05)

Grados de libertad en el denominador	Grados de libertad en el numerador: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49

Al utilizar el nivel predeterminado de 0.05, la regla de decisión es aceptar la hipótesis nula H_0 si el valor calculado de F es menor que o igual a 3.89; se rechaza H_0 y se acepta H_1 si el valor calculado de F es mayor que 3.89. La regla de decisión se muestra gráficamente en el diagrama 12-1.

DIAGRAMA 12-1

Distribución de *F* para $k = 3$ y $N = 15$, $\alpha = 0.05$



Paso 5. Calcular F y tomar una decisión El primer paso es organizar una tabla ANOVA. Esta es sólo una forma conveniente de registrar la suma de cuadrados y otros cálculos. El formato general para un problema de análisis de varianza en un sentido se muestra en la tabla 12-4.

TABLA 12-4

Formato general de la tabla de análisis de variancia

Fuente de variación	*(1) Suma de cuadrados*	*(2) Grados de libertad*	*(3) Cuadrado medio (1)/(2)*
Entre tratamientos	SST	$k - 1$	$\frac{SST}{k-1} = MSTR$
Error (en los tratamientos)	SSE	$N - k$	$\frac{SSE}{N-k} = MSE$
Total	Total SS		

$$F = \frac{\frac{SST}{k-1}}{\frac{SSE}{N-k}} = \frac{MSTR}{MSE}$$

en donde:

MSTR (de *mean square between treatments*) es el cuadrado medio entre tratamientos.

MSE (de *mean square due to error*) es el cuadrado medio debido al error. También se denomina *cuadrado medio dentro de tratamientos.*

SST (de *sum of squares treatment*) es la abreviatura de tratamiento de suma de cuadrados y se obtiene mediante:

$$SST = \sum\left[\frac{T_c^2}{n_c}\right] = \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

en donde:

T_c^2 indica elevar al cuadrado el total de cada columna (el subíndice c se refiere a la columna).

n_c es el número de observaciones para cada tratamiento respectivo (columna). Hay cinco cifras de ventas para la Sra. Mapes, cinco para el Sr. Sonnar y cinco para el Sr. Mafee.

ΣX es la suma de todas las observaciones (ventas). Es $195 (véase bajo Total en la tabla 12-5).

k es el número de tratamientos (vendedores). Hay tres.

N es el número *total* de observaciones. Hay 15.

En la tabla 12-5 se presentan los cálculos necesarios.

TABLA 12-5

Cálculos necesarios para la razón *F*

	Sra. Mapes		*Sr. Sonnar*		*Sr. Mafee*		
	Ventas ($000), X_1	*Ventas al cuadrado, X_1^2*	*Ventas ($000), X_2*	*Ventas al cuadrado, X_2^2*	*Ventas ($000) X_3*	*Ventas al cuadrado, X_3^2*	
	$15	225	$15	225	$19	361	
	10	100	10	100	12	144	
	9	81	12	144	16	256	
	5	25	11	121	16	256	
	16	256	12	144	17	289	*Total*
Totales por columna: T_c	$55		$60		$80		$195
Tamaño de muestra: n_c	5		5		5		15
Suma de cuadrados: x^2		687		734		1 306	2 727

Para calcular SST:

$$\text{SST} = \Sigma\left[\frac{T_c^2}{n_c}\right] - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(\$55)^2}{5} + \frac{(\$60)^2}{5} + \frac{(\$80)^2}{5}\right] - \frac{(\$195)^2}{15}$$

$$= 2\,605 - 2\,535$$

$$= 70$$

Ahora se calcula SSE (de *sum of squares error*) error de suma de cuadrados:

$$\boxed{\text{SST} = \Sigma(X^2) - \Sigma\left[\frac{T_c^2}{n_c}\right]}$$

en donde $\Sigma(X^2)$ indica que debe elevarse al cuadrado cada cifra de ventas mensuales y después sumar los cuadrados.

$$\text{SSE} = (\$15)^2 + (\$10)^2 + (\$9)^2 + \cdots + (\$17)^2 - \left[\frac{(\$55)^2}{5} + \frac{(\$60)^2}{5} + \frac{(\$80)^2}{5}\right]$$

$$= 2\,727 - 2\,605$$

$$= 122$$

La variación total (Total SS) es la suma de la variación entre columnas y entre renglones; es decir, Total SS = SST + SSE = 70 + 122 = 192.

Como verificación:

$$\text{Total SS} = \Sigma(X^2) - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$
$$= 2\,727 - \frac{(\$195)^2}{15}$$
$$= 2\,727 - 2\,535$$
$$= 192$$

Las tres sumas de cuadrados y los cálculos necesarios para F se transfieren a la tabla ANOVA (tabla 12-6).

TABLA 12-6

Tabla de ANOVA para el problema de gerentes de almacenes

Fuente de variación	*(1) Sumas de cuadrados*	*(2) Grados de libertad*	*(3) Cuadrado medio (1)/(2)*
Entre tratamientos	SST = 70	$k - 1 = 3 = - 1 = 2$	$\frac{SST}{k-1} = \frac{70}{2} = 35$ MSTR
Error (en los tratamientos)	SSE = 122	$N - k = 15 - 3 = 12$	$\frac{SSE}{N-k} = \frac{122}{12} = 10.17$ MSE
Total SS	192		

Cálculo de F:

$$F = \frac{\dfrac{\text{SST}}{k-1}}{\dfrac{\text{SSE}}{N-k}} = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{35}{10.17} = 3.44$$

La regla de decisión indica que si el valor calculado de F es menor que o igual al valor crítico de 3.89, la hipótesis nula se acepta. Si el valor de F es mayor que 3.89, H_0 se rechaza y H_1 se acepta. Puesto que $3.44 < 3.89$, la hipótesis nula se acepta al nivel 0.05. En otras palabras, las diferencias en las ventas medias mensuales ($11 000, $12 000 y $16 000) se atribuyen al azar (muestreo). Desde el punto de vista práctico, los niveles de ventas de los tres vendedores que se consideran para el puesto de gerente de almacén son iguales. No puede tomarse una decisión respecto al puesto, con base en las ventas mensuales.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

3. Una compañía de inversiones en bienes raíces, está considerando invertir en un centro comercial en las afueras de Atlanta, Georgia. Se evalúan tres lotes. Es de gran importancia el ingreso de los habitantes del área que rodea al centro comercial propuesto. Se selecciona una muestra aleatoria de cuatro familias cerca de cada centro propuesto. A continuación se presentan los resultados muestrales. Al nivel de significación 0.05, ¿la compañía puede concluir que hay una diferencia en el ingreso promedio? Utilice el procedimiento usual de cinco pasos de prueba de hipótesis. (Por supuesto, en la práctica se seleccionarían más de cuatro familias.)

Area de Southwyck ($000)	*Parque Franklin ($000)*	*Old Orchard ($000)*
$34	$44	$45
38	41	50
40	39	46
30	40	48

4. El gerente de una compañía de software para computadoras está estudiando el número de horas que los ejecutivos de alto nivel dedican al uso de sus terminales de computadora, por tipo de industria. Se tiene una muestra de cinco ejecutivos de cada una de tres industrias. Al nivel de significación 0.05, ¿el gerente puede llegar a la conclusión de que existe diferencia en el número promedio de horas por industria que los ejecutivos dedican al uso de terminales semanalmente?

Banca	*Comercio*	*Seguros*
12	8	10
10	8	8
10	6	6
12	8	8
10	10	10

El siguiente ejemplo del análisis de variancia en un sentido no tiene el mismo número de observaciones en cada tratamiento. Hay cuatro observaciones en el grupo 1 de evaluación, cinco en el grupo 2, siete en el grupo 3 y seis en el grupo 4.

* Ejemplo

Un profesor pidió a los estudiantes de un grupo grande del curso de mercadotecnia que evaluaran el desempeño de él como 1 (excelente), 2 (bueno), 3 (aceptable) o 4 (deficiente). Un ayudante del profesor recolectó las evaluaciones y aseguró a los estudiantes que el profesor no las recibiría hasta después que las calificaciones del curso se hubieran ingresado en la oficina del secretario de asuntos escolares. La evaluación (el tratamiento) que un estudiante asignó al profesor se comparó con su calificación final del curso. Lógicamente, se esperaría que en general, el grupo de estudiantes que pensó que el profesor era excelente tendrían una calificación promedio final del curso significativamente más alta que los alumnos que lo evaluaron como bueno, aceptable o regular, o deficiente. También se esperaría que los

alumnos que lo evaluaron como deficiente tendrían las calificaciones promedio más bajas. Se seleccionaron muestras de cada grupo de evaluación. Los resultados son:

Grupo de evaluación 1 (excelente)	*Grupo de evaluación 2 (bueno)*	*Grupo de evaluación 3 (regular)*	*Grupo de evaluación 4 (deficiente)*
94	75	70	68
90	68	73	70
85	77	76	72
80	83	78	65
	88	80	74
		68	65
		65	

La pregunta es si existe o no una diferencia estadística entre la puntuación media de los cuatro grupos.

✔ Solución

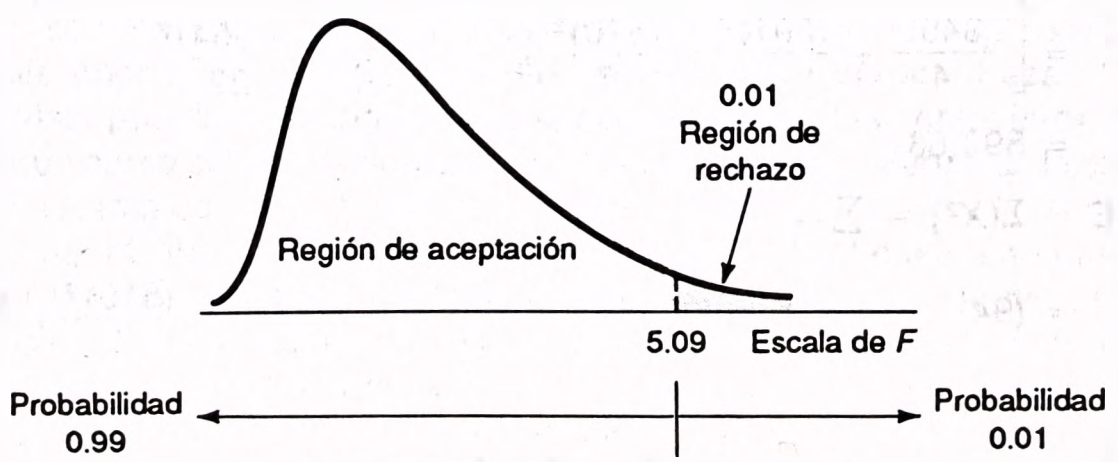
Como antes, la hipótesis nula plantea que no hay diferencia significativa entre las medias de los cuatro tratamientos. Se seleccionó el nivel de significación 0.01.

La regla de decisión es que la hipótesis nula, que plantea que no hay diferencia entre las medias, no se rechazará si el valor calculado de F es menor que el valor crítico. De otra manera, la hipótesis nula se rechazará y se aceptará H_1.

Recuérdese que los grados de libertad en el numerador de la razón F se obtienen por $k - 1$, donde k es el número de tratamientos (grupos de evaluaciones del profesor en este problema). Hay cuatro tratamientos, de manera que $4 - 1 = 3$ g.l. Los grados de libertad en el denominador son en total 18, que se obtienen mediante $N - k$, en donde N es el número total de estudiantes en la muestra. Hay 22 estudiantes, por lo que $22 - 4 = 18$ g.l.

DIAGRAMA 12-2

Areas de aceptación y rechazo, nivel de significación 0.01



La regla de decisión se muestra gráficamente en el diagrama 12-2. Obsérvese que el valor crítico de F es 5.09. Para determinarlo, consulte el apéndice G y la página con el nivel de significación 0.01. Recórrase horizontalmente en la parte superior de la tabla hasta encontrar 3 grados de libertad en el numerador. Después baje por la columna hasta el valor crítico opuesto a 18 grados de libertad en el denominador. Acepte la hipótesis nula al nivel 0.01 si el valor calculado de F es menor que o igual a 5.09, pero rechácela si el valor calculado es mayor que 5.09.

Los cálculos necesarios para la razón F se muestran en la tabla 12-7.

TABLA 12-7

Cálculos necesarios para la razón F

	Grupo 1 (excelente)		*Grupo 2 (bueno)*		*Grupo 3 (aceptable)*		*Grupo 4 (deficiente)*	
	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2	X_3	X_3^2	X_4	X_4^2
	94	8 836	75	5 625	70	4 900	68	4 624
	90	8 100	68	4 624	73	5 329	70	4 900
	85	7 225	77	5 929	76	5 776	72	5 184
	80	6 400	83	6 889	78	6 084	65	4 225
			88	7 744	80	6 400	74	5 476
					68	4 624	65	4 225
					65	4 225		
Totales por columna: T_c	349		391		510		414	
Tamaño de muestra: n_c	4		5		7		6	
Suma de cuadrados: X^2		30 561		30 811		37 338		28 634

Nótese que la suma de los totales por columna (ΣX) es 1 664; el total de los tamaños de muestra (N) es 22; y la suma de los cuadrados (ΣX^2) es 127 334.

Calculando SST, SSE y el total SS, se obtiene:

$$\text{SST} = \sum\left[\frac{T_c^2}{n_c}\right] - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(349)^2}{4} + \frac{(391)^2}{5} + \frac{(510)^2}{7} + \frac{(414)^2}{6}\right] - \frac{(1\,664)^2}{22}$$

$$= 890.68$$

$$\text{SSE} = \Sigma(X^2) - \sum\frac{T_c^2}{n_c}$$

$$= (94)^2 + (90)^2 + \cdots + (65)^2 - \frac{(349)^2}{4} + \frac{(391)^2}{5} + \frac{(510)^2}{7} + \frac{(414)^2}{6}$$

$$= 594.41$$

$$\text{Total SS} = \text{SST} + \text{SSE} = 890.68 + 594.41 = 1\,485.09$$

Como verificación:

$$\text{Total SS} = \Sigma(X^2) - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$
$$= 127\,344 - \frac{(1\,664)^2}{22}$$
$$= 1\,485.09$$

Estos valores se colocan en la tabla ANOVA (véase la tabla 12-8).

TABLA 12-8

Tabla de ANOVA para el problema de evaluación del profesor

Fuente de variación	*(1) Sumas de cuadrados*	*(2) Grados de libertad*	*(3) Cuadrado medio (1)/(2)*
Tratamiento (entre columnas)	SST = 890.68	$k - 1 = 4 = - 1 = 3$	$\frac{SST}{k-1} = \frac{890.68}{3} = 296.89$
Error (entre renglones)	SSE = 594.41	$N - k = 22 - 4 = 18$	$\frac{SSE}{N-k} = \frac{594.41}{18} = 33.02$

Introduciendo los cuadrados medios en la fórmula de F, se obtiene:

$$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{296.89}{33.02} = 8.99$$

La decisión: como el valor calculado de F de 8.99 es mayor que el valor crítico de 5.09 (a partir del apéndice G), la hipótesis nula de que no existe diferencia entre las medias se rechaza al nivel 0.01. Básicamente esto indica que es muy probable que las diferencias observadas entre las medias no se deban al azar. Desde el punto de vista práctico, se sugiere que las calificaciones que obtuvieron los estudiantes en un curso están relacionadas con las opiniones que tienen de la capacidad general y la forma como se conduce en clase el profesor.

Como habrá observado en el ejemplo anterior, los cálculos se vuelven muy tediosos si el número de observaciones en cada tratamiento es grande. La solución MINITAB del problema se muestra a continuación. El listado está en forma de tabla ANOVA. Para emplear el sistema MINITAB, primero capture o introduzca los datos. Cada tratamiento se anota en su propia columna. Esto se logra con el comando SET. El procedimiento MINITAB que se utilizó es AOVONEWAY.

```
MTB > set data c1
DATA> 94,90,***,80
MTB > set c2
DATA> 75,68,***,88
        .
        .
        .

MTB > aovoneway c1 - c4

ANALYSIS OF VARIANCE
SOURCE      DF        SS        MS         F
FACTOR       3     890.7     296.9      8.99
ERROR       18     594.4      33.0
TOTAL       21    1485.1

LEVEL        N      MEAN     STDEV
Excellent    4    87.250     6.076
Good         5    78.200     7.662
Fair         7    72.857     5.490
Poor         6    69.000     3.688

POOLED STDEV =     5.747

INDIVIDUAL 95 PCT CI'S FOR MEAN
BASED ON POOLED STDEV
---------+---------+---------+------
                        (------*-------)   <-EXCELENTE
            (------*------)                <-BUENO
      (-----*------)                       <-ACEPTABLE
(-----*------)                             <-DEFICIENTE
---------+---------+---------+------
        72.0      80.0      88.0
```

VALOR CALCULADO DE F

Antes de continuar, resuelva el Autoexamen 12-2.

INFERENCIAS ACERCA DE LAS MEDIAS DE TRATAMIENTO

Supóngase que al aplicar el procedimiento ANOVA, se decide rechazar la hipótesis nula. Esto permite concluir que todas las medias de tratamiento no son iguales. Algunas veces esta conclusión puede considerarse satisfactoria, pero en otros casos se desea saber cuáles medias de tratamiento son diferentes. En esta sección se proporcionan los detalles para esta clase de prueba.

Recuérdese que en los datos de ventas mensuales de artículos no había diferencia en las medias de tratamiento. En este caso no procedería un análisis adicional de las medias de tratamiento. Sin embargo, en los ejemplos anteriores sobre las opiniones y evaluaciones de estudiantes, había una diferencia en las medias de tratamiento. Esto es, la hipótesis nula se rechazó y la hipótesis alternativa se aceptó. Si las opiniones de los estudiantes son en realidad diferentes, la pregunta es: ¿Entre qué grupos difieren las medias de tratamiento?

AUTOEXAMEN 12-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En un esfuerzo por determinar la manera más eficaz de enseñar principios de seguridad a un grupo de empleados en Weedco, se ensayaron cuatro métodos. Una muestra de 20 empleados se asignaron aleatoriamente a uno de cuatro grupos. Al primer grupo se le entregaron folletos de instrucción programada y trabajaron en el curso a su propio ritmo. El segundo grupo asistió a conferencias. Un tercer grupo observó presentaciones por televisión y un cuarto grupo se dividió en grupos pequeños de debates. Al final de las sesiones, se aplicó una prueba a los cuatro grupos. Era posible determinar una calificación de hasta 10 puntos.

Los resultados fueron:

Calificaciones de pruebas

Instrucción programada	*Conferencias*	*Uso de TV*	*Debate en grupos*
6	8	7	8
7	5	9	5
6	8	6	6
5	6	8	6
6	8	5	5

Pruebe al nivel de significación 0.05 que no hay diferencia entre las cuatro medias.

Existen varios procedimientos para responder esta pregunta. Tal vez el más sencillo es mediante el uso de niveles de confianza. En el listado de computadora para el ejemplo anterior, véase la pág. 466, obsérvese que la puntuación promedio de los estudiantes que evaluaron al profesor como excelente es 87.250, y el de quienes lo evaluaron como deficiente es de 69.000. Así, los estudiantes que evaluaron como excelente obtuvieron calificaciones más altas que los estudiantes que evaluaron como deficiente al profesor. ¿Esta diferencia basta para justificar la conclusión de que existe diferencia en las puntuaciones medias de los dos grupos?

La distribución *t*, que se describió en el capítulo 11, se utiliza como base para esta prueba. Recuérdese que una suposición básica de ANOVA es que las variancias poblacionales son iguales para todos los tratamientos. Como se observó, este valor poblacional común se denomina *error cuadrado medio* (MSE, de *mean square error)* que se obtiene mediante SSE/($N - k$). Un intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias poblacionales se logra mediante:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

en donde:

$\bar{X}_1$ es la media del primer tratamiento.

$\bar{X}_2$ es la media del segundo tratamiento.

t se obtiene a partir de la tabla de t. Los grados de libertad son $N - k$.

MSE es el error cuadrado medio que se obtiene a partir de la tabla ANOVA [SSE/(N − k)].

n_1 es el número de observaciones en el primer tratamiento.

n_2 es el número de observaciones en el segundo tratamiento.

Si el intervalo de confianza incluye al 0, se concluye que no hay diferencia en el par de medias de tratamiento. Sin embargo, si ambos extremos del intervalo de confianza tienen *el mismo signo,* esto indica que las medias de tratamiento son diferentes.

Utilizando el ejemplo anterior acerca de las opiniones de estudiantes y el nivel de confianza de 0.95, los extremos del intervalo de confianza son 10.46 y 26.04, que se obtienen por:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = (87.25 - 69.00) \pm 2.101\sqrt{33.0\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)}$$

$$= 18.25 \pm 7.79$$

$$= 10.46 \text{ y } 26.04$$

en donde:

$\bar{X}_1$ = 87.25

$\bar{X}_2$ = 69.00

t = 2.101, según el apéndice F ($N - k = 22 - 4 = 18$ g.l.)

MSE = 33.00, a partir de la tabla ANOVA

n_1 = 4

n_2 = 6

Se conoce que el intervalo de confianza de 95% varía de 10.46 hasta 26.04. Ambos extremos son positivos; en consecuencia, podemos concluir que estas medias de tratamiento difieren significativamente. Es decir, los estudiantes que evaluaron al profesor como excelente tienen calificaciones más altas que los que lo evaluaron como malo.

De igual manera pueden tenerse resultados aproximados directamente del listado MINITAB. En la parte inferior del listado se desarrolló un intervalo de confianza para cada media. Los extremos de la línea punteada indican los de un intervalo de confianza para cada media de tratamiento. Estos extremos se identifican mediante los símbolos (y). En los casos en donde los intervalos se traslapan (es decir, contienen un área común) las medias de tratamiento no difieren. Sin embargo, donde no hay un área común, las medias de tratamiento difieren. En este ejemplo, los estudiantes que evaluaron al profesor como excelente tienen una calificación media significativamente distinta de la de aquellas que lo evaluaron como regular. Además, la calificación media de quienes evaluaron al profesor como excelente difieren de la de los estudiantes que lo evaluaron como deficiente.

Precaución: la investigación de diferencias en medias de tratamiento es un proceso secuencial. El paso inicial es realizar la prueba ANOVA. Sólo si se rechaza,

la hipótesis nula de que las medias de tratamiento son iguales, debe intentarse llevar a cabo cualquier análisis de las medias de tratamiento.

AUTOEXAMEN 12-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los siguientes datos representan el costo de colegiaturas (en miles de dólares) de una muestra de universidades privadas en varias regiones de Estados Unidos. Al nivel de significación 0.05, ¿puede concluirse que hay diferencia en el costo promedio de las colegiaturas?

Noreste ($000)	*Sureste ($000)*	*Oeste ($000)*
$10	$ 8	$7
11	9	8
12	10	6
10	8	7
12		6

1. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
2. ¿Cuál es la regla de decisión?
3. ¿Cuál es el valor calculado del estadístico de prueba?
4. ¿Cuál es su decisión respecto a la hipótesis nula?
5. ¿Podría haber una diferencia significativa entre la colegiatura media en el noreste y la del oeste? Si es así, elabore un intervalo de confianza para la diferencia.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Una egresada de contabilidad recibe ofertas de cuatro empresas contables. Para considerar estas ofertas, solicitó a una muestra de personas de reciente ingreso, decirle cuántas semanas trabajaron cada una para la empresa antes de recibir un aumento de sueldo. La información muestral es:

Número de semanas antes del primer aumento de sueldo			
CPA, Inc.	*AB Intl.*	*Acct Ltd.*	*Pfisters*
12	14	18	12
10	12	12	14
14	10	16	16
12	10		

Al nivel de significación 0.05, ¿puede concluirse que no hay diferencia en el número medio de semanas antes de tener un aumento entre las cuatro empresas contables?

6. Un analista financiero desea determinar si hay diferencia en la tasa media de rendimiento de tres tipos de acciones: de servicios, de comercio al menudeo y de la banca. Se recolectó la siguiente información muestral:

Tasas de rendimiento		
Servicios	*Comercio*	*Banca*
14.3	11.5	15.5
18.1	12.0	12.7
17.8	11.1	18.2
17.3	11.9	14.7
19.5	11.6	18.1
		13.2

a. Utilizando el nivel de significación 0.05, ¿existe diferencia en la tasa media de rendimiento entre los tres tipos de acciones?
b. Suponga que se rechaza la hipótesis nula. ¿El analista financiero puede concluir que hay diferencia entre las tasas medias de rendimiento de las acciones de servicios y las de comercio al menudeo? Explique su respuesta.

ANOVA EN DOS SENTIDOS

En el ejemplo de ventas de artículos no fue posible demostrar que existe diferencia entre las ventas medias de los tres vendedores. En el cálculo del estadístico F se estimó que la variación se originaba en dos fuentes. Primero se consideró la variación entre las diferencias en las medias de tratamiento. Segundo, se tomó en cuenta la variación entre cada uno de los tratamientos. La variación se originaba en los tratamientos o se consideraba aleatoria. Existen otras fuentes posibles de variación como el entrenamiento que tenían los vendedores, los días de la semana cuando se obtuvieron los datos muestrales, etc. El *análisis de variancia* en dos sentidos (two ways) permite considerar al menos otra de estas posibilidades.

✱ Ejemplo

WARTA, o sea Warren Area Regional Transit Authority, está ampliando el servicio de autobuses desde un suburbio de Starbrick al centro de Warren: por la autopista U.S. 6, por el extremo oeste, por el puente Hickory Street y por la Rte. 59. Tal organismo, WARTA, realizó recorridos de prueba para determinar si hay diferencia significativa en los tiempos medios del trayecto en las cuatro rutas. Los tiempos del trayecto en minutos en cada una de las cuatro rutas se muestran a continuación:

	Tiempo del recorrido de Starbrick a Warren (minutos)			
Día	*U.S. 6*	*West end*	*Hickory St.*	*Rte. 59*
Lunes	18	20	20	22
Martes	21	22	24	24
Miércoles	20	23	25	23
Jueves	25	21	28	25
Viernes	26	24	28	25

Al nivel de significación 0.05, ¿puede concluirse que hay diferencia en las cuatro rutas? ¿Existe una diferencia dependiendo de qué día de la semana se trata?

✔ Solución

Si la hipótesis nula es que el tiempo promedio del trayecto es igual en las cuatro rutas, entonces se requiere un enfoque de ANOVA en un sentido. La variación que ocurre debido a las diferencias en los días de la semana se considera aleatoria y se incluye en el término MSE. De modo que disminuye la razón F. Si la variación debida al día de la semana puede eliminarse, el denominador de la razón F se

reducirá. En este caso, el día de la semana se denomina *variable de bloque*. En consecuencia, se tiene variación debida al tratamiento y debida a los bloques. La suma de cuadrados debida a los bloques (SSB, de *sum of squares due to blocks)* se calcula como sigue:

$$\text{SSB} = \sum\left[\frac{B_r^2}{k}\right] - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

en donde B_r se refiere al total del bloque, es decir, al total de cada renglón, y k es el número de elementos en cada bloque.

El mismo formato que sirve para el caso de ANOVA en un sentido se utiliza para la tabla ANOVA en dos sentidos. Los totales de SST y SS se calculan igual que antes. SSE se obtiene por sustracción (SSE = Total SS − SST − SSB). En la tabla 12-9 se muestran los cálculos necesarios.

TABLA 12-9

Cálculos necesarios para ANOVA en dos sentidos

	Tiempo de viaje, por ruta (minutos)					
Día	*U.S. 6*	*West end*	*Hickory St.*	*Rte. 59*	*Suma de renglones B_r*	
Lunes	18	20	20	22	80	
Martes	21	22	24	24	91	
Miércoles	20	23	25	23	91	
Jueves	25	21	28	25	99	
Viernes	26	24	28	25	103	*Totales*
Totales por columna, T_c	110	110	125	119		464
Suma de cuadrados	2 446	2 430	3 169	2 839		10 904
Tamaño de muestra, nc	5	5	5	5		

Análogo a la tabla ANOVA para un análisis en un sentido, el formato general en dos sentidos es:

Fuente	*(1) Suma de cuadrados*	*(2) Grados de libertad*	*(3) Cuadrado medio (1)/(2)*
Tratamientos	SST	$k - 1$	$\frac{\text{SST}}{k-1} = \text{MSTR}$
Bloques	SSB	$n - 1$	$\frac{\text{SSB}}{n-1} = \text{MSB}^*$
Error	SSE	$(k - 1)(n - 1)$	$\frac{\text{SSE}}{(k-1)(n-1)} = \text{MSE}$
Total	Total SS		

* MSB = Cuadrado medio según bloques

Como antes, para calcular SST:

$$\text{SST} = \Sigma\left[\frac{T_c^2}{n_c}\right] - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(110)^2}{5} + \frac{(110)^2}{5} + \frac{(125)^2}{5} + \frac{(119)^2}{5}\right] - \frac{(464)^2}{20}$$

$$= 32.4$$

SSB se obtiene mediante:

$$\text{SSB} = \Sigma\left[\frac{B_r^2}{k}\right]$$

$$= \frac{(80)^2}{4} + \frac{(91)^2}{4} + \frac{(91)^2}{4} + \frac{(99)^2}{4} + \frac{(103)^2}{4} - \frac{(464)^2}{20}$$

$$= 78.2$$

Los demás términos de suma de cuadrados son:

$$\text{Total SS} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

$$= 10\,904 - \frac{(464)^2}{20}$$

$$= 139.2$$

$$\text{SSE} = \text{Total SS} - \text{SST} - \text{SSB}$$

$$= 139.2 - 32.4 - 78.2$$

$$= 28.6$$

Los valores para los diferentes componentes de la tabla ANOVA se calculan de la manera siguiente:

Fuente de variación	*(1) Suma de cuadrados*	*(2) Grados de libertad*	*(3) Cuadrado medio (1)/(2)*
Tratamientos	32.4	3	10.8
Bloques	78.2	4	19.55
Error	28.6	12	2.38
Total	139.0		

Existen dos conjuntos de hipótesis que se prueban.

1. H_0: Las medias de tratamiento son iguales ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$).
   H_1: Las medias de tratamiento no son iguales.

2. H_0: Las medias de bloques son iguales ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$).
   H_1: las medias de tratamiento no son iguales.

Primero se demostrará la hipótesis sobre las medias de tratamiento. Hay $k - 1 = 4 - 1 = 3$ grados de libertad (g.l.) en el numerador y $(n - 1)(k - 1) = (4 - 1)(5 - 1) = 12$ g.l. en el denominador. Al nivel de significación 0.05, el valor crítico de F es 3.49. La hipótesis nula de que los tiempos medios para las cuatro rutas son iguales se rechaza si la razón F es mayor que 3.49.

$$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{10.8}{2.38} = 4.54$$

La hipótesis nula se rechaza y se acepta la hipótesis alternativa. Se concluye que el tiempo promedio de trayecto no es igual para todas las rutas. WARTA desea efectuar algunas pruebas para determinar qué medias de tratamiento difieren.

A continuación, se hace una prueba para determinar si el tiempo del trayecto es igual para diferentes días de la semana. Los grados de libertad en el numerador para bloques es $n - 1 = 5 - 1 = 4$. Los grados de libertad en el denominador son igual que antes: $(n - 1)(k - 1) = (5 - 1)(4 - 1) = 12$. La hipótesis nula de que las medias de bloque son iguales se rechaza si la razón F es mayor que 3.26.

$$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{19.55}{2.38} = 8.21$$

La hipótesis nula se rechaza, y la hipótesis alternativa se acepta. El tiempo promedio del trayecto no es igual para los diferentes días de la semana.

En el sistema MINITAB se dispone de un procedimiento de ANOVA en dos sentidos. Los tiempos del trayecto se presentan en una sola columna usando el comando SET. A continuación se incorpora un código para identificar la columna, seguido por la información de los renglones. El listado es:

```
MTB > set c1
DATA > 18,21,20,***,25,25
MTB > set c2
DATA> 1,1,1,1,1,2,2,***,4,4
MTB > set c3
DATA > 1,2,3,4,5,***1,2,3,4,5
MTB > name c1 'time' c2 'columns' c3 'rows'
MTB > twoway c1 c2 c3

ANALYSIS OF VARIANCE   time

SOURCE     DF        SS       MS
columns     3     32.40    10.80
rows        4     78.20    19.55
ERROR      12     28.60     2.38
TOTAL      19    139.20
```

Las razones F para bloques y tratamientos se calculan como antes:

Tratamientos

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{10.80}{2.38} = 4.54$$

Bloques

$$F = \frac{MSB^*}{MSE} = \frac{19.55}{2.38} = 8.21$$

Estos son los mismos resultados que se obtuvieron con anterioridad.

AUTOEXAMEN 12-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una empresa de cosméticos vende tres champús: para cabello seco, normal y grasoso. Las ventas, en millones de dólares, durante los últimos cinco meses se muestran en la siguiente tabla:

	Ventas (mills. de dóls.)		
Mes	*Seco*	*Normal*	*Grasoso*
Junio	$ 7	$ 9	$12
Julio	11	12	14
Agosto	13	11	8
Septiembre	8	9	7
Octubre	9	10	13

Utilizando el nivel 0.05, aplique el procedimiento ANOVA para demostrar si:

1. Las ventas medias de los tipos de champú para cabello seco, normal y grasoso son iguales.
2. Las ventas medias son iguales para cada uno de los cinco meses.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. La empresa Canty Manufacturing Company opera 24 horas al día, cinco días a la semana. Los trabajadores cambian de turno cada semana. La gerencia está interesada en determinar si existe alguna diferencia en el número de unidades producidas cuando los empleados trabajan en distintos turnos. Se seleccionó una muestra de cinco trabajadores y su producción se registró en cada turno. Al nivel de significación 0.05, ¿es posible concluir que hay diferencia en la producción media por turno y en la producción media por obrero?

	Unidades producidas		
Trabajador	*Matutino*	*Vespertino*	*Nocturno*
Skaff	31	25	35
Lum	33	26	33
Clark	28	24	30
Treece	30	29	28
Morgan	28	26	27

* Cuadrado medio según bloques

8. Hay tres hospitales en un área urbana. Los siguientes datos muestran el número de intervenciones quirúrgicas practicadas a pacientes no hospitalizados, en cada hospital, la semana pasada. Al nivel de significación 0.05, ¿es posible concluir que hay diferencia en el número promedio de operaciones realizadas entre los tres hospitales y el número promedio de cirugías practicadas por día de la semana?

	Número de operaciones efectuadas		
Día	*St. Luke's*	*St. Vincent*	*Mercy*
Lunes	14	18	24
Martes	20	24	14
Miércoles	16	22	14
Jueves	18	20	22
Viernes	20	28	24

RESUMEN

En este capítulo se analizaron pruebas en las que se utiliza la *distribución F*. Una prueba comprende la comparación de dos variancias poblacionales para determinar si son iguales. En una segunda aplicación de la distribución *F* se emplea información muestral para determinar si tres o más *tratamientos* producen idénticos resultados. Además, la distribución *F* puede aplicarse a dos fuentes de variación. Esta técnica se denomina *análisis de variancia en dos sentidos*.

El procedimiento de prueba de hipótesis de cinco pasos que se empleó en los capítulos 9, 10 y 11 es como sigue: se plantean H_0 y H_1; se toma una decisión sobre el nivel de significación; se selecciona el estadístico de prueba adecuado (*F* en este caso); se plantea una regla de decisión; y, por último (con base en datos muestrales), se toma la decisión de rechazar o no la hipótesis nula.

Recapitulación

I. Características de la distribución *F*.
   A. Es continua.
   B. Sus valores no pueden ser negativos.
   C. Tiene sesgo positivo.
   D. Existe una familia de distribuciones *F*. Cada vez que cambian los grados de libertad en el numerador o en el denominador, se crea una nueva distribución.

II. La distribución *F* sirve para probar si dos variancias muestrales provienen de las mismas poblaciones o de poblaciones iguales.
   A. Las poblaciones muestreadas deben ser normales.
   B. Se calcula la razón de las dos variancias muestrales y se compara el resultado con el valor crítico de *F*.
   C. La mayor de las dos variancias muestrales se coloca en el numerador, forzando la razón a ser siempre mayor que 1.00.

III. El ANOVA en un sentido se utiliza para comparar tres o más medias de tratamiento a fin de determinar si provienen de la misma población o de poblaciones iguales. Un tratamiento es una fuente de variación.

A. Consideraciones en las que se basa ANOVA.
   1. Las muestras se obtienen a partir de poblaciones normales.
   2. Las poblaciones tienen desviaciones estándares iguales.
   3. Las poblaciones son independientes.

B. Se desarrolla una tabla ANOVA que emplea el valor total de SS (es decir, SS total), SST y SSE. Estos valores se calculan como sigue, donde N es el número total de observaciones, T_c es un total de columna, y n_c es el número de observaciones en cada tratamiento (columna).
   1. Total SS, el total de suma de cuadrados:

$$\text{Total SS} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

   2. SST, el tratamiento de suma de cuadrados:

$$\text{SST} = \Sigma\left[\frac{T_c^2}{n_c}\right] - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

   3. SSE, el error de suma de cuadrados:

$$\text{SSE} = \text{SS total} - \text{SST}$$

IV. Las medias de tratamiento se comparan para determinar si difieren significativamente, utilizando la siguiente relación:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \pm t\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

en donde:

$\overline{X}_1$ es la media del primer tratamiento.

$\overline{X}_2$ es la media del segundo tratamiento.

t es el valor que se obtiene de la tabla t, en donde los grados de libertad son iguales a $N - k$.

MSE es el error cuadrado medio, que se obtiene mediante SSE/($N - k$).

n_1 es el número de observaciones en el primer tratamiento.

n_2 es el número de observaciones en el segundo tratamiento.

V. En el ANOVA en dos sentidos la variación se considera debida tanto a tratamientos como a bloques.
   A. Se utiliza el mismo formato que para ANOVA en un sentido.
   B. Una variable de bloque es la segunda fuente de variación.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Una médica que se especializa en el control de peso recomienda tres dietas. Como experimento, selecciona aleatoriamente a 15 pacientes y después asigna a 5 de ellos a cada dieta. Despues de tres semanas se registraron las siguientes pérdidas de peso,

en libras. Al nivel de significación 0.05, ¿puede concluir la facultativa que existe diferencia en el peso perdido medio entre las tres dietas?

Plan A	*Plan B*	*Plan C*
5	6	7
7	7	8
4	7	9
5	5	8
4	6	9

10. La ciudad de Maumee tiene cuatro distritos. El director de Policía desea determinar si hay diferencia en el número promedio de delitos que se cometen entre los cuatro distritos. Registró el número de actos delictivos que se informó ocurrieron en cada distrito, para una muestra de seis días. Al nivel de significación 0.05, ¿puede concluir que existe una diferencia en el número promedio de delitos?

Número de delitos			
Rec center	*Key Street*	*Monclova*	*Whitehouse*
13	21	12	16
15	13	14	17
14	18	15	18
15	19	13	15
14	18	12	20
15	19	15	18

11. El director de personal de la compañía industrial Precision Machine Products está investigando el "perfeccionismo" en el trabajo. Se aplicó una prueba diseñada para medir tal actitud perfeccionista a una muestra aleatoria de 18 empleados. Las puntuaciones varían de 20 hasta aproximadamente 40. Una de las etapas del estudio incluye los antecedentes de cada trabajador: ¿el empleado proviene de una zona rural, una ciudad pequeña o una ciudad grande? Las puntuaciones son:

Zonas rurales	*Ciudades pequeñas*	*Ciudades grandes*
35	28	24
30	24	28
36	25	26
38	30	30
29	32	34
34	28	
31		

a. Al nivel 0.05, ¿puede concluirse que hay una diferencia en las tres puntuaciones medias?
b. Si se rechaza la hipótesis nula, ¿puede afirmarse que la puntuación promedio de los empleados que tienen antecedentes de venir de una zona rural es diferente a la puntuación de los que provienen de una ciudad grande?

12. National Family Opinion, una empresa de pruebas de consumo con oficinas en Toledo, se contrató para investigar los tiempos de servicio en tres restaurantes de la cadena Giorgio. (El tiempo de servicio es la diferencia, en minutos, entre el tiempo que un consumidor formula una orden y el tiempo en que recibe los alimentos.) Los resultados muestrales son:

Tiempo de servicio (minutos)		
GiorgioEste	*Giorgio Oeste*	*Giorgio Sur*
2.3	3.2	4.0
3.3	1.9	4.3
3.6	2.4	3.8
3.0		4.1
		5.0

a. Al nivel 0.05, ¿existe diferencia en los tiempos medios de servicio?
b. ¿Hay pares que difieren significativamente?

13. A continuación se presenta una tabla ANOVA parcial.

Fuente	*Suma de cuadrados*	*g.l.*	*Cuadrado medio*	*F*
Tratamiento		2		
Error			20	
Total	500	11		

Complete la tabla anterior y responda a las siguientes preguntas. Utilice el nivel de significación 0.05.
a. ¿Cuántos tratamientos diferentes hay?
b. ¿Cuál fue el tamaño total de la muestra?
c. ¿Cuál es el valor crítico de F?
d. Escriba las hipótesis nula y alternativa.
e. ¿Cuál es la conclusión respecto a la hipótesis nula?

14. Puede mostrarse que cuando se incluyen dos tratamientos, mediante ANOVA y la prueba t de Student (capítulo 11) se llega a las mismas conclusiones. Además $t^2 = F$. Como ejemplo, suponga que 14 estudiantes seleccionados aleatoriamente se dividen en dos grupos, uno consta de 6 estudiantes y el otro de 8. Para un grupo la enseñanza se basó en una combinación de conferencias e instrucción programada, para el otro se empleó una combinación de conferencias y televisión. Al final del curso, a cada grupo se le aplicó una prueba de 50 preguntas. A continuación se presenta una lista del número correcto de respuestas para cada grupo.

Conferencias e instrucción programada	*Conferencias y televisión*
19	32
17	28
23	31
22	26
17	23
16	24
	27
	25

a. Utilice técnicas de análisis de variancia, pruebe H_0 de que las dos puntuaciones de prueba medias son iguales: $\alpha = 0.05$
b. Utilice la prueba *t* del capítulo 11 y calcule *t*.
c. Interprete los resultados.

15. Northcut Motors tiene en existencia tres automóviles del mismo modelo y características. El director desea comparar el consumo de gasolina de los tres automóviles (señalados auto A, auto B y auto C) utilizando cuatro marcas de gasolina diferentes. Para cada prueba, se virtió un galón de gasolina al tanque vacío y se condujo el automóvil hasta agotar el combustible. En la siguiente tabla se muestra el número de millas que se recorrieron en cada prueba.

Clases de gasolina	*Distancia (en millas)*		
	Auto A	*Auto B*	*Auto C*
Normal	22.4	20.8	21.5
Normal Extra	17.0	19.4	20.7
Sin plomo	19.2	20.2	21.2
Super sin plomo	20.3	18.6	20.4

Utilice el nivel de significación 0.05.
a. ¿Hay diferencia entre las clases de gasolina?
b. ¿Hay diferencia en los automóviles?

16. Una empresa de publicidad de amplia cobertura desea saber si el tamaño de un anuncio y el color del mismo dan como resultado una diferencia en la respuesta de los lectores de revistas. Una muestra aleatoria de lectores ven anuncios de cuatro colores diferentes y de tres tamaños distintos. A cada lector se le pide que califique la combinación específica de tamaño y color del 1 al 10. En la siguiente tabla se muestran las puntuaciones para cada combinación (por ejemplo, la puntuación para un anuncio pequeño rojo es 2).

Tamaño del anuncio	*Color del anuncio*			
	Rojo	*Azul*	*Naranja*	*Verde*
Pequeño	2	3	3	8
Mediano	3	5	6	7
Grande	6	7	8	8

¿Existe diferencia en la eficacia de un anuncio por color y por tamaño?

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Según las publicaciones, un egresado universitario de licenciatura del área de administración gana más que alguien que terminó estudios de bachillerato sin instrucción adicional, y una persona con un grado de maestría o doctorado gana aún más. Para

demostrar esto, se seleccionó una muestra aleatoria de 25 ejecutivos de compañías con activos de más de $1 millón de dólares. A continuación se presentan sus ingresos clasificados por el nivel más alto de preparación.

Ingresos (miles dóls.)

Bachillerato o inferior	*Licenciatura*	*Maestría o superior*
$45	$49	$51
47	57	73
53	85	82
62	73	59
39	81	94
43	84	89
54	89	89
	92	95
	62	73

Pruebe al nivel de significación 0.05 que no hay diferencia en la media aritmética de los ingresos en los tres grupos. Si se encuentra diferencia entre un par de medias, haga más pruebas para determinar qué grupos difieren.

2. Se realizó una investigación muestral del ingreso anual de ayudantes en la vigilancia de personas bajo libertad condicional. Los ingresos anuales de los seleccionados en la muestra, por tamaño de ciudad, son (en miles de dólares):

Menos de 100 000	*100 000 a 250 000*	*250 000 a 500 000*	*Más de 500 000*
$14.2	$11.7	$16.0	$13.2
16.9	15.8	17.2	19.0
12.3	21.3	11.6	25.5
15.6	13.3	14.9	11.8
11.5	11.4	15.9	17.1
24.7	13.0	11.6	16.9
12.2	15.9	13.2	
10.2	11.7	12.9	
13.3	10.8	25.3	
13.1	16.2		
	15.6		
	13.7		
	21.4		

La pregunta que se examinará es si hay o no diferencia significativa en los cuatro tamaños de ciudades respecto al ingreso anual de esta clase de empleados.

a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
b. Utilice el nivel 0.05 y plantee la regla de decisión.
c. ¿Cuál es el valor calculado de F?
d. ¿A qué conclusión puede llegarse?

3. Suponga que una muestra de estudiantes de segundo año en cinco universidades pequeñas reveló las siguientes edades:

Landon	*Adrian*	*Jackson*	*Saint Mark*	*Diaz*
24	19	21	23	22
21	20	23	19	20
18	21	20	16	19
20	16	17	18	17
23	22	22	21	21
19	20	19	20	18
21	23	24	22	20
15	18	18	15	18
22	21	21	21	21
17	15	15	21	19

Pruebe la hipótesis de que no hay diferencia significativa respecto a la edad media de los estudiantes de segundo grado inscritos en las cinco universidades. Utilice el nivel de significación 0.01.

EXAMEN CAPITULO 12

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. La Accurate Machine Company usa rectificadoras de precisión manufacturadas por cuatro empresas distintas. Se desea determinar si existe alguna diferencia global en el funcionamiento de las cuatro. A continuación se presentan las mediciones muestrales, aproximadas al diezmilésimo de pulgada, que se obtuvieron de cada una de las cuatro máquinas. Al nivel de significación 0.05, ¿existe diferencia entre las cuatro rectificadoras? Aplique el procedimiento común de prueba de hipótesis de cinco pasos.

Máquina			
Deitz	*Arvis*	*Milcron*	*Hunt*
8	8	9	6
7	9	9	7
9	6	6	9
	5	4	4
		7	

2. A continuación se muestra una tabla de ANOVA en dos sentidos.

Fuente	*Suma de cuadrados*	*Grados de libertad*	*Cuadrado medio*
Tratamiento	50	2	25
Bloques	24	3	8
Error	48	6	8
Total	122	11	

a. ¿Cuántos tratamientos hay?
b. ¿Cuántos bloques se tienen?

c. ¿Cuántas muestras hay en el problema?
d. Realice una prueba para tratamientos. ¿Existe una diferencia significativa entre las medias de tratamiento? Utilice el nivel de significación 0.05.
e. Haga una prueba por bloques. ¿Hay diferencia significativa entre las medias de bloques? Utilice el nivel de significación 0.05.

3. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de ocho observaciones a partir de una población 1, y seis observaciones de la población 2. A continuación se presenta la información muestral. Al nivel de significación 0.10, ¿es posible concluir que existe diferencia entre las dos variancias poblacionales?

	Población 1	*Población 2*
Media	15	12
Variancia	10	15
Tamaño de muestra	8	6

Autoexámenes

12-1 El operador A debe referirse a la población 1. Después H_0: $= \sigma_1^2 = \sigma_2^2$; $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; $g.l._1 = 10 - 1 = 9$ y $g.l._2$ que también es igual a 9. H_0 se rechaza si $F > 3.18$.

$$F = \frac{(2)^2}{(1.5)^2} = 1.78$$

H_0 no se rechaza. La variación es la misma para ambos empleados.

12-2 $$F = \frac{1.667}{1.625} = 1.026$$

No se rechaza H_0 ya que 1.026 es menor que el valor crítico de 3.24. La tabla ANOVA se elabora como sigue:

$$\text{Total SS} = 876 - \frac{(130)^2}{20} = 31$$

$$\text{SST} = \frac{(30)^2}{5} + \frac{(35)^2}{5} + \frac{(35)^2}{5} + \frac{(30)^2}{5} - \frac{(130)^2}{20} = 5$$

$$\text{SSE} = 31 - 5 = 26$$

Tratamientos	*Suma de cuadrados*	*Grados de libertad*	*Cuadrado medio*
Entre columnas	5	3	1.667
Entre renglones	26	16	1.625
Total	31	19	

12-3 1. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_1: No todas las medias son iguales.

2. H_0 se rechaza si $F > 3.98$.

3. $$\text{Total SS} = 1152 - \frac{(124)^2}{14} = 53.71$$

$$\text{SST} = \frac{(55)^2}{5} + \frac{(35)^2}{4} + \frac{(34)^2}{5} - \frac{(124)^2}{14} = 44.16$$

$$\text{SSE} = 53.71 - 44.16 = 9.55$$

Fuente	*Suma de cuadrados*	*g.l.*	*Cuadro medio*	*F*
Tratamiento	44.16	2	22.08	25.43
Error	9.55	11	0.8682	
Total	53.71	13		

4. H_0 se rechaza. Las medias de tratamiento son diferentes.

5. $(11.0 - 6.8) \pm 2.201 \sqrt{0.8682 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 4.2 \pm 1.30 = 2.90$ y 5.50.
Estas medias de tratamiento difieren debido a que ambos extremos del intervalo de confianza son positivos.

12-4 Para los tipos:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_1: Las medias de tratamiento no son iguales.

Se rechaza H_0 si $F > 4.46$.
Para los meses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$
H_1: Las medias de bloques no son iguales.

Se rechaza H_0 si $F > 3.84$.
El análisis de variancia es como sigue:

Fuente	*g.l.*	*SS*	*MS*	*F*
Tipos	2	3.60	1.80	0.39
Meses	4	31.73	7.93	1.71
Error	8	37.07	4.63	
Total	14	72.40		

La hipótesis nula no puede rechazarse ni para los tipos ni para los meses. No hay diferencia en las ventas medias entre tipos o por meses.

Examen capítulo 12

1. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
   H_1: No todas las medias son iguales.
   H_0 se rechaza si resulta $F > 3.49$.

$$\text{SS total} = 845 - \frac{(113)^2}{16} = 46.9375$$

$$\text{SST} = \frac{(24)^2}{3} + \frac{(28)^2}{4} + \frac{(35)^2}{5} + \frac{(26)^2}{4} - \frac{(113)^2}{16} = 3.9375$$

$$\text{SSE} = 46.9375 - 3.9375 = 43.0000$$

Fuente	*SS*	*g.l.*	*MS*	*F*
Tratamientos	3.9375	3	1.3125	0.3663
Error	43.000	12	3.5833	
Total	46.9375	15		

   H_0 no se rechaza. No hay diferencia en el funcionamiento global de las cuatro rectificadoras.

2. a. 3 tratamientos
   b. 4 bloques
   c. 12 muestras
   d. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
   H_1: No todos los tratamientos son iguales.
   H_0 se rechaza si $F > 5.14$ (utilizando el nivel de significación 0.05).

$$F = \frac{25}{8} = 3.125$$

   H_0 no se rechaza. No hay diferencia en las medias de tratamiento.

   e. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
   H_1 No todas las medias de bloques son iguales.
   H_0 se rechaza si $F > 4.76$.

$$F = \frac{8.0}{8.0} = 1.00$$

   H_0 no se rechaza. No existe diferencia en las medias de bloques.

3. H_0: $\sigma_2^2 = \sigma_1^2$
   H_1: $\sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$
   Hay 5 grados de libertad en el numerador y 7 en el denominador. Para hacer que F sea mayor que 1.00, la variancia en la población 2 se coloca en el numerador. H_0 se rechaza si $F > 3.97$.

$$F = \frac{15}{10} = 1.5$$

   H_0 no se rechaza. No hay diferencia en las variancias poblacionales.

Repaso de los capítulos 11 y 12

Se repasan aquí los principales conceptos y términos que se expusieron en los capítulos 11 y 12. En el capítulo 11 se continuó con el tema de la prueba de hipótesis iniciado en el capítulo 9. En el capítulo 9 se analizaron muestras grandes (de 30 o más); además, se consideró conocida la desviación estándar de la población, σ, y como independientes cualesquiera muestras seleccionadas de la población, lo que significa que de ninguna manera están relacionadas.

En el capítulo 11 el interés se concentró en muestras pequeñas (de menos de 30). Sin embargo, en el caso de muestras pequeñas se supone que no se conoce la desviación estándar de la población. La principal diferencia entre los procedimientos de prueba para muestras grandes (cap. 9) y para muestras pequeñas (cap. 11) es el estadístico de prueba que se aplica. Para muestras grandes es z y para muestras pequeñas es la *t de Student*.

La prueba sobre lo razonable de una media implica una muestra pequeña, o la diferencia entre dos medias, que también requiere que las muestras sean *independientes*. En el caso de muestras *dependientes*, se aplicó la prueba de *diferencias por pares*, en la que también se usa el *estadístico de prueba t*. Un problema representativo de muestras por pares implica registrar la presión sanguínea de una persona antes de administrarle un medicamento hipertensivo y después registrarla nuevamente para evaluar la eficacia del fármaco. Otro problema representativo en el que se usa la prueba de diferencia por pares requiere que se registre la producción de un individuo utilizando el método A y después con el método B. El objetivo del experimento es determinar si la diferencia en la producción entre el método A y el método B es o no estadísticamente significativa.

En los capítulos 9, 10 y 11 se consideró una media o la diferencia entre dos medias. En el capítulo 12 se presentó un procedimiento denominado *análisis de variancia*, (ANOVA), que se emplea simultáneamente para determinar si tres o más poblaciones tienen o no medias idénticas. Esto se logra comparando las variancias de las muestras aleatorias seleccionadas a partir de estas poblaciones. Se aplicó el procedimiento común de prueba de hipótesis de cinco pasos, pero se usó como estadístico de prueba una distribución probabilística denominada distribución F. Antes de iniciar los cálculos de F, se elaboró una tabla ANOVA para organizar los cálculos en forma conveniente.

Como ejemplo de la aplicación del análisis de variancia, pudo realizarse una prueba para determinar si hay diferencia en la efectividad entre cinco fertilizantes

sobre el peso de mazorcas de maíz. Este tipo de análisis se conoce como *ANOVA de un sentido* (one-way) ya que es posible llegar a conclusiones sólo sobre un factor, denominado *tratamiento*. Si se desea llegar a una conclusión sobre los efectos simultáneos de más de un factor o variable, se aplica la técnica *ANOVA de dos sentidos* (two-way). Tanto la prueba en un sentido como la prueba en dos sentidos emplean la *distribución F* como estadístico de prueba. La *F* también es el estadístico de prueba que se utiliza para determinar si una población normal tiene más variación que otra. Además, se aplica cuando se desea probar el supuesto de que las variancias de dos poblaciones son iguales.

GLOSARIO

Capítulo 11

Distribución *t* Fue investigada y dada a conocer por William S. Gossett, en 1908, bajo el seudónimo de *Student*. Resulta similar a la distribución normal (cap.7) en donde:

1. Es una distribución continua
2. Puede tomar valores entre $-\infty$ y ∞.
3. Es simétrica respecto a su media de cero. Sin embargo, es más extendida en la base y menos aguda en el vértice que la distribución normal.
4. Se aproxima a una distribución normal a medida que aumenta *n*.
5. Existe una "familia" de distribuciones *t*. Una distribución *t* existe para una muestra de 15, otra para una muestra de 16, y así sucesivamente.

Grados de libertad Número de elementos en una muestra que pueden variar. Supóngase que existen dos elementos en una muestra y se conoce la media. Se tiene libertad para especificar sólo uno de los dos valores, ya que el otro valor queda determinado automáticamente (pues el total de los dos valores es dos veces la media). Ejemplo: si la media es \$6, es posible elegir sólo un valor. Si se elige \$4 el otro valor es \$8 ya que \$4 + \$8 = 2(\$6). Así que hay un grado de libertad en este ejemplo. Se podría haber determinado mediante $n - 1 = 2 - 1 = 1$ grado de libertad. Si $n = 4$, entonces hay 3 grados de libertad, lo que se obtiene mediante $n - 1 = 4 - 1 = 3$.

Muestras dependientes Muestras que se seleccionan de varias poblaciones de manera que no son independientes entre sí. Las muestras por pares son dependientes, ya que el mismo elemento pertenece a ambas muestras. Ejemplo: si las calificaciones en pruebas de 10 personas se registraran antes de implantar un nuevo método de enseñanza y se registraran sus calificaciones después de usar el nuevo método, las dos muestras por pares se considerarían dependientes.

Muestras independientes Muestras que se seleccionan aleatoriamente, de ninguna manera están relacionadas entre sí. Ejemplo: una muestra de las edades de 28 reclusos en una prisión y una muestra de las edades de 19 estudiantes en una universidad son ejemplos de muestras independientes.

Prueba de diferencias por pares Prueba de hipótesis que se realiza usando muestras por pares. En especial es útil para problemas de "antes" y "después" y para probar si el Método A y el B son de igual eficacia.

Capítulo 12

Análisis de variancia (ANOVA) Técnica usada para probar simultáneamente si las medias de tres o más poblaciones son iguales o no. Utiliza la distribución *F* como estadístico de prueba.

Distribución *F* Se emplea como estadístico de prueba para problemas ANOVA y tiene las siguientes características:

1. El valor de *F* siempre es positivo.
2. La distribución *F* es una distribución continua que se aproxima indefinidamente al eje X (pero nunca lo toca).
3. Tiene sesgo positivo.
4. Como en el caso de la distribución *t* hay una "familia" de distribuciones *F*. Existe una distribución para 17 grados de libertad en el numerador y 9 grados de libertad en el denominador. Hay otra distribución *F* para 7 grados de libertad en el numerador y 12 grados de libertad en el denominador, y así sucesivamente.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

Parte I - Selección múltiple

Para los ejercicios 1 a 12, señale la letra que representa la respuesta correcta.

1. El estadístico para probar una hipótesis referente a muestras pequeñas es:
   a. *z*.
   b. *t*.
   c. *F*.
   d. $A > B$.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.
2. Se desea probar una hipótesis sobre la diferencia entre dos medias poblacionales. Las hipótesis nula y alternativa se plantean como $H_0: \mu_1 = \mu_2$ y $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
   a. Debe aplicarse una prueba de cola izquierda.
   b. Debe aplicarse una prueba de dos colas.
   c. Debe aplicarse una prueba de cola derecha.
   d. No se puede determinar si debe aplicarse una prueba de cola izquierda o derecha, o de dos colas, con base en la información disponible.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta
3. La distribución *F*:
   a. No puede ser negativa.
   b. No puede ser positiva.
   c. Es igual a la distribución *t*.
   d. Es igual a la distribución *z*.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

4. A medida que aumenta el tamaño de la muestra, la distribución *t* se aproxima a:
   a. ANOVA
   b. La distribución normal.
   c. La distribución de Poisson.
   d. Cero.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

5. Para realizar una prueba de diferencias por pares, las muestras deben ser:
   a. Infinitamente grandes.
   b. Iguales a las ANOVA.
   c. Independientes.
   d. Dependientes.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

6. Se realizó una prueba ANOVA y se rechazó la hipótesis nula. Esto indica que:
   a. Hay demasiados grados de libertad.
   b. No hay diferencia entre las medias poblacionales.
   c. Existe diferencia entre al menos un par de medias poblacionales.
   d. Debe elegirse una muestra más grande.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

Utilice la siguiente información para los ejercicios 7, 8 y 9. La Metropolitan Builders Association afirmó que el costo promedio para construir un edificio de apartamentos de varios pisos en un área urbana es de $80 (dólares) por pie cuadrado. Un contratista de la construcción afirma que el costo promedio por pie cuadrado es de más de $80. Una muestra de 21 edificios de apartamentos reveló una media muestral de $81.

7. La hipótesis alternativa es:
   a. $H_0: \mu = \$80$.
   b. $H_1: \mu = \$80$.
   c. $H_0: \mu = \$81$.
   d. $H_1: \mu > \$81$.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

8. El número de grados de libertad para este problema es:
   a. 80.
   b. 0.
   c. 21.
   d. 20.
   e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

9. Se calculó que el valor de t es 1.90. Al nivel 0.05 de significación, la hipótesis nula se:
   a. Acepta.
   b. Rechaza.
   c. Se acepta y se rechaza.
   d. Ninguna de estas respuestas es correcta.

Los ejercicios 10, 11 y 12 se basan en lo siguiente. Se efectuó un estudio preliminar del salario por hora que se paga a empleados no capacitados en tres áreas metropolitanas. Se incluyeron siete empleados del Area A, 9 del Area B y 12 del Area C. Se calculó que el estadístico de prueba vale 4.91

10. Para este tipo de problema se usaría la:
    a. Prueba z.
    b. Prueba t.
    c. Prueba χ^2.
    d. Prueba F.
    e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

11. Al nivel de significación 0.01, el valor crítico es:
    a. 1.96.
    b. −1.96.
    c. 5 000.
    d. 5.00.
    e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

12. Se concluiría que:
    a. Los salarios medios por hora de empleados no capacitados en las tres áreas son iguales.
    b. Los salarios medios por hora al menos en dos áreas son diferentes.
    c. Se necesitan más grados de libertad.
    e. Ninguna de estas respuestas es correcta.

Parte II - Problemas

13. Se planteó la hipótesis de que los empleados de oficina de las universidades no se dedican al trabajo productivo 20 min en promedio de cada hora. Algunos plantearon que la pérdida de tiempo era de más de 20 minutos. Se llevó a cabo un estudio real en una universidad utilizando un reloj y otros medios de vigilar los hábitos de trabajo de los empleados. Una comprobación aleatoria reveló los siguientes tiempos improductivos, en minutos, durante un periodo de una hora (a excepción de los descansos programados regularmente): 10, 25, 17, 20, 28, 30, 18, 23 y 18. Pruebe al nivel 0.05 que el tiempo medio improductivo es de 20 min contra la hipótesis alternativa de que es de más de 20 min.

14. Se hará una prueba de significación que implica la fuerza media de unión de dos pegamentos diseñados para material plástico. Primero, se cubrió un gancho pequeño de plástico en un extremo con el pegamento Epox y se fijó a una hoja de plástico. Después que secó, se fue agregando peso al gancho hasta que se separó de la hoja de plástico. Luego se registró el peso. Esto se repitió hasta que se probaron 12 ganchos. Se siguió el mismo procedimiento para el pegamento Holdtite, pero sólo se usaron 10 ganchos. Los resultados muestrales, en libras, fueron:

	Epox	*Holdtite*
Media muestral	250	252
Desviación estándar de la muestra	5	8
Número en la muestra	12	10

Pruebe al nivel 0.01 que no hay diferencia entre la fuerza de pegado de Epox y Holdtite.

15. Se probará un aditivo formulado para prolongar la vida de pinturas que se utilizan en una región. Se pintó la mitad superior de una tabla utilizando la pintura normal. En la mitad inferior se aplicó pintura que incluye el aditivo. El procedimiento de muestra se aplicó a un total de 10 tablas. Después cada tabla se sometió a un rocío de agua a alta

presión y luz brillante. Los datos, número de horas que resistió la pintura en cada tabla antes de desvanecerse, se presentan a continuación:

	Número de horas por muestra									
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Sin aditivo	325	313	320	340	318	312	319	330	333	319
Con aditivo	323	313	326	343	310	320	313	340	330	315

Utilice el nivel 0.05 y determine si el aditivo es eficaz para prolongar la duración de la pintura como sigue:

a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
b. Presente la regla de decisión en forma de gráfica.
c. Haga los cálculos y tome una decisión.

16. Un encargada de distribución de bebidas gaseosas anuncia una venta super-especial en paquetes de 12. Se pregunta dónde colocar las bebidas gaseosas para que capten mayor atención. ¿Debe ser cerca de la puerta principal de las tiendas, en la sección de bebidas gaseosas, junto a las cajas registradoras, o cerca de la leche y otros productos lácteos? Cuatro tiendas con ventas totales similares cooperaron en un experimento. En una tienda los paquetes de 12 bebidas se apilaron cerca de la puerta principal, en otra se colocaron cerca de las cajas registradoras, y así sucesivamente. Se inspeccionaron las ventas en horas específicas en cada tienda exactamente cuatro minutos. Los resultados fueron:

Bebidas cerca de la puerta	*Bebidas en la sección respectiva*	*Bebidas cerca de las cajas registradoras*	*Bebidas cerca de los lácteos*
$6	$ 5	$ 7	$10
8	10	10	9
3	12	9	6
7	4	4	11
	9	5	
		7	

La distribuidora desea determinar si existe diferencia en las ventas medias de las bebidas gaseosas colocadas en cuatro localidades de una tienda.

a. Plantee las hipótesis nula y alternativa.
b. Al nivel 0.05, ¿cuál es el valor crítico?
c. Haga los cálculos necesarios y tome una decisión.

17. Un economista agrícola deseaba determinar si las condiciones del suelo y el tipo de fertilizante tienen efectos en la productividad de moras. Se obtuvieron los siguientes resultados en cajas por acre, a partir de un estudio de 15 combinaciones de condiciones de suelo y tipos de fertilizante.

Condiciones del suelo	*Productividad (cajas) por tipo de fertilizante*				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Seco	15	13	7	16	9
Moderado	10	11	8	15	10
Húmedo	18	14	6	19	12

a. Plantee los dos conjuntos de hipótesis.
b. Establezca los valores críticos usando el nivel de significación 0.05.

c. ¿Cuál es su decisión respecto a las dos hipótesis nulas?
d. Interprete los resultados obtenidos.

18. Un estudio reciente del decano de estudiantes en Nova College demostró que el número medio de las horas de clase que intenta cursar una muestra de 28 estudiantes de la especialidad de ingeniería fue 12.2, y la desviación estándar, 2.85 horas. Un estudio de 23 estudiantes de enfermería en Nova mostró que el número medio de las horas de clase que se intenta cursar fue casi el mismo (12.8) pero la desviación estándar fue mucho mayor (3.9 horas). El decano cree que esto se debe a que muchas estudiantes de enfermería encontraron trabajo de medio tiempo por las noches y fines de semana en hospitales locales y prefirieron tomar menos horas de clase. Además, aparentemente algunas de las estudiantes de enfermería estaban ansiosas por terminar su programa de estudios, ya que abundaban los empleos en este campo y tomaron un número excesivo de horas de clase. Al nivel 0.05, ¿puede concluir el decano que hay más variación en el número de horas que intentan cursar las estudiantes de enfermería que los estudiantes de ingeniería?

13

Análisis de correlación simple

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Trazar un diagrama de dispersión.
2. Calcular el coeficiente de correlación de Pearson y explicar su empleo.
3. Demostrar el significado del coeficiente de correlación.
4. Calcular y explicar el uso de los coeficientes de determinación y de no determinación.
5. Explicar el objetivo del coeficiente de correlación de rango y calcular su valor.

Los capítulos 2 a 4 se dedicaron a la *Estadística descriptiva.* Se organizaron datos en bruto en una distribución de frecuencia y se calcularon varios promedios y medidas de dispersión a fin de describir las principales características de los datos. En el capítulo 5 se inició el estudio de la *inferencia estadística.* Se destacó principalmente cómo deducir algo acerca de un parámetro poblacional, como la media de la población, con base en una estadística muestral. Se probó cuán razonable resultaba una media o proporción poblacional, la diferencia entre dos medias poblacionales y (en el capítulo 12) si más de dos medias poblacionales son iguales. En todas estas pruebas se trabajó sólo con una variable de nivel de intervalo o de razón, como ingreso, eficiencia laboral o longitud.

En este capítulo la importancia cambia a la *relación entre dos o más variables.* Se examinarán preguntas como éstas: ¿existe relación entre los promedios de calificación en bachillerato y en universidad? ¿Existe relación entre lo que una empresa gasta en publicidad y el importe de sus ventas? ¿Existe relación entre el número de años de antigüedad en el trabajo y la productividad? Obsérvese que hay *dos* variables: por ejemplo, número de años de servicio en un trabajo y productividad.

Primero se examinará el significado y el objetivo del análisis de correlación y después se estudiará un diagrama diseñado para representar la relación entre dos variables: un *diagrama de dispersión.* Se presentarán las medidas para describir el grado de relación, incluyendo el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación.

¿QUE ES UN ANALISIS DE CORRELACION SIMPLE?

Con un ejemplo se describe mejor el significado de *análisis de correlación.* Supóngase que interesa un grupo de estudiantes universitarios de segundo grado. Se desea determinar la relación entre sus promedios de calificaciones en el bachillerato y los promedios de calificaciones después del primer año en la universidad. Tales promedios (P.Cal.) para algunos estudiantes son:

Estudiante	*P.Cal. en bachillerato*	*P.Cal. en universidad*
Frank Rousos	3.0	2.9
Sue Navchek	2.1	2.3
Art Seiple	4.0	3.9
Carma López	3.8	1.9

Parece haber cierta relación entre los dos desempeños académicos. Es decir, parece ser que quienes tuvieron calificaciones elevadas en bachillerato tienen promedios elevados de calificación en la universidad. Sin embargo, la relación no

es perfecta. Por ejemplo, Carma López tuvo un promedio muy alto (3.8) en el bachillerato, pero su desempeño de 1.9 en la universidad está muy por abajo del promedio.

En vez de hablar de generalidades, como se ha hecho hasta ahora, utilizaremos varias medidas estadísticas para representar y explicar con más precisión la relación entre las dos variables: Promedio de calificaciones en bachillerato y promedio de calificaciones en la universidad. A este grupo de técnicas estadísticas se le conoce como *análisis de correlación.*

Análisis de correlación Grupo de técnicas estadísticas empleado para medir la intensidad de la relación (correlación) entre dos variables.

El principal objetivo del análisis de correlación consiste en determinar qué tan intensa es la relación entre dos variables. Una medida de esta relación es el *coeficiente de correlación.* Se puede tomar cualquier valor en una escala de −1 a +1, inclusive. Primero se aplicarán estas medidas a datos en escala de intervalo y de razón. Sin embargo, antes de hacer esto representaremos los dos conjuntos de datos en un *diagrama de dispersión.*

DIAGRAMA DE DISPERSION

Diagrama de dispersión Gráfica que presenta la relación entre las dos variables de interés.

* Ejemplo

El director de personal de una empresa que tiene un importante grupo de vendedores, debe entrevistar y seleccionar nuevo personal. Ha diseñado una prueba que ayuda a seleccionar los mejores aspirantes para su personal de ventas. A fin de verificar la validez de una prueba como instrumento de predicción de las ventas semanales, eligió al azar cinco vendedores experimentados y aplicó la prueba a cada uno. (Desde luego, en la práctica real, para determinar la validez de la prueba se debía haber seleccionado un grupo mucho mayor. Intencionalmente se mantuvo al mínimo el tamaño del grupo para simplificar los cálculos.) La puntuación que cada vendedor obtuvo en la prueba después se pareó (o emparejó) con las ventas semanales (véase la tabla 13-1). ¿Cómo se representan estos datos pareados o en pares en un diagrama de dispersión?

TABLA 13-1

Puntuaciones de prueba y ventas semanales de cinco vendedores en la empresa Intrepid, Inc.

Vendedor	*Puntuación de prueba*	*Ventas semanales*
Sr. J. A. Amber	4	$ 5 000
Sr. B. N. Archer	7	12 000
Sra. G. D. Smith	3	4 000
Sr. A. B. Malcolm	6	8 000
Sra. A. Goodwin	10	11 000

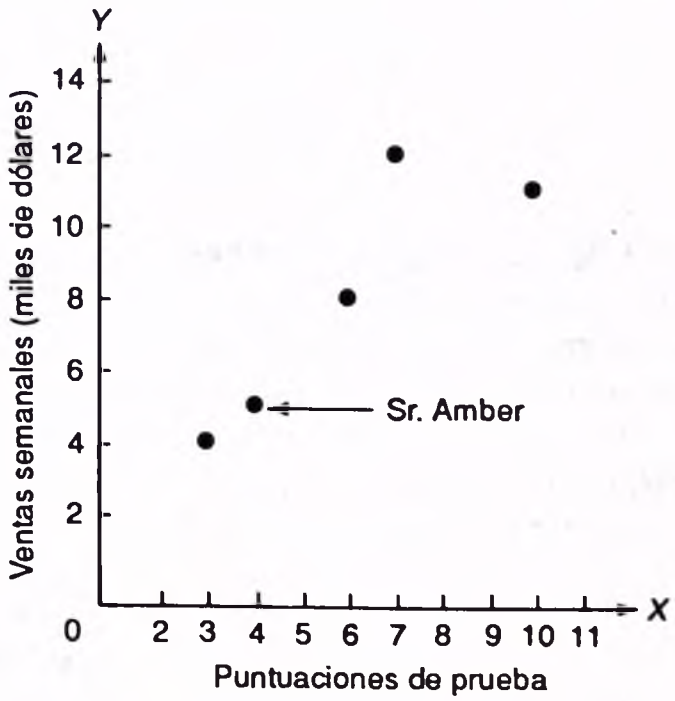
✔ Solución

Con base en los datos pareados de la tabla 13 - 1, el director de personal sospecha que las puntuaciones en realidad son buenos pronósticos de las ventas semanales. Por ejemplo, la Sra. Goodwin, tiene la puntuación más alta de prueba y sus ventas semanales son relativamente elevadas. La Sra. Smith tuvo una puntuación baja de la prueba y sus ventas son relativamente bajas. Esto significa que las ventas semanales *dependen* de la puntuación en la prueba. Entonces se estima que las ventas son la variable *dependiente*. Las puntuaciones constituyen la variable *independiente*.

Es práctica común marcar la variable dependiente (en este ejemplo, ventas) en el eje vertical (eje Y) y la variable independiente (puntuaciones de la prueba) en el eje horizontal (eje X). El par de datos para el Sr. Amber tomados de la tabla 13-1 es $X = 4$, $Y = \$5\,000$. Para ubicar el punto, recórrase hacia la derecha sobre el eje X hasta llegar a 4; después se sube en dirección vertical hasta $5 000 y se sitúa el punto en la intersección (véase el diagrama 13-1). Este proceso continúa hasta colocar todas las parejas de datos.

DIAGRAMA 13-1

Diagrama de dispersión que representa puntuaciones de prueba y ventas



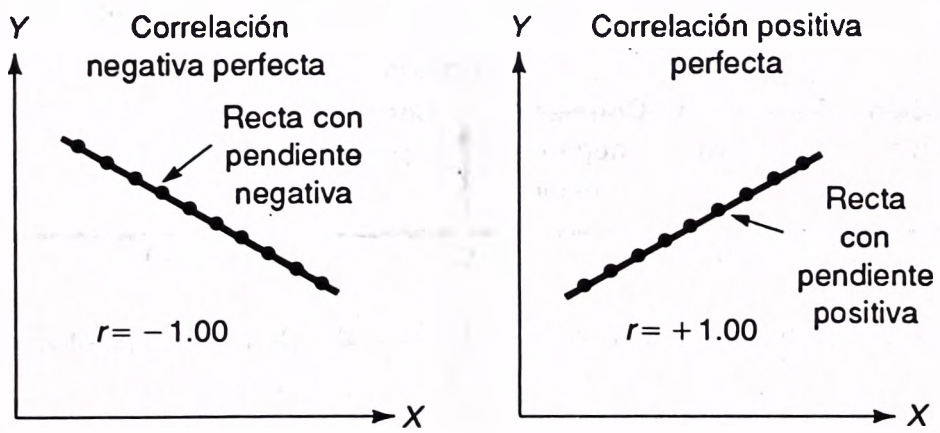
Obsérvese a partir del diagrama de dispersión que conforme aumentan las puntuaciones de prueba, lo mismo sucede con las ventas. Parece que existe una relación estrecha (correlación) entre las puntuaciones y las ventas semanales. En la sección que sigue se medirá esa relación calculando el *coeficiente de correlación.*

COEFICIENTE DE CORRELACION

Originado por el investigador Karl Pearson aproximadamente en el año 1900, el **coeficiente de correlación** describe la intensidad de la relación entre dos conjuntos de variables de nivel de intervalo o de nivel de razón. Ya que se le denota con *r*, con frecuencia se menciona también como *r* de Pearson o *coeficiente de correlación producto-momento de Pearson.* Puede tomar cualquier valor de −1.00 a +1.00, inclusive. Un coeficiente de correlación de −1.00 o de +1.00 indica *correlación perfecta.* Por ejemplo, un coeficiente de correlación para el ejemplo anterior calculado como +1.00 indicaría que las puntuaciones de prueba eran un pronóstico perfecto de las ventas semanales. Esto es, puntuaciones y ventas están perfectamente correlacionados en un sentido lineal positivo. Un valor calculado de −1.00 revela que la variable independiente *X* y la variable dependiente *Y* están perfectamente relacionadas en forma lineal negativa. La forma como quedarían los diagramas de dispersión si la relación entre los dos conjuntos de datos fueran lineales y perfectos se muestra en el diagrama 13-2.

DIAGRAMA 13-2

Diagramas de dispersión que muestran correlaciones negativa y positiva perfectas

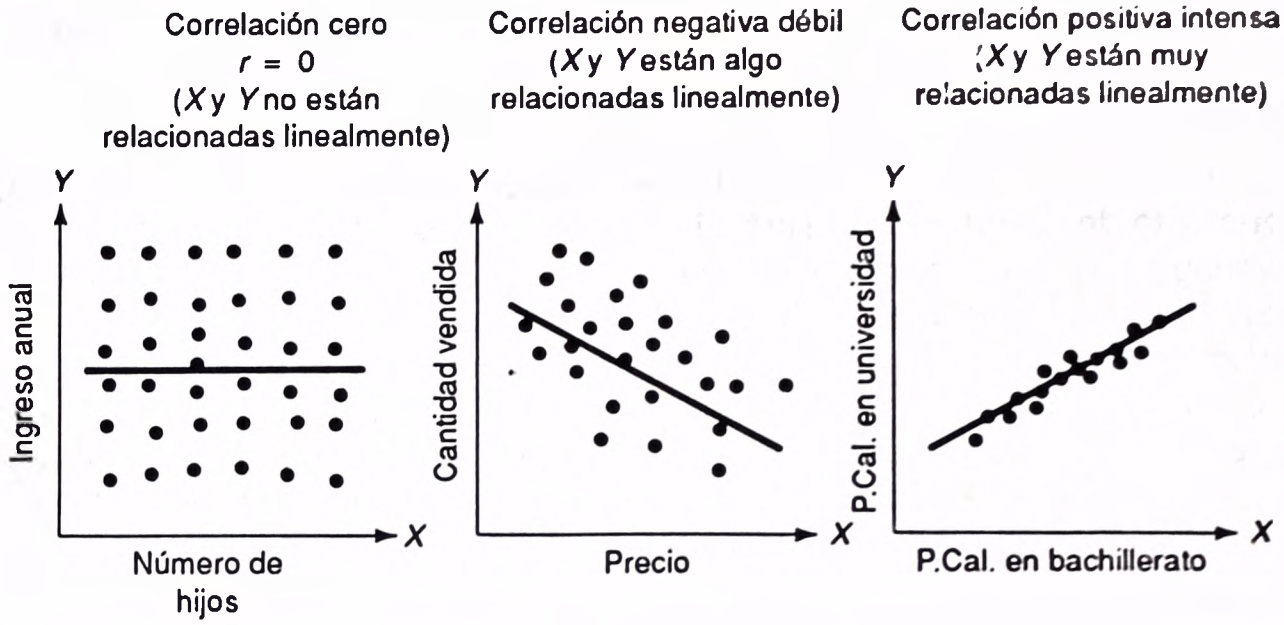


Si no existe en absoluto relación entre los dos conjuntos de variables, la *r* de Pearson será cero. Un coeficiente de correlación *r* cercano a 0 (por ejemplo, 0.08) indica que la relación es poco intensa o débil. Se llega a la misma conclusión si *r* = −0.08. Coeficientes de −0.91 y +0.91 tienen igual fuerza; ambos indican una correlación muy intensa entre los dos conjuntos de variables. De esta forma, *la fuerza de la correlación no depende de la dirección (ya sea − o +).*

En el diagrama 13-3 se muestran diagramas de dispersión para *r* = 0, una *r* débil (por ejemplo, −0.23) y una *r* fuerte (por ejemplo, +0.87). Obsérvese que si la correlación es débil, existe una dispersión considerable con respecto a una línea recta trazada a través del espacio central de los datos. Para que el diagrama de

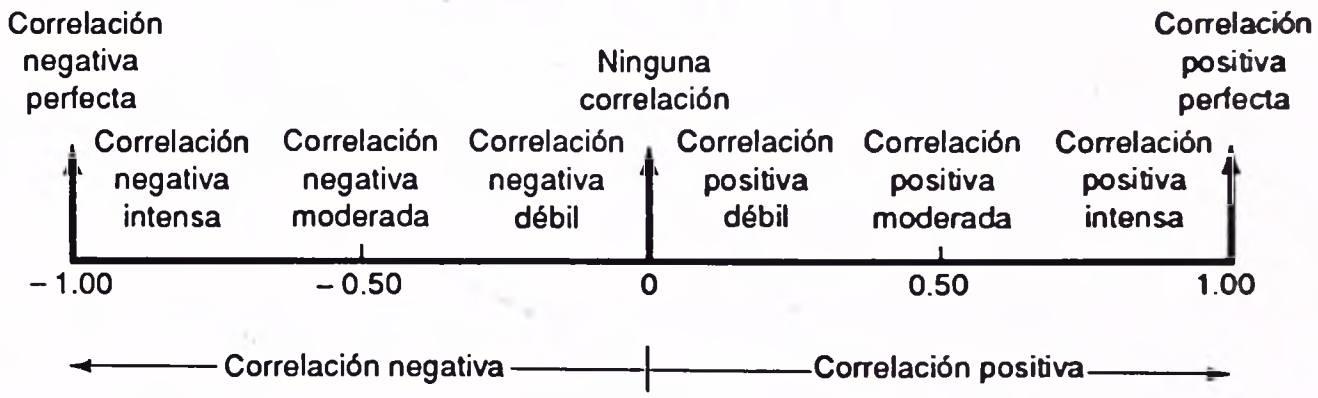
DIAGRAMA 13-3

Diagramas de dispersión que muestran correlación cero, débil y fuerte



dispersión represente una relación fuerte, debe haber poca dispersión con respecto a la recta. Esto indica que el promedio de calificaciones de bachillerato da un pronóstico muy certero del desempeño en la universidad.

El esquema que sigue representa adecuadamente la intensidad y la dirección del coeficiente de correlación.



Cálculo del coeficiente de correlación

Coeficiente de correlación Medida de la intensidad de la relación entre dos conjuntos de variables.

La fórmula para r es:

$$r = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2][n(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)^2]}}$$

en donde:

n es el número de pares de observaciones.
ΣX es la suma de valores de la variable X.
ΣY es la suma de valores de la variable Y.
(ΣX^2) es la suma de valores X elevados al cuadrado.
$(\Sigma X)^2$ es el cuadrado de la suma de valores de X.
(ΣY^2) es la suma de valores de Y elevados al cuadrado.
$(\Sigma Y)^2$ es el cuadrado de la suma de valores de Y.

✱ Ejemplo

Los datos para el problema sobre las ventas semanales y las puntuaciones de prueba y los cálculos necesarios para determinar el coeficiente de correlación se enlistan en la tabla 13-2. ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación?

TABLA 13-2

Cálculos necesarios para el coeficiente de correlación

Vendedor	*Puntuación de prueba* X	*Ventas semanales (miles de dólares)* Y	X^2	XY	Y^2
Sr. Amber	4	5	16	20	25
Sr. Archer	7	12	49	84	144
Sra. Smith	3	4	9	12	16
Sr. Malcolm	6	8	36	48	64
Sra. Goodwin	10	11	100	110	121
Total	30	40	210	274	370

✔ Solución

El coeficiente de correlación es 0.88, obtenido por medio del cálculo de:

$$r = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2][n(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)^2]}}$$

$$= \frac{5(274) - (30)(40)}{\sqrt{[5(210) - (30)^2][5(370) - (40)^2]}}$$

$$= \frac{170}{\sqrt{[150][250]}}$$

$$= 0.88$$

Es práctica común redondear r a centésimos; en este problema es 0.88, lo cual indica una relación muy intensa entre las puntuaciones de prueba y las ventas semanales. Entonces, la prueba del director de personal es conveniente para predecir las ventas semanales.

AUTOEXAMEN 13-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un agrónomo experimentó con distintas cantidades de fertilizante líquido en una muestra de parcelas del mismo tamaño. La cantidad de fertilizante y el rendimiento son:

Parcela	*Cantidad de fertilizante (toneladas)*	*Rendimiento (cientos de bushels)*
A	2	7
B	1	3
C	3	8
D	4	10

1. El agrónomo está interesado en predecir el rendimiento. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cuál es la variable independiente?
2. Trace un diagrama de dispersión.
3. Determine el coeficiente de correlación.
4. Interprete la intensidad de *r*.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Una empresa comercial tiene establecimientos en varias grandes áreas metropolitanas. La gerente general de ventas planea lanzar al aire un anuncio comercial por televisión en las estaciones locales, al menos dos veces, antes de una venta gigante que empezará el sábado y terminará el domingo. Planea tener las cifras de las ventas de video-caseteras del sábado y domingo en sus diferentes locales y parearlas con el número de veces que apareció el comercial en la televisión. El objetivo fundamental de la investigación es determinar si existe relación entre el número de veces que se transmitió el anuncio y las ventas de sus productos. Los pares de datos son:

Establecimientos de ventas	*Número de transmisiones de anuncios*	*Ventas de sábado y domingo (miles de dólares)*
Buffalo	4	15
Albany	2	8
Erie	5	21
Syracuse	6	24
Rochester	3	17

   a. ¿Cuál es la variable dependiente?
   b. Trace el diagrama de dispersión.
   c. ¿Parece haber alguna relación entre X y Y? Explique su respuesta.
   d. Determine el coeficiente de correlación.
   e. Evalúe la intensidad de la relación entre X y Y.

2. Una empresa industrial planea desarrollar un folleto para anunciar su nueva motocicleta X2B. Uno de los aspectos que se van a examinar y que se desea mencionar en el folleto es la relación velocidad-millas: ¿Existe una relación lineal entre la velocidad de la motocicleta y las millas por galón? Las pruebas de campo revelaron lo siguiente:

Velocidad constante (millas por hora) *X*	*Millas por galón* *Y*
40	54
30	60
70	37
50	46
60	48

Para explorar la relación:

a. Trace el diagrama de dispersión.
b. ¿Parece haber alguna relación entre las dos variables? Descríbala.
c. Calcule el coeficiente de correlación y evalúe su intensidad.

3. Se está efectuando un proyecto de investigación en una empresa para determinar si existe relación entre los años de servicio y la eficiencia de un empleado. El objetivo del estudio fue predecir la eficiencia de un empleado con base en los años de servicio. Los resultados muestrales fueron:

Empleado	*Tiempo de servicio*	*Puntuación de eficiencia*
Jones	1	6
Orlando	20	5
Ireland	6	3
Smith	8	5
Kordel	2	2
Harper	1	2
Lopez	15	4
Sobecki	8	3

a. ¿Cuál es la variable dependiente?
b. Trace el diagrama de dispersión.
c. Con base en el diagrama de dispersión, ¿parece haber alguna relación entre los años de servicio y la eficiencia?
d. Calcule el coeficiente de correlación.
e. Evalúe la intensidad de la relación.

4. En un departamento de producción se desea examinar la relación entre el número de trabajadores que arman un subensamble y el número de subensambles producidos. Como experimento, se asignaron dos empleados para armar el subensamble. Produjeron 15 durante un periodo de una hora. Después se asignaron cuatro al mismo trabajo. Produjeron 25 durante un periodo de una hora. A continuación está el conjunto completo de pares de observaciones.

Número de trabajadores	*Producción en una hora (unidades)*
2	15
4	25
1	10
5	40
3	30

La variable dependiente es la producción; esto es, se considera que el nivel de producción depende del número de trabajadores asignados.

a. Trace el diagrama de dispersión.
b. Con base en el diagrama, ¿parece haber alguna relación entre el número de trabajadores y la producción? Explique su respuesta.
c. Calcule el coeficiente de correlación.
d. Evalúe la fuerza de la relación.

COEFICIENTE DE DETERMINACION

En el ejemplo anterior respecto a la relación de puntuaciones de prueba y ventas semanales, el coeficiente de correlación 0.88 se interpretó como muy fuerte. En otro problema la relación podría considerarse "débil". Los términos *débil, moderado* y *fuerte* no tienen significado preciso. Una medida que tiene un significado más exacto es el **coeficiente de determinación.** Se calcula al elevar al cuadrado el coeficiente de correlación. Para el ejemplo, dicho coeficiente r^2, vale 0.77, que se obtuvo de $(0.88)^2$. Esta es una proporción o porcentaje; puede decirse que 77% de la variación total en las ventas semanales se explica por, o se debe a, la variación en las puntuaciones de prueba.

Coeficiente de determinación La proporción de la variación total en la variable dependiente Y que se explica por, o se debe a, la variación en la variable independiente X.

En el capítulo 14 se estudiará con mayor detenimiento el empleo del coeficiente de determinación.

COEFICIENTE DE NO DETERMINACION

Es lógico que el **coeficiente de no determinación** sea la proporción de la variación total en Y que *no* es explicada por la variación en X. Se calcula por medio de $1 - r^2$. En el problema de puntuaciones de prueba-ventas semanales, $1 - r^2 = 1 - (0.88)^2 = 1 - 0.77 = 0.23$. Esto significa que 23% de la variación total en las ventas semanales no se debe a la variación en las puntuaciones de prueba.

Los coeficientes de determinación y de no determinación sólo pueden ser positivos (porque al elevar al cuadrado una r negativa da como resultado un número positivo). Los coeficientes pueden tomar cualquier valor entre 0 y 1.00, inclusive. Obsérvese que el coeficiente de determinación siempre es menor que el coeficiente de correlación. Por ejemplo, un coeficiente de correlación de 0.80 elevado al cuadrado da un coeficiente de determinación de 0.64. Algunos estadígrafos preferirían utilizar la medida más conservadora, es decir, 0.64, considerando que el coeficiente de correlación de 0.80 puede exagerar la relación entre los dos conjuntos de variables.

AUTOEXAMEN 13-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase el autoexamen 13-1.

1. ¿Cuáles son el coeficiente de determinación y el de no determinación para el problema de fertilizante-rendimiento?
2. Interprete el significado de los dos coeficientes.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Véase el ejercicio 1.
   a. ¿Cuáles son el coeficiente de determinación y el de no determinación para el problema del anuncio de televisión y las ventas?
   b. Interprete el significado de los dos coeficientes.
6. Véase el ejercicio 2
   a. ¿Cuáles son el coeficiente de determinación y el de no determinación para el problema de velocidad y rendimiento de una motocicleta?
   b. Interprete el significado de los dos coeficientes.
7. Véase el ejercicio 3.
   a. ¿Cuáles son el coeficiente de determinación y el de no determinación para el problema de la calificación de eficiencia?
   b. Interprete el significado de los dos coeficientes.
8. Véase el ejercicio 4.
   a. ¿Cuáles son el coeficiente de determinación y el de no determinación para el problema de los ensambles?
   b. Interprete el significado de los dos coeficientes.

PRUEBA DE LA SIGNIFICACION DEL COEFICIENTE DE CORRELACION

Recuérdese que el director de personal de un ejemplo anterior diseñó una prueba para predecir las ventas semanales. El coeficiente de correlación entre las puntuaciones de prueba y las ventas semanales resultó ser de aproximadamente 0.88. Esto indica una marcada relación entre los dos conjuntos de variables. Sin embargo, sólo se incluyeron cinco vendedores en el experimento. Por tanto, uno podría preguntarse si (debido al tamaño pequeño de muestra) la correlación en la población podría ser 0 o no. Tal vez la intensa relación de 0.88 entre las puntuaciones de prueba y las ventas se deba al azar. La población en este ejemplo son todos los vendedores que emplea la empresa.

Resolver este dilema exige una prueba para contestar la pregunta obvia: ¿existe correlación cero entre la población de la cual se tomó la muestra? Para ponerlo en otra forma, ¿la r calculada proviene de una población de observaciones por pares con correlación cero? Para continuar con la convención de utilizar letras griegas para representar un valor poblacional, se utilizará la letra ρ (rho) para representar la correlación en la población.

Para un número de observaciones por pares menores de 50 (muestra "pequeña"), la prueba t se utiliza con más frecuencia para demostrar la significación de r. Para un número de 50 o mayor (muestra "grande"), se aplica la prueba z.

Muestras pequeñas

El ejemplo de puntuaciones de prueba-ventas semanales es un caso de muestra pequeña. Las hipótesis nula y alternativa son:

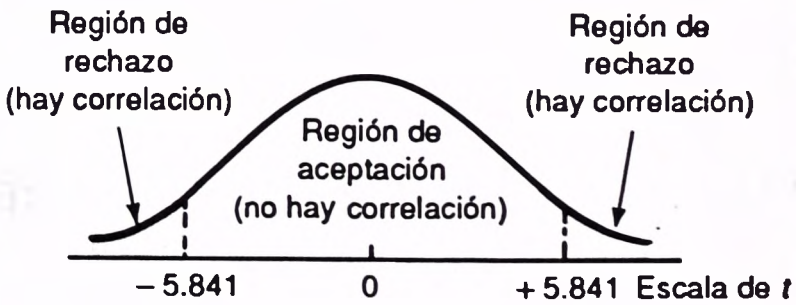
H_0: $\rho = 0$ (La correlación en la población es cero.)
H_1: $\rho \neq 0$ (La correlación en la población es distinta de cero.)

Debido a la forma en que está enunciada H_1, la prueba es de dos colas.

La fórmula para t es:

$$\boxed{t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}} \qquad \text{Con } n - 2 \text{ grados de libertad.}$$

Utilizando el nivel de significación 0.01, la regla de decisión indica que si la t calculada se encuentra en el área entre más 5.841 y menos 5.841, se aceptará la hipótesis nula. Para localizar el valor crítico 5.841, consúltese el apéndice F para $g.l. = n - 2$, o sea $5 - 2 = 3$. Mostrado en un esquema:



Aplicando la fórmula al problema de puntuaciones de prueba-ventas semanales:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.88\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(0.88)^2}} = 3.21$$

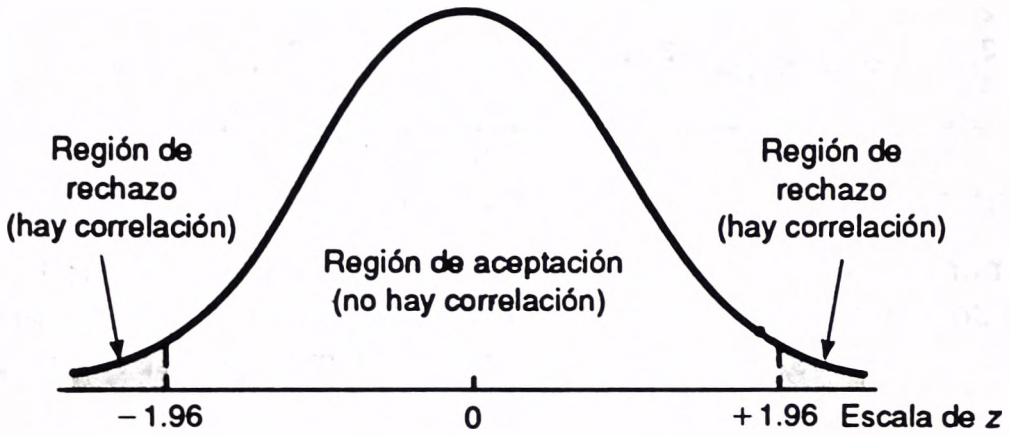
El valor calculado de t queda en el área de aceptación, de manera que H_0 se acepta al nivel 0.01, lo cual significa que la correlación en la población no es cero. Desde un punto de vista práctico, indica al director de personal que no se ha demostrado que haya correlación en la población.

Muestras grandes

Según se observó, la distribución normal estándar se utiliza como estadístico de prueba para las muestras de 50 o más. La fórmula para z es:

$$z = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

Supóngase que una muestra está formada por 401 conjuntos de observaciones por pares y que se calculó una r de 0.30. Si se aplican el nivel de significación 0.05 y una prueba de dos colas, la regla de decisión sería aceptar la hipótesis nula si el valor z calculado se encuentra entre -1.96 y 1.96 (del apéndice D). En un diagrama:



En este problema, H_0 se rechazaría al nivel 0.05 porque el valor calculado de 6.00 se encuentra en el área de rechazo. Los cálculos para z son:

$$z = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} = \frac{0.30}{\frac{1}{\sqrt{401-1}}} = 6.00$$

La correlación (0.30) entre los dos conjuntos de variables es más bien débil. Sin embargo, con base en la significación de la prueba, es poco probable que la relación en la población sea cero.

UNA APLICACION EMPLEANDO EL SISTEMA MINITAB

La computadora ahorra tiempo y reduce mucho la posibilidad de un error de cálculo. La mayoría de los paquetes también ofrecen algún tipo de ruta de graficación. El sistema MINITAB se utilizó para resolver el problema que sigue.

* Ejemplo

La directora de una escuela secundaria investigó una muestra de 20 estudiantes de un grupo que egresó del plantel en 1970. Registró el número de años de

educación después de la secundaria y el ingreso anual de las personas durante el último año. Desea saber si existe relación entre las dos variables. Lo descubierto en la muestra se enlista en la tabla 13-3.

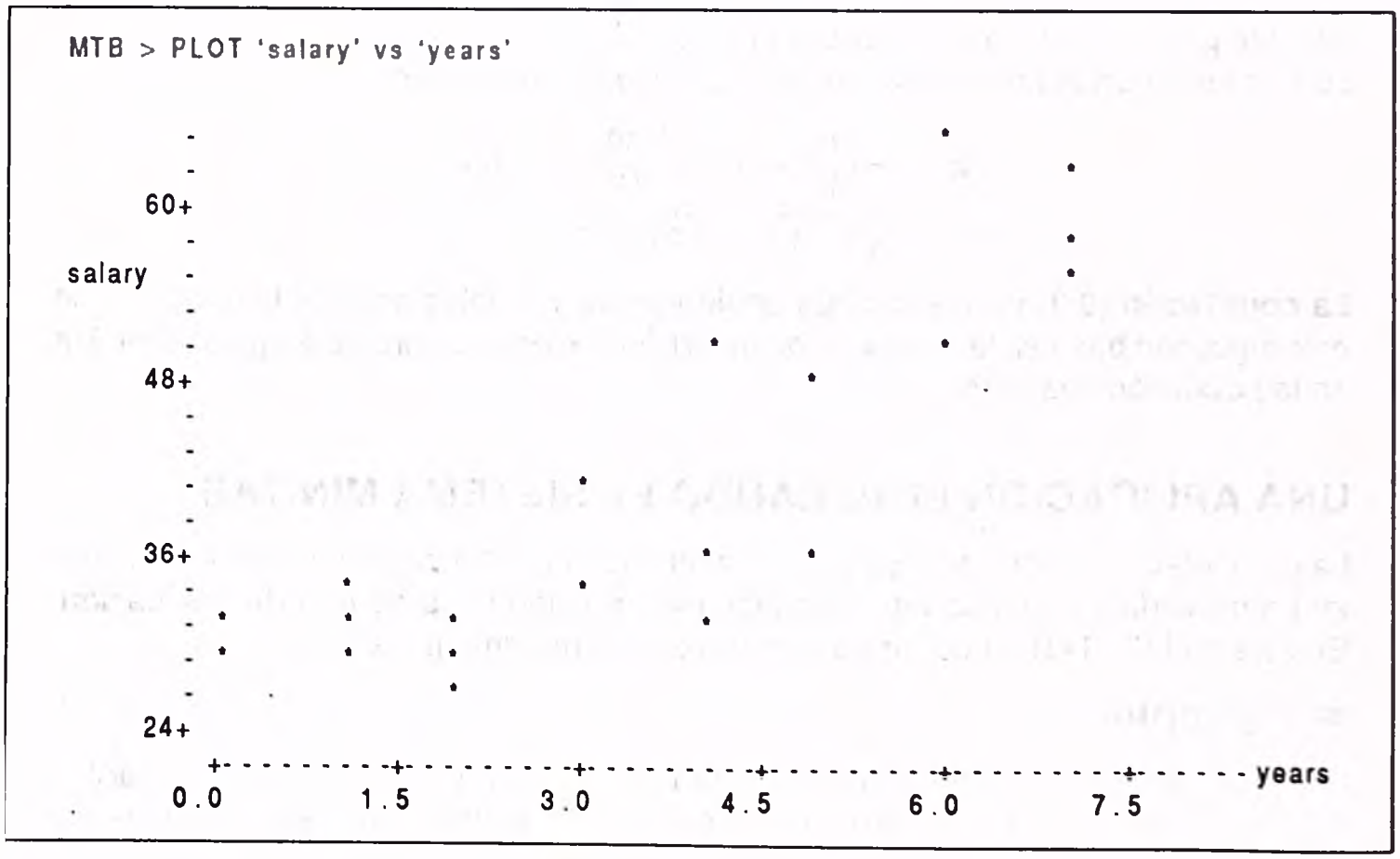
TABLA 13-3

Número de años de educación después del bachillerato e ingreso anual

Años después del bachillerato	*Ingreso anual (miles de dólares)*	*Años después del bachillerato*	*Ingreso anual (miles de dólares)*
0	31.6	4	35.6
0	28.0	4	50.2
1	34.0	4	31.7
1	30.5	5	48.0
1	27.8	5	36.5
2	29.5	6	50.6
2	26.8	6	63.9
2	31.2	7	57.6
3	34.2	7	61.2
3	39.8	7	54.9

✔ Solución

Como primer paso, la directora graficó los datos. Obsérvese que la relación no es exacta, es decir, no todos los puntos están sobre una recta, pero al parecer conforme aumentan los años de educación, sucede lo mismo con el ingreso anual. A continuación se presenta la gráfica MINITAB.



El coeficiente de correlación puede calcularse utilizando el sistema MINITAB. El comando (o mandato) es CORR.

```
MTB > corr c1 c2
Correlation of years and salary = 0 .868
```

Es posible utilizar el procedimiento normal de prueba de hipótesis para determinar si la asociación en la población es mayor que cero. En este caso, considere que la directora desea determinar si existe una asociación positiva entre los años de educación cursados y el ingreso anual. Las hipótesis nula y alternativa se establecerían como:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho > 0$$

El tamaño de la muestra es 20, de manera que hay $n - 2 = 20 - 2 = 18$ grados de libertad. Utilizando el nivel 0.05 y la prueba de una cola, la regla de decisión es rechazar la hipótesis nula si el valor calculado de t es mayor que 1.734. El estadístico de prueba calculado t es 7.42.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$
$$= \frac{0.868\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-(0.868)^2}} = 7.42$$

Puesto que el valor t calculado de 7.42 excede el valor crítico, la hipótesis nula se rechaza y se acepta la hipótesis alternativa. El ingreso anual aumenta conforme crece el número de años de educación. Existe una asociación positiva en la población entre estas dos variables.

CORRELACION DE RANGO

El coeficiente de correlación producto-momento de Pearson, r, analizado en la sección anterior, exige que los datos estén en escala de intervalo o de razón, como ingresos y pesos. Charles Spearman, estadígrafo británico, ideó una medida de correlación para datos de nivel ordinal o de rango, es decir, datos que están, o pueden, clasificarse de menor a mayor, o viceversa. A tal medida se le conoce como **coeficiente de rango de Spearman.** Denotado por r_s, mide el grado de relación entre dos conjuntos de observaciones ordenadas por rango o jerarquizadas.

La fórmula para r_s es:

$$\boxed{r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}}$$

en donde

d es la diferencia entre los rangos para cada par.

n es el número de observaciones por pares.

Igual que la r de Pearson, el coeficiente de correlación ordinal o de rango de Spearman puede tomar cualquier valor desde −1.00 hasta +1.00, inclusive, indicando −1.00 una correlación negativa perfecta, +1.00 una correlación positiva perfecta, y 0 falta de relación entre los dos conjuntos de datos. Recuérdese, valores de −0.14 y +0.14 tienen la misma intensidad y ambos indican una relación muy débil. El valor −0.14 revela que la relación es inversa; conforme la variable independiente X aumenta, la variable dependiente Y disminuye. Una correlación de rango positiva significa que conforme X aumenta, lo mismo sucede con Y.

Ahora determinaremos el coeficiente de correlación de rango para dos conjuntos de datos de nivel ordinal.

✱ Ejemplo

Los datos en pares de la tabla 13-4 y el diagrama de dispersión correspondiente ilustran el caso de correlación perfecta entre el rango o posición ordinal que tiene un trabajador dentro del grupo muestral de trabajadores en una prueba de destreza manual y su rango o jerarquía con respecto a la producción semanal. Tanto las

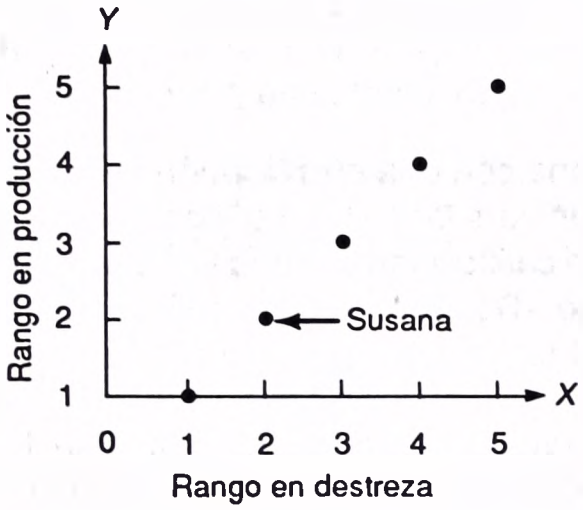
TABLA 13-4

Destreza manual y producción semanal

Nombre del trabajador	*Puntuación en prueba de destreza*	*Indice de producción semanal*	*Rango*	
			Destreza	*Producción*
Pedro	62	800	4	4
José	92	900	1	1
Daniel	70	840	3	3
Samuel	50	775	5	5
Susana	86	875	2	2

puntuaciones de destreza manual como el nivel de producción se han clasificado en rangos de alto (1) a bajo (5). Sin embargo, siempre y cuando ambos grupos se traten igual, no existe razón para que puntuaciones y producción no puedan clasificarse de alto (5) a bajo (1): r_s será la misma (+ 1.00) en cualquier caso. Obsérvese en la tabla que José tuvo la puntuación más alta de prueba y también obtuvo el primer rango en lo referente a producción. Los desempeños de Susana se clasificaron en 2 y 2 dentro del grupo, y así sucesivamente.

Los rangos se representan en un diagrama de dispersión:



Debe subrayarse que r_s se está utilizando como medida de correlación en este problema (en vez de la r de Pearson) porque interesa saber el grado de relación entre dos conjuntos de datos *clasificados por rango,* o jerarquizados.

Para los datos de la tabla 13-4, ¿cuál es el coeficiente de correlación de rango de Spearman?

✔ Solución

En este problema n es el número total de trabajadores en la muestra, o sea 5, y d es la desviación entre rangos para cada par. En parte, la fórmula conduce a elevar al cuadrado cada desviación y después sumar los cuadrados.

Los cálculos para r_s se muestran en la tabla 13-5.

TABLA 13-5

Cálculos necesarios para el coeficiente de rango de Spearman

Trabajador	*Destreza manual*	*Producción semanal*	d	d^2
Pedro	4	4	0	0
José	1	1	0	0
Daniel	3	3	0	0
Samuel	5	5	0	0
Susana	2	2	0	0
Total				0

A partir de estos datos, se determina que el coeficiente de correlación de rango de Spearman es 1.00.

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(0)}{5(5^2 - 1)} = 1.00$$

Según se esperaba, existe correlación perfecta (positiva) entre los rangos.

Ahora se considerará un caso en el que la correlación ordinal o de rango no es perfecta.

✱ Ejemplo

Este problema se relaciona con una clasificación compuesta, asignada por ejecutivos a cada graduado universitario que se incorpora al trabajo en una empresa fabricante de plásticos. La calificación otorgada es una expresión del potencial futuro del egresado universitario. (Desde luego, las calificaciones representan medidas a nivel ordinal.) Después el recién egresado ingresa a un programa de entrenamiento en la planta y se le otorga otra puntuación compuesta (basada en pruebas, opiniones de jefes de grupo, jefes de entrenamiento, etc.). En la tabla 13-6 se presentan las calificaciones asignadas por los ejecutivos y obtenidas en el entrenamiento en planta.

TABLA 13-6

Puntuaciones dadas por ejecutivos y calificaciones de entrenamiento en planta para un grupo de egresados universitarios

Egresado	*Puntuación otorgada* X	*Calificación en entrenamiento* Y
A	8	4
B	10	4
C	9	4
D	4	3
E	12	6
F	11	9
G	11	9
H	7	6
I	8	6
J	13	9
K	10	5
L	12	9

El problema consiste en determinar la relación entre las puntuaciones alcanzadas por los graduados y otorgadas por los ejecutivos antes de que entraran al programa de entrenamiento en planta (X) y las calificaciones que recibieron en el programa de entrenamiento (Y). Esto es, ¿cuál es el coeficiente de correlación de rango?

✔ Solución

Se decidió clasificar ordinalmente o por rango las variables de bajo (1) a alto. La calificación más baja otorgada por los ejecutivos fue 4, de manera que se le asignó un rango de 1. La siguiente más baja fue 7, con rango 2. Después hubo dos graduados con calificación 8. El empate se resuelve otorgando a cada persona un rango de 3.5, que es el promedio entre los rangos 3 y 4. Se sigue el mismo

procedimiento cuando hay más de dos puntuaciones en empate. Por ejemplo, obsérvese que la calificación más baja en entrenamiento es 3, y se le asigna un rango de 1. Después hay tres puntuaciones de 4. El promedio de los tres rangos en empate es 3.0, determinado por (2 + 3 + 4)/3. Esto se ilustra junto con los cálculos necesarios para determinar r_s en la tabla 13-7.

TABLA 13-7

Cálculos necesarios para r_s

Egresado	*Puntuación dada por ejecutivos* X	*Calificación en entrenamiento* Y	*Rango* *Por ejecutivos*	*Rango* *En entrenamiento*	*Diferencia entre rangos* d	*Diferencia al cuadrado* d^2
A	8	4	3.5	3.0	0.5	0.25
B	10	4	6.5	3.0	3.5	12.25
C	9	4	5.0	3.0	2.0	4.00
D	4	3	1.0	1.0	0	0
E	12	6	10.5	7.0	3.5	12.25
F	11	9	8.5	10.5	−2.0	4.00
G	11	9	8.5	10.5	−2.0	4.00
H	7	6	2.0	7.0	−5.0	25.00
I	8	6	3.5	7.0	−3.5	12.25
J	13	9	12.0	10.5	1.5	2.25
K	10	5	6.5	5.0	1.5	2.25
L	12	9	10.5	10.5	0	0
					0.0*	78.50

* La suma de desviaciones debe ser igual a 0.

se encuentra que r_s vale 0.73, utilizando:

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(78.50)}{12(143)} = 0.73$$

Este problema también puede resolverse con el sistema MINITAB. El primer paso consiste en introducir los datos en la forma acostumbrada. Después se determinan los rangos para cada columna de datos, y a continuación se determina la correlación de éstos. (Obsérvese que existe una pequeña diferencia entre las dos respuestas y se debe al uso de formas distintas de la ecuación y al redondeo.)

```
MTB > set c1
DATA> 8,10,9,***,12
DATA > end
MTB set c2
DATA> 4,4,4,***,9
DATA> end
MTB > rank c1,put in c10
MTB > rank c2,put in c11
MTB > corr c10 c11

Correlation of C10 and C11 = 0.715
```

AUTOEXAMEN 13-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para una pequeña muestra de personas se obtuvieron las puntuaciones que siguen en una prueba de percepción visual (X) y una de aptitudes mecánicas (Y):

Sujeto	*Percepción visual*	*Aptitudes mecánicas*
001	805	23
002	777	62
003	820	60
004	682	40
005	777	70
006	810	28
007	805	30
008	840	42
009	777	55
010	820	51

1. Trace un diagrama de dispersión (utilizando rangos).
2. Con base en el diagrama de dispersión, ¿qué puede decirse acerca de la correlación de rango entre las dos variables?
3. Calcule r_s
4. Interprete r_s

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. El grupo de investigación de una red de televisión desea realizar una prueba preliminar de un cuestionario que se enviará por correo a varios miles de espectadores. Una de las preguntas pide a ciudadanos de edad madura, hombres y mujeres, otorguen rangos a la popularidad de ciertos programas de tiempo preferencial. Las clasificaciones compuestas por rango de un pequeño grupo de tales personas son:

Programa	*Clasificación dada por hombres*	*Clasificación dada por mujeres*
"Monday Night Football"	1	5
"Robin Crest"	4	1
"Simon and Sandor"	3	2
Noticias vespertinas	2	4
"Our Hero"	5	3

   a. Trace un diagrama de dispersión. Represente con X los rangos dados por las personas de sexo masculino.
   b. Calcule el coeficiente de correlación de rango de Spearman. Interprételo.

10. Una universidad ofrece cursos diurnos y nocturnos en administración de empresas. Se va a realizar una amplia encuesta. Una pregunta se relaciona con los estudiantes de segundo año y la forma como perciben el prestigio asociado con ciertas carreras, como contaduría. A cada estudiante se le pidió que clasificara por rango las carreras de 1 a 8, siendo 1 el máximo prestigio y 8 el mínimo. Los resultados compuestos fueron:

Carrera	*Clasificación dada por estudiantes del turno diurno*	*Clasificación dada por estudiantes del turno vespertino*
Contador	6	3
Programador de computadora	7	2
Gerente de sucursal bancaria	2	6
Administrador de hospital	5	4
Estadígrafo	1	7
Investigador de mercadotecnia	4	8
Corredor de bolsa	3	5
Gerente de producción	8	1

a. Represente las clasificaciones por rango en un diagrama de dispersión. Denote con X los rangos dados por los estudiantes del turno diurno.
b. Calcule el coeficiente de correlación de Spearman, e interprételo.

11. Nuevos representantes de ventas para una empresa asistieron a un breve programa de entrenamiento, antes de que se les asignara a una oficina regional. Al final del programa, cada representante fue clasificado por rango con respecto a su potencial futuro en ventas. Al final del primer año de actividad, sus clasificaciones por rango se ordenaron por pares con las ventas anuales:

Representante	*Ventas anuales (miles de dólares)*	*Rango en el programa de entrenamiento*
Ramírez	319	3
Bond	150	9
Gross	175	6
Arbuckle	460	1
Greene	348	4
Arden	300	10
Crane	280	5
Arthur	200	2
Keene	190	7
López	300	8

a. Calcule el coeficiente de correlación de rangos de Spearman.
b. Interprételo r_s

12. Una universidad tiene cinco becas disponibles para el equipo femenil de basquetbol. El entrenador proporcionó a dos reclutadores, los nombres de 10 jugadoras de bachillerato con posibilidades. Cada reclutador asistió al menos a tres de sus juegos y después clasificó por rango a las jugadoras con respecto a su potencialidad.

	Rango dado por el reclutador	
Jugadora	*Jean Cann*	*John Cannelli*
Cora Jean Seiple	7	5
Bette Jones	2	4
Jeannie Black	10	10
Norma Tidwell	1	3
Kathy Marchal	6	6
Candy Jenkins	3	1

	Rango dado por el reclutador	
Jugadora	*Jean Cann*	*John Cannelli*
Rita Rosinski	5	7
Anita Lockes	4	2
Brenda Towne	8	9
Denise Ober	9	8

a. Determine el coeficiente de correlación de rango de Spearman.
b. Evalúe el beneficio de que ambos reclutadores hayan clasificado por rangos la potencialidad de las jugadoras.

Prueba de la significación de r_s

Antes se ha probado la significación de la r de Pearson. Para datos clasificados por rangos, también se presenta la cuestión de si tener o no una pequeña muestra, ocasiona que la correlación sea cero. Por ejemplo, sólo se tomaron 12 ejecutivos en la muestra del ejemplo, y únicamente 10 individuos en el autoexamen 13-3. En el ejemplo, el coeficiente de correlación de rango de 0.73 indica una relación intensa entre los dos conjuntos de rangos. ¿Es posible que la correlación de 0.73 se deba al azar y que la correlación en la población en realidad sea 0? Ahora efectuaremos una prueba de significación para responder a esta pregunta.

La prueba para muestras pequeñas difiere un poco de la prueba para muestras grandes. Sin embargo, el primer paso a seguir para cualquier tamaño, consiste en enunciar las hipótesis nula y alternativa.

H_0 : La correlación en la población es cero.
H_1 : La correlación en la población es mayor que cero.

Muestras pequeñas

Para una muestra menor de 10, el valor crítico se determina refiriéndose al apéndice H. Si, con base en los resultados muestrales, el valor calculado de r_s es menor que el valor crítico, se acepta la hipótesis nula. En caso contrario, se rechaza y se acepta H_1.

Obsérvese que el apéndice H en realidad va de una n de 4 a 30, lo cual indica que puede utilizarse para cualquier tamaño de muestra en ese intervalo. Como ejemplo, en el Autoexamen 13-3, que se refiere a percepción visual y aptitudes mecánicas, r_s se calculó como -0.17; $n = 10$. El valor crítico al nivel 0.05 es 0.564. Puesto que 0.17 es menor que 0.564, se acepta la hipótesis nula. No existe relación entre la percepción visual y las aptitudes mecánicas en la población; esto es, el valor de 0.17 se debe al azar.

Muestras grandes

Para una muestra de 10 o más, la significación de r_s se determina ya sea mediante (1) que se refiere al apéndice H para el valor crítico o (2) calcular la t de Student.

En este aspecto, la distribución muestral de r_s sigue la distribución t con $n - 2$ grados de libertad. El valor calculado de t se determina por:

$$\boxed{t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}}$$

con $n - 2$ grados de libertad.

Ambos métodos se aplicarán al resultado de 0.73 calculado en el problema acerca de las puntuaciones dadas por los ejecutivos y las puntuaciones del entrenamiento en plantas (tabla 13-6). Primero, usando el apéndice H, el valor crítico para una n de 12 y al nivel 0.05 es 0.506. Puesto que el valor calculado (0.73) se encuentra más allá de este valor crítico, se rechaza la hipótesis nula al nivel 0.05 y se acepta H_1. Eso significa que la correlación de rango en la población es mayor que cero.

La regla de decisión para el segundo método, utilizando la t de Student, necesita aceptar H_0 si el valor calculado de t es menor que el valor crítico de 1.812 (apéndice F, nivel 0.05, prueba de una cola y $g.l. = 10$, obtenido por $n - 2 = 12 - 2 = 10$).

El valor calculado de t es 3.38:

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = 0.73 \sqrt{\frac{12-2}{1-(0.73)^2}} = 3.38$$

La decisión es la misma que antes, es decir, se rechaza la hipótesis nula al nivel 0.05 (pues 3.38 está más allá del valor crítico de 1.812). De nuevo, resulta poco probable que la relación entre las dos variables sea cero.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. Se seleccionó al azar un grupo de personas senectas de sexo masculino y se les planteó una serie de preguntas acerca de deportes y sucesos mundiales. Los resultados se tradujeron a una puntuación de "conocimientos". Las puntuaciones fueron:

Ciudadano	*Deportes*	*Sucesos mundiales*
Sr. J. C. McCarthy	47	49
Sr. A. N. Baker	12	10
Sr. B. B. Beebe	62	76
Sr. L. D. Gaucet	81	92
Sr. C. A. Jones	90	86
Sr. J. N. Narko	35	42
Sr. A. F. Nissen	61	61
Sr. L. M. Zaugg	87	75
Sr. J. B. Simon	59	86
Sr. J. Goulden	40	61
Sr. A. A. Davis	87	18
Sr. A. M. Carbo	16	75
Sr. A. O. Smithy	50	51
Sr. J. J. Pascal	60	61

Otras dos medidas de relación son el *coeficiente de determinación* y el *coeficiente de no determinación*. El primero se determina al elevar r al cuadrado y se define como la proporción de la variación en Y explicada por medio de X. El coeficiente de no determinación se obtiene por medio de $1 - r^2$ y es la proporción de la variación en Y no explicada por X.

Se dispone de una medida de correlación para el nivel de medición ordinal. Como su nombre lo indica, el *coeficiente de correlación de rango de Spearman* mide el grado de asociación entre dos conjuntos de datos que han sido ordenados o clasificados por rango de menor a mayor, o viceversa.

Recapitulación

I. Análisis de correlación: nivel de medición de intervalo o razón.
   A. Su objetivo es determinar el grado de asociación entre las variables dependiente e independiente.
   B. Hay tres medidas de asociación.
      1. El coeficiente de correlación r mide el grado de asociación lineal entre X y Y. Puede adoptar cualquier valor entre −1 y +1. La fórmula para r es:

$$r = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2][n(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)^2]}}$$

      2. El coeficiente de determinación, r^2, es la proporción de la variación en Y explicada por X. Puede adoptar cualquier valor entre 0 y 1, inclusive.
      3. El coeficiente de no determinación, $1 - r^2$, es la proporción de la variación en la variable dependiente, que no se debe a la variable independiente.
   C. Prueba para la significación de r: ¿la correlación en la población es nula?
      1. Para muestras pequeñas (menores de 50), la distribución t de Student es el estadístico de prueba.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

      2. Para muestras grandes (de 50 o más), la distribución z se utiliza como el estadístico de prueba.

$$z = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

II. Análisis de correlación: nivel ordinal de medición.
   A. El coeficiente de correlación de rango se utiliza para explicar el grado de relación entre dos conjuntos de datos que son al menos de nivel ordinal. La fórmula es:

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

   r_s puede adoptar cualquier valor entre −1 y +1, inclusive. Un valor de −1 o bien +1 indica correlación perfecta entre los rangos.

B. Prueba de la significación de r_s.
   1. Se enuncian las hipótesis nula y alternativa.

      H_0 La correlación de rango en la población es igual a cero.
      H_1 La correlación de rango en la población no es igual a cero.

   2. Para una n menor de 10, véase el apéndice H para determinar el valor crítico. Si r_s es menor que el valor crítico, se acepta H_0; en caso contrario se rechaza.
   3. Si n está entre 10 y 30, consúltese el apéndice H y determine el valor crítico, o bien, utilice la t de Student y el apéndice F.
   4. Para un tamaño de muestra de más de 30, emplee t.

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

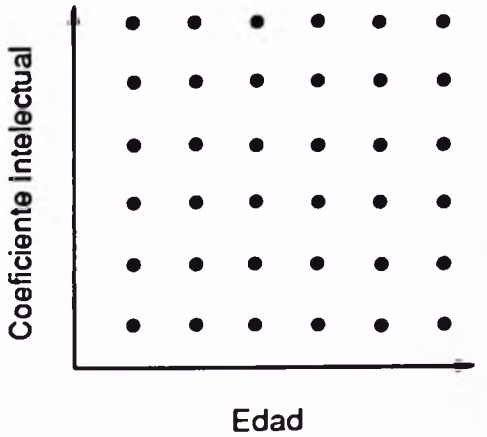
Para los ejercicios 15 a 26, señale con la letra correspondiente la respuesta correcta. Los ejercicios 15 a 17 se basan en el diagrama que sigue:

15. El diagrama se conoce por:
    a. Gráfica lineal.
    b. Patrón disperso.
    c. Diagrama de dispersión.
    d. Diagrama bidireccional.
    e. Ninguna respuesta de las anteriores es correcta.

16. Para localizar los puntos en el diagrama, se disponen por pares los tiempos de servicio de una muestra de vendedores y los importes de sus ventas. Cada punto representa el tiempo de servicio y las ventas de un vendedor. La relación entre tiempos y ventas es:
    a. Perfecta.
    b. Negativa.
    c. Aproximadamente promedio.
    d. Cercana a cero.
    e. Cercana a infinito.

17. Si se calculara el coeficiente de correlación, sería de:
    a. 100.00.
    b. –1.00.
    c. Aproximadamente 0.50.
    d. 1.00.
    e. No es posible estimarlo.

Los ejercicios 18 a 21 se basan en el diagrama que sigue:

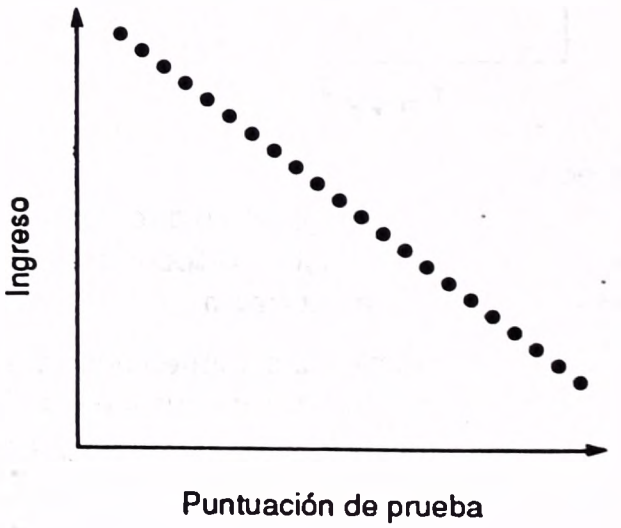


18. Si se calculara el coeficiente de correlación, sería cercano a:
    a. 1.00.
    b. 10.00.
    c. 100.00.
    d. 0.00.
    e. –1.00.

19. El encargado de una investigación intenta predecir:
    a. El coeficiente intelectual (CI) de una persona con base en su edad.
    b. La edad de una persona con base en su coeficiente intelectual.
    c. No es posible determinar con base en el diagrama.

20. Si se calculara, el coeficiente de no determinación sería aproximadamente de:
    a. 0.50.
    b. 0.00.
    c. 1.00.
    d. 1 000.00.
    e. No es posible determinar con base en el diagrama.

Los ejercicios 21 a 25 se basan en el diagrama que sigue:



21. En este problema específico, el investigador intenta predecir:
    a. La puntuación de la prueba de una persona con base en sus ingresos.
    b. El ingreso de una persona con base en su puntuación de prueba.
    c. Tanto los ingresos como las puntuaciones de prueba.
    d. Ninguna respuesta de las anteriores es correcta.

22. Si se calculara, el coeficiente de determinación sería aproximadamente:
    a. –1.00.
    b. 100.0.
    c. 1.00.
    d. 50.00.
    e. No es posible determinar con base en el diagrama.
23. Con base en el diagrama:
    a. Una puntuación de prueba no tiene valor para predecir los ingresos.
    b. El ingreso tiene poco o ningún valor para predecir la puntuación de pruebas de una persona.
    c. Una puntuación de prueba es un elemento perfecto para pronosticar el ingreso.
    d. Una puntuación de prueba es aproximadamente un elemento de pronóstico de ingreso de 50%.
    e. Ninguna respuesta de las anteriores es correcta.
24. La variable independiente es:
    a. Puntuación de prueba.
    b. Ingreso.
    c. Tanto ingreso como puntuación de prueba.
    d. Ninguna respuesta de las anteriores es correcta.
25. Si se calculara, el coeficiente de no determinación sería aproximadamente:
    a. 1.00.
    b. –1.00.
    c. 50.0%
    d. 0.00.
    e. Ninguna respuesta de las anteriores es correcta.
26. Un coeficiente de correlación de –1.00 indica que la relación entre las variables dependiente e independiente es:
    a. Aproximadamente promedio.
    b. Prácticamente cero.
    c. Perfecta.
    d. Dudosa.
    e. No puede tener un coeficiente de –1.00.
27. Las Naciones Unidas presentaron las siguientes tasas anuales de nacimientos y de suicidios para algunos países seleccionados:

País	*Tasa de nacimientos (por millar de habitantes)*	*Tasa de suicidios (por millar de habitantes)*
Australia	15.7	11.1
Checoslovaquia	18.4	21.9
Finlandia	13.5	25.1
Alemania Oriental	13.9	30.5
Italia	12.5	5.8
México	35.3	2.1
Polonia	19.0	12.1
Singapur	17.0	11.3
España	17.2	4.0
Estados Unidos	15.3	12.7

A fin de examinar la relación entre tasa de nacimientos y tasa de suicidios:
    a. Trace un diagrama de dispersión. Considere la tasa de nacimientos como la variable X.
    b. Evalúe la relación entre tasa de nacimientos y tasa de suicidios con base en el diagrama de dispersión.
    c. Calcule el coeficiente de correlación y los coeficientes de determinación y no determinación.
    d. Evalúe la fuerza de la relación.
    e. Pruebe la significación del coeficiente de correlación. Utilice el nivel de 1%. Explique lo que descubra.

28. El programa de estudios paralegales ofrecido en una universidad está organizado como una carrera, y muchos de los que se inscriben son personas de edad que consideran la posibilidad de una nueva carrera. ¿Estas personas tuvieron mejores calificaciones que las más jóvenes inscritas en el programa? Es decir, ¿existe una fuerte correlación entre la edad y el promedio de calificaciones (P.Cal.)? A continuación se encuentran los datos sobre edad (año de nacimiento) y P.Cal.

Año de nacimiento	*P.Cal. carrera*	*Año de nacimiento*	*P.Cal. carrera*	*Año de nacimiento*	*P.Cal. carrera*
57	2.6	52	4.0	49	3.0
57	2.3	46	3.7	40	3.7
20	1.8	57	2.7	52	4.0
56	3.1	56	3.2	56	2.7
44	2.4	52	3.0	45	2.8
33	2.3	47	2.3	57	2.8
58	3.1	51	3.0	49	2.8
50	3.6	57	1.0	56	2.5
24	2.2	53	2.0	43	3.0
46	3.0	55	2.3	41	3.4
48	3.2	54	3.3	57	2.0
39	3.9	57	3.4	32	3.5
51	4.0	48	1.1	56	2.8
45	3.6	54	2.8	56	2.5
55	3.2	54	3.2	57	2.3

Fuente: Plan administrador, Comunidad y Colegio Técnico, La Universidad de Toledo, Ohio.

a. Seleccione al azar 20 pares de datos (año de nacimiento y P.Cal.).
b. Trace un diagrama de dispersión.
c. Evalúe la intensidad de la relación con base en el diagrama de dispersión.
d. Determine los coeficientes de correlación, de determinación y de no determinación.
e. Realice la prueba de significación del coeficiente de correlación. Utilice el nivel 0.05.
f. Formule un breve resumen de lo descubierto.

29. Si se dispone de computadora, utilice los 45 pares de observaciones presentados en el ejercicio 28, y siga las instrucciones dadas en las partes *d* a *f*.

30. Un gran número de egresados de New Mexico College entran a trabajar en una empresa de computadoras de reputación internacional. El director de selección y contratación de personal de la empresa, está realizando un amplio estudio sobre tales egresados y su promoción en la compañía, con la mira de mejorar los sistemas de selección. Un aspecto de la investigación es determinar la relación entre la forma como se clasificaron los

Empleado	*Desempeño académico (1 = quinta parte superior del grupo)*	*Puntuación para promoción*
D. M.	1 (Alta)	1 (Alta)
S. A.	4	4
N. W.	3	1
T. R.	2	2
E. F.	5	3
U. M.	4	2
Q. F.	1	2
I. B.	1	2
A. A	3	4

graduados universitarios desde el punto de vista académico en la universidad, y la forma como se clasifican en la empresa para su promoción. Un rango académico de 1 indica que el graduado estuvo en la quinta parte superior de su generación en la universidad; un rango de 5 indica el quinto inferior. Para la promoción, a cada empleado se le califica en una escala de 1 (alto) a 4 (bajo). Por ejemplo, D.M. estuvo en el quinto superior de su generación universitaria y en el grupo siguiente según la línea de promoción. Interesa saber la relación entre el rango de un empleado en la universidad y el que obtiene en la empresa para su promoción.

a. Clasifique por rango el desempeño académico y las puntuaciones para la promoción, (tenga cuidado con los empates, que son numerosos).
b. Trace un diagrama de dispersión utilizando el desempeño académico como la variable X.
c. Con base en el diagrama de dispersión, evalúe la intensidad de la correlación entre los dos conjuntos de datos por rango.
d. Calcule el coeficiente de correlación de rango.
e. Pruebe la significación de r_s en $\alpha = 0.05$ y en $\alpha = 0.01$.
f. Resuma lo descubierto.

31. Se pidió a los integrantes de un gran grupo político activo, que clasificaran por rango el prestigio asociado a 10 puestos de elección o de designación en los gobiernos federal o estatal. Sus rangos se promediaron para determinar un rango compuesto. Al Presidente de la República se le asignó un rango de 1, a un embajador un rango de 2, y así sucesivamente. Se siguió el mismo procedimiento para un gran grupo de personas que no participan en la política. Las clasificaciones por rangos fueron:

	Rango compuesto	
Puesto	*Grupo activo*	*Grupo no activo*
Embajador	2	4
Presidente de la República	1	1
Miembro del gabinete	3	6
Gobernador de un estado	9	3
Vicepresidente de la República	4	2
Juez de la Suprema Corte	5	5
Senador	8	7
Diputado	6	8
Secretario de Estado	7	9
Director de investigaciones	10	10

a. Trace un diagrama de dispersión. Considere X la clasificación por rango del grupo activo.
b. Con base en el diagrama de dispersión, evalúe la relación entre los dos conjuntos de rangos.
c. Calcule el coeficiente de correlación de rango.
d. Pruebe la significación del coeficiente de correlación de rango en $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 0.05$.
e. Resuma lo descubierto.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. El gerente de ventas de una compañía se está preparando para una reunión de ventas, y le gustaría mostrar al grupo de vendedores la forma como se relaciona el número de visitas a clientes con el valor anual de pedidos que se reciben. De sus registros recolectó

la siguiente información muestral para el último año. A partir de estos datos muestrales, ¿puede llegarse a la conclusión que conforme se incrementa el número de visitas de ventas, también aumenta el monto anual de pedidos? Realice una prueba estadística adecuada.

Número de visitas	*Pedidos (miles de dólares)*	*Número de visitas*	*Pedidos (miles de dólares)*
5	4.8	2	2.2
4	6.1	4	7.1
6	12.3	4	8.7
7	13.7	8	13.7
8	15.7	1	2.3
1	2.2.	3	4.6
3	7.3	9	16.7
4	5.8	3	6.1
1	1.9	4	7.5
3	6.7	8	15.1

2. Los deportes de aficionados y profesionales como futbol, beisbol y basquetbol brindan la oportunidad de utilizar el análisis estadístico. ¿Antes de iniciar la temporada, o a mediados de ella, podría predecirse el ganador de la Serie Mundial de beisbol o el campeón de basquetbol de la Conferencia de la Costa Atlántica? La revista *Sports Illustrated,* y los periódicos locales *The USA Today* publican estadísticas detalladas sobre varios aspectos de los deportes. Para este problema resultan de interés los siguientes datos de las Ligas Nacional y Americana sobre "promedios" de bateo, de cuadrangulares, etc., hasta agosto de 1988.

   Algunos "expertos" afirman que el promedio de pitcheo o de carreras es lo más importante para predecir el porcentaje de ganadores en la liga. Otros afirman que el bateo es más importante. Analice las estadísticas que siguen de las Ligas Nacional y Americana y proporcione una respuesta a este enigma.

	Porcentaje de triunfos	*"Promedio" de bateo*	*Liga*[1]	*Prom. de carreras ganadas*	*Errores*	*Cuadrangulares*
Detroit	0.591	0.256	1	96	3.65	71
Boston	0.569	0.288	1	84	4.17	72
N.Y. Yanks	0.558	0.271	1	103	3.98	98
Minn.	0.508	0.253	1	80	3.40	94
Toronto	0.508	0.267	1	121	3.88	84
Cleve.	0.462	0.262	1	101	4.35	96
Balt.	0.330	0.233	1	105	4.63	91
Oakland	0.636	0.259	1	112	3.40	82
Milw.	0.565	0.280	1	120	4.12	61
K.C.	0.509	0.265	1	93	3.68	88
Calif.	0.496	0.261	1	89	4.38	103
Texas	0.447	0.252	1	79	3.87	97
Chi.Sox	0.440	0.244	1	106	4.34	117
Seattle	0.379	0.255	1	109	4.51	96
N.Y. Mets.	0.586	0.254	0	104	3.04	85
Montreal	0.548	0.252	0	78	3.09	95
Pitts.	0.547	0.250	0	85	3.57	92
Chi. Cubs	0.491	0.262	0	77	3.60	90

[1] 1 = Liga Americana, 0 = Liga Nacional

	Porcentaje de triunfos	*"Promedio" de bateo*	*Liga*[1]	*Promedio de carreras ganadas*	*Errores*	*Cuadrangulares*
Phiila	0.440	0.240	0	77	4.03	102
St. Louis	0.440	0.247	0	51	3.56	85
L.A.	0.561	0.257	0	75	3.28	99
Houston	0.543	0.250	0	69	3.55	103
S.F.	0.530	0.254	0	87	3.50	91
Cincinnati	0.504	0.245	0	97	3.45	93
San Diego	0.466	0.244	0	62	3.49	84
Atlanta	0.345	0.251	0	77	4.37	108

EXAMEN CAPITULO 13

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Parece que las ventas de dentífricos dependen mucho del nivel de la publicidad. Para examinar más a fondo esta observación, se determinaron los gastos anuales en publicidad para varias marcas bien conocidas junto con sus ventas anuales.

Marca	*Gastos anuales en publicidad (millones de dólares)*	*Ventas anuales (millones de dólares)*
Jugador	2	5
En Práctica	4	7
Durante el Juego	3	6
Puntuación	1	2

   a. Trace un diagrama de dispersión.
   b. Calcule el coeficiente de correlación producto-momento de Pearson. Interprételo.
   c. Calcule el coeficiente de determinación e interprételo.
   d. Evalúe el coeficiente de no determinación e interprételo.

2. Los entrenadores de futbol americano califican el desempeño de los jugadores en una escala de 0 a 100, tanto durante las prácticas semanales como durante el juego. Una muestra de los jugadores que participaron en un juego importante reveló las siguientes calificaciones:

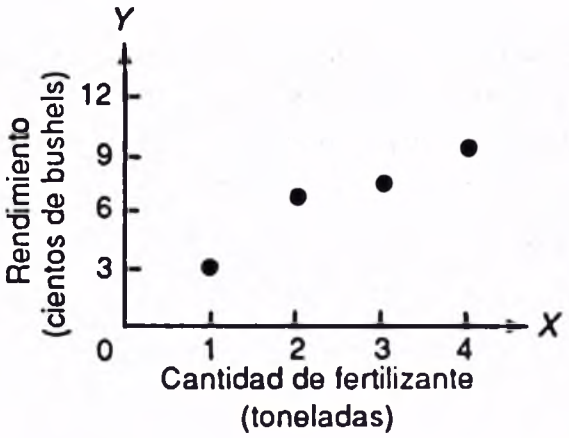
	Puntuación	
Jugador	*En prácticas*	*Durante el juego*
Art	80	80
Bob	20	10
Jim	100	90
Abe	65	50
Arch	50	35
John	40	30
Dean	90	95
Jimmie	60	35

   a. Determine el grado de relación entre la forma como se calificó el desempeño de los jugadores durante las prácticas y el rango que obtuvieron durante el juego al evaluar el coeficiente de correlación de rango.
   b. Pruebe la significación del coeficiente de correlación de rango. $\alpha = 0.01$.
   c. Interprete los resultados.

Autoexámenes

13-1 1. El rendimiento es la variable dependiente. La cantidad de fertilizante es la variable independiente.

2.



3.

X	Y	XY	X^2	Y^2
2	7	14	4	49
1	3	3	1	9
3	8	24	9	64
4	10	40	16	100
10	28	81	30	222

r = 0.96, calculado:

$$r = \frac{4(81) - (10)(28)}{\sqrt{[4(30) - (10)^2][4(222) - (28)^2]}}$$

$$= \frac{44}{\sqrt{2080}} = \frac{44}{45.60717} = 0.9648$$

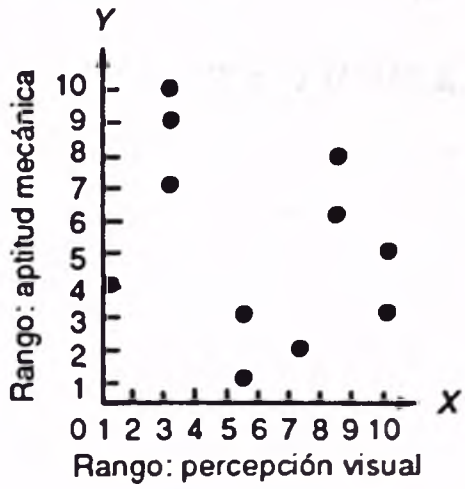
4. El valor 0.96 indica una correlación muy intensa (casi perfecta) entre la cantidad de fertilizante aplicada y el rendimiento.

13-2 1.

$$r^2 = (0.96)^2 = 0.92$$
$$1 - r^2 = 1 - 0.92 = 0.08$$

2. El 92% de la variación en el rendimiento se explica por la cantidad de fertilizante utilizado; el 8%, no.

13-3 1.



2. Parece haber una correlación muy baja entre los dos conjuntos de rangos; tal vez negativa.

3.

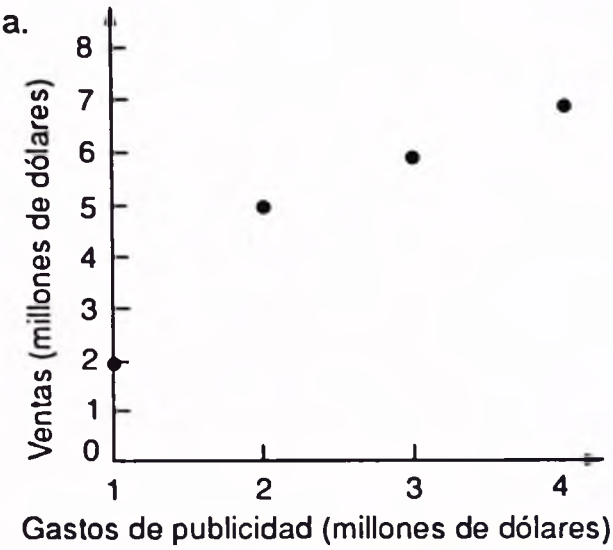
$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$
$$= 1 - \frac{6(193)}{10(99)} = -0.17$$

		Rango			
X	Y	X	Y	d	d^2
805	23	5.5	1	4.5	20.25
777	62	3.0	9	–6.0	36.00
820	60	8.5	8	0.5	0.25
682	40	1.0	4	–3.0	9.00
777	70	3.0	10	–7.0	49.00
810	28	7.0	2	5.0	25.00
805	30	5.5	3	2.5	6.25
840	42	10.0	5	5.0	25.00
777	55	3.0	7	–4.0	16.00
820	51	8.5	6	2.5	6.25
				0	193.00

4. Según se esperaba, la correlación de –0.17 es muy débil, lo cual indica que existe poca correlación entre la percepción visual y las aptitudes mecánicas.

Examen capítulo 13

1. a.



b. La r de Pearson es aproximadamente 0.96, lo cual indica que existe una relación casi perfecta entre los gastos de publicidad y las ventas:

$$r = \frac{4(58) - (10)(20)}{\sqrt{[4(30) - (10)^2][4(114) - (20)^2]}}$$

$$= \frac{32}{\sqrt{1120}} = 0.96$$

c. El coeficiente de determinación es aproximadamente 0.92, obtenido por (0.96)2. Aproximadamente 92% de la variación en ventas se explica por los gastos de publicidad.

d. El coeficiente de no determinación es 0.08, calculado por 1 − 0.92. Aproximadamente 8% de la variación en ventas no lo explican los gastos en publicidad.

2. a. r_s es aproximadamente 0.97, determinado por

	Rango		Diferencia	
Jugador	*En prácticas*	*En el juego*	*d*	d^2
Art	6	6.0	0	0
Bob	1	1.0	0	0
Jim	8	7.0	+1.0	1.00
Abe	5	5.0	0	0
Arch	3	3.5	−0.5	0.25
John	2	2.0	0	0
Dean	7	8.0	−1.0	1.00
Jimmie	4	3.5	+0.5	0.25
			0	2.50

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6(2.50)}{8[(8)^2 - 1]} = 0.97$$

b. Al nivel 0.01, se rechaza la hipótesis nula de que no hay relación entre los dos rangos en la población. Se descarta porque el valor calculado para el coeficiente de correlación de rango (0.97) es mayor que el valor crítico de 0.833 (del apéndice H).

c. Existe un alto grado de relación entre la forma como se clasificó por rango el desempeño de los jugadores durante las prácticas, y la forma como se les clasificó durante el partido importante. Si se incluyera a todos los jugadores en el estudio, es poco probable que el coeficiente de correlación de rango fuera igual a cero.

14

Análisis de regresión simple

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Analizar el objetivo de la regresión lineal simple.
2. Determinar una ecuación que pueda utilizarse en pronósticos.
3. Medir el error en el pronóstico.
4. Presentar las consideraciones en que se basa el análisis de regresión.
5. Determinar intervalos de confianza para los pronósticos.

El capítulo 13 estuvo dedicado a determinar la relación entre dos conjuntos de datos. Se trazó un diagrama de dispersión para representar gráficamente la relación, y se calcularon medidas como el coeficiente de correlación y los coeficientes de determinación y no determinación. El coeficiente de correlación producto-momento de Pearson se utiliza para medir la fuerza de la relación entre conjuntos de datos a nivel de intervalo y de razón. El coeficiente de correlación de rango de Spearman se aplica a datos ordinales (dispuestos por rangos). Se exploraron cuestiones como éstas: ¿Cuál es el grado de asociación entre una puntuación de prueba diseñada por un director de personal, y las ventas semanales? ¿Cuál es la relación entre los gastos de publicidad de una empresa y sus ventas?

En este capítulo continuaremos el estudio de la relación entre dos conjuntos de datos hasta determinar una ecuación. Esto permitirá predecir el valor de la variable dependiente Y con base en un valor de la variable independiente X. 1) Se volverá a considerar el diagrama de dispersión; 2) se determinará la ecuación para la recta que mejor se ajuste a los datos; 3) se pronosticará un valor de Y con base en un valor seleccionado de X; 4) se medirá el error en un pronóstico y 5) se establecerán intervalos de confianza para los pronósticos.

ANALISIS DE REGRESION

Según se indicó en la presentación, se desarrollará una ecuación para expresar la relación entre dos variables, y estimar el valor de la variable dependiente Y con base en un valor seleccionado de la variable independiente X. A la técnica empleada para hacer estas predicciones se le denomina **análisis de regresión**.[1]

Para visualizar la forma de la regresión, podemos trazar un diagrama de dispersión. Recuérdese del capítulo 13 que la variable dependiente se localiza en el eje Y y la variable independiente en el eje X. Recuérdese la prueba efectuada por el director de personal. Los pares de datos provenientes de esa prueba se

TABLA 14-1

Puntuaciones de pruebas y ventas semanales de cinco vendedores

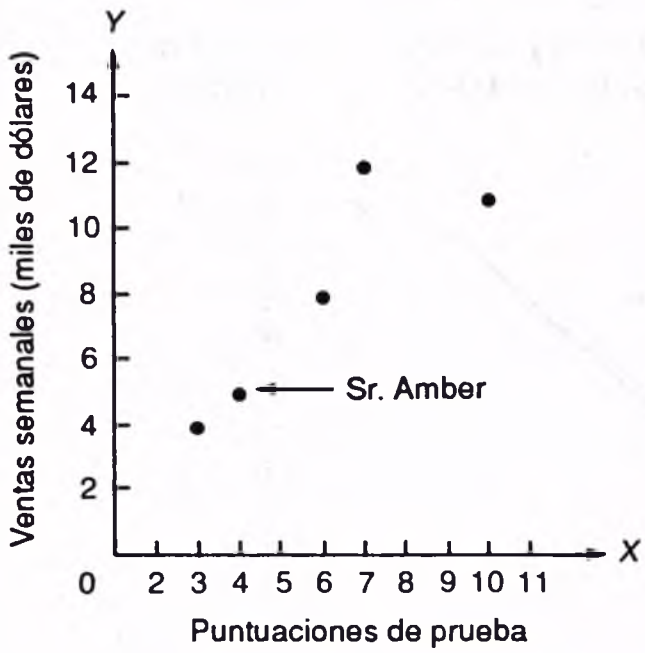
Vendedor(a)	*Puntuación de prueba*	*Ventas semanales*
Sr. J. A. Amber	4	$ 5 000
Sr. B. N. Archer	7	12 000
Sra. G. D. Smith	3	4 000
Sr. A. B. Malcolm	6	8 000
Sra. A. Goodwin	10	11 000

[1] La palabra *regresión* la usó por primera vez Sir Francis Galton en 1877 en su estudio de los factores hereditarios. Descubrió que las estaturas de los descendientes de padres altos tendían a una regresión (es decir, a volver o retornar) hacia la estatura promedio de la población. A la recta matemática desarrollada se le denominó línea o recta de regresión. El término *recta de regresión* es de uso común aunque sería más adecuado *ecuación de pronóstico* o *ecuación de estimación*.

muestran en la tabla 14-1 y el diagrama de dispersión correspondiente en el diagrama 14-1. Cada punto en el diagrama de dispersión representa la puntuación de prueba y las ventas semanales de un vendedor. Por ejemplo, el punto para el Sr. Amber se localiza ubicando primero 4 en el eje *X*. Después se avanza en dirección vertical hasta $5 000, y se marca un punto ahí.

DIAGRAMA 14-1

Diagrama de dispersión



El diagrama de dispersión muestra que: 1) Conforme aumentan las puntuaciones de prueba, sucede lo mismo con las ventas. 2) Una línea recta parece describir mejor la ubicación promedio de los puntos. 3) Cualquier predicción de las ventas con base en las puntuaciones de prueba no puede tener una exactitud de 100%, pero puede ser bastante precisa.

ECUACION DE REGRESION

Puesto que una línea recta describe mejor la relación entre las puntuaciones de prueba y las ventas semanales, ahora deduciremos una ecuación matemática para esa recta. Así, el director de personal podría emplear la ecuación para pronosticar las ventas mensuales de un candidato a un puesto en ventas, con base en su puntuación de pruebas (en caso de contratar al candidato). A la ecuación para esa línea recta se le denomina **ecuación de regresión**. También se le conoce como *ecuación de estimación* y *ecuación de pronóstico*.

Ecuación de regresión	Expresión matemática que define la relación entre dos variables.

El diagrama de dispersión de la gráfica anterior se reproduce en el diagrama 14-2, con una recta trazada con regla a través de los puntos para ilustrar que es muy probable que tal línea sea la que mejor se ajuste a los datos. Sin embargo, la recta trazada con una regla tiene una desventaja: su posición se basa en el juicio de quien trazó la línea. Las rectas trazadas a mano en el diagrama 14-3 representan el juicio de cuatro personas. Todas las rectas, excepto A, parecen razonables. Sin embargo, cada una daría un pronóstico distinto de ventas.

DIAGRAMA 14-2

Puntuaciones de prueba y ventas semanales de cinco vendedores

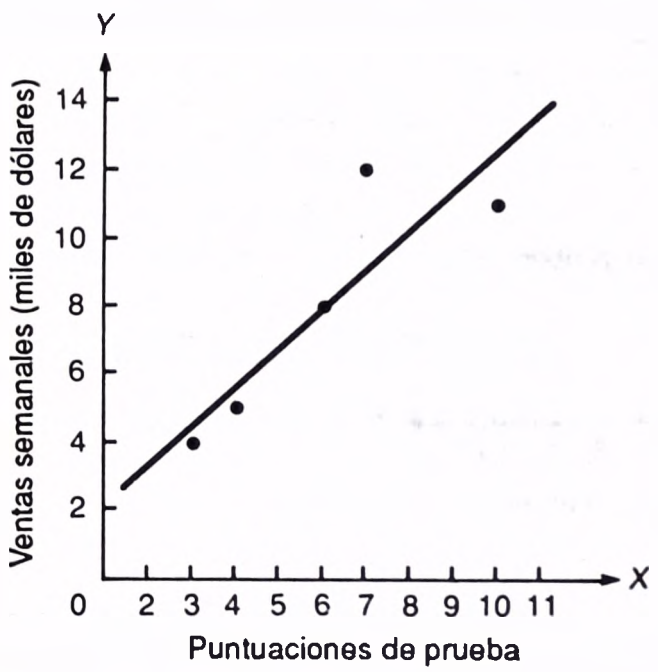
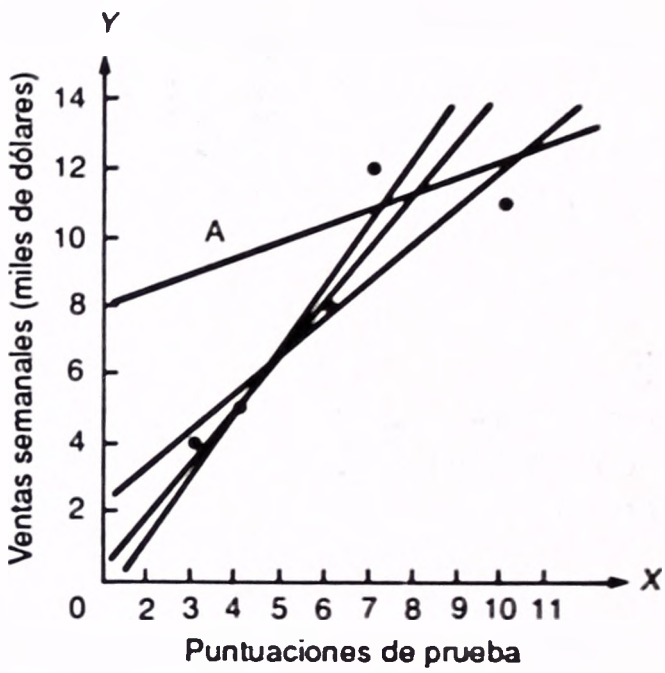


DIAGRAMA 14-3

Varias rectas trazadas a mano libre sobrepuestas en el diagrama de dispersión



Principio de mínimos cuadrados

El juicio personal se elimina al determinar la recta de regresión utilizando un método matemático denominado **principio de mínimos cuadrados**. Este método proporciona lo que comúnmente se conoce como la recta de "mejor ajuste". *Minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales con respecto a la recta.* Para ilustrar este concepto, los mismos datos se grafican en los tres diagramas que siguen. La recta de regresión del diagrama 14-4 se determinó empleando el método de mínimos cuadrados. Es la recta de mejor ajuste porque la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales con respecto a ésta es mínima. El primer punto localizado ($X = 3$, $Y = 8$) tiene una desviación de 2 con respecto a la recta, obtenida por 10 - 8; su cuadrado es 4. La desviación al cuadrado para el punto $X = 4$, $Y = 18$ es 16. La desviación al cuadrado para el punto $X = 5$, $Y = 16$ es 4. La suma de las desviaciones al cuadrado es 24, determinada por 4 + 16 + 4.

DIAGRAMA 14-4

Recta de mínimos cuadrados

DIAGRAMA 14-5

Línea trazada con regla

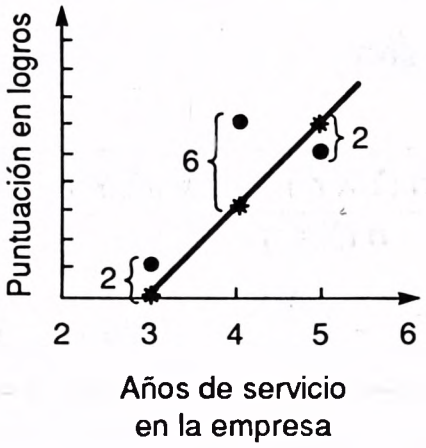
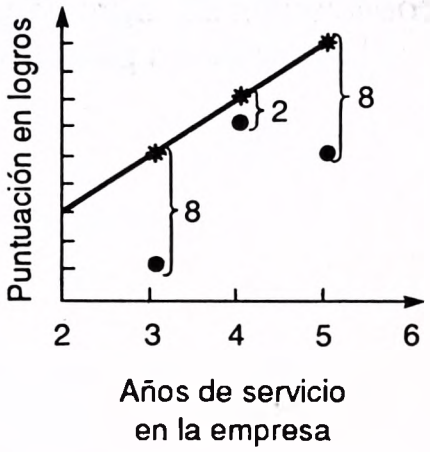


DIAGRAMA 14-6

Línea trazada con regla



Considérese que las rectas de los diagramas 14-5 y 14-6 se trazaron utilizando una regla. La suma de las desviaciones verticales al cuadrado en el diagrama 14-5 es 44. Para el diagrama 14-6 es 132. Ambas sumas son mayores que la obtenida utilizando el método de mínimos cuadrados.

Principio de mínimos cuadrados Técnica empleada para llegar a la ecuación de regresión minimizando la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los valores Y verdaderos y los valores pronosticados de Y.

La forma general de la ecuación de regresión es:

$$Y' = a + bX$$

en donde:

Y' Valor pronosticado de la variable Y para un valor seleccionado de X.

a Ordenada de la intersección con el eje Y (o intercepción Y). Es el valor estimado de Y cuando $X = 0$. Otra forma de decir esto es: a es el valor estimado de Y, en donde la recta de regresión cruza el eje Y cuando X es cero.

b Pendiente de la recta, o sea cambio promedio en Y' por unidad de cambio (incremento o decremento) en la variable independiente X.

X Cualquier valor seleccionado para la variable independiente.

Debe observarse que la ecuación de regresión lineal para la muestra de vendedores es sólo una estimación de la relación entre las dos variables en la población. De esta forma, los valores de *a* y *b* en la ecuación de regresión, por lo general se denominan *coeficientes de regresión estimados*, o bien abreviadamente, *coeficientes de regresión.*

Las fórmulas para *b* y *a* son:

$$b = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2}$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} - b\frac{\Sigma X}{n} \quad \text{o bien} \quad \overline{Y} - b\overline{X}$$

donde:

X es un valor de la variable independiente.
Y es un valor de la variable dependiente.
n es el número de elementos en la muestra.
$\overline{X}$ es la media de la variable independiente.
$\overline{Y}$ es la media de la variable dependiente.

✱ Ejemplo

Volviendo a las puntuaciones de prueba y las ventas semanales de los cinco vendedores, las sumas y otros datos básicos para despejar o evaluar *a* y *b* aparecen en la tabla 14-2.

TABLA 14-2

Cálculos necesarios para determinar la ecuación de regresión

Vendedor	*Puntuación de prueba* X	*Ventas semanales (miles de dólares)* Y	X^2	XY	Y^2
Sr. Amber	4	5	16	20	25
Sr. Archer	7	12	49	84	144
Sra. Smith	3	4	9	12	16
Sr. Malcolm	6	8	36	48	64
Sra. Goodwin	10	11	100	110	121
Total	30	40	210	274	370

¿Cuál es la ecuación de regresión?

✔ Solución

Las sumas de la tabla 14-2 se utilizan para ilustrar los cálculos para a y b en la ecuación de regresión:

$$b = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2} = \frac{5(274) - (30)(40)}{5(210) - (30)^2} = 1.133$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} = \frac{40}{5} - 1.133\left(\frac{30}{5}\right) = 8 - 6.798 = 1.202$$

$$Y' = 1.202 + 1.133 \text{ (en miles de dólares)}$$

Por tanto, la ecuación de regresión es $Y' = 1.202 + 1.133X$ (en miles de dólares). Las ventas pronosticadas para un candidato a un puesto en ventas, que calificó 6 en la prueba del director de personal es $8 000, que se obtiene por $Y' = a + bX = 1.202 + 1.133(6) = 1.202 + 6.798 = 8.000$ (en miles de dólares).

Trazo de la línea de regresión

La ecuación de regresión de mínimos cuadrados $Y' = 1.202 + 1.133X$ se utiliza para determinar la recta de regresión de mínimos cuadrados que se va a trazar en el diagrama de dispersión. Cuando $X = 3$, $Y' = 4.601$, obtenido por $Y' = a + bX = 1.202 + 1.133(3)$, es posible determinar otros puntos sobre la recta sustituyendo los valores adecuados de X en la ecuación. Estos son:

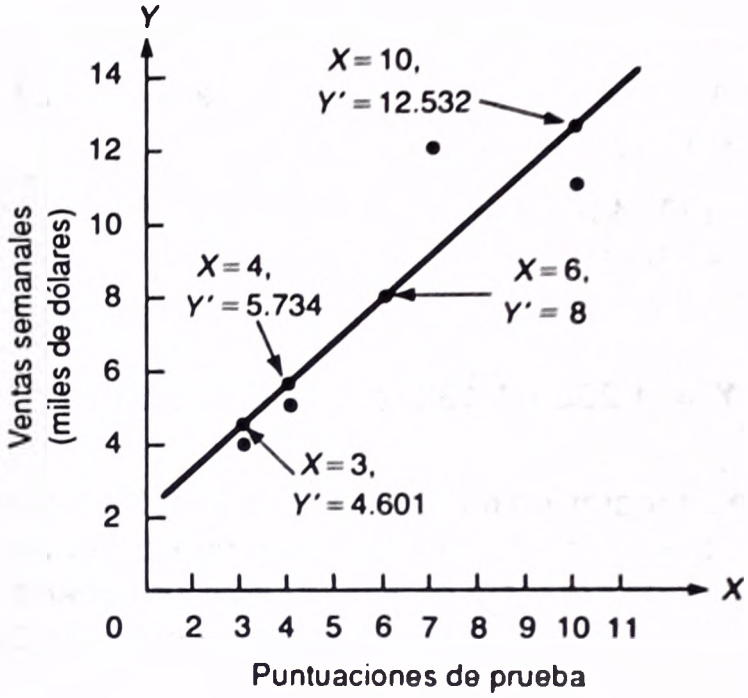
Puntuación de prueba, X	*Pronóstico de ventas semanales (miles de dólares), Y'*	*Solución*
3	4.601	$Y' = 1.202 + 1.133(3)$
4	5.734	$= 1.202 + 1.133(4)$
6	8.000	$= 1.202 + 1.133(6)$
7	9.133	$= 1.202 + 1.133(7)$
10	12.532	$= 1.202 + 1.133(10)$

El punto $X = 3$, $Y' = 4.601$ se localiza recorriendo hasta 3 sobre el eje X y avanzando luego en dirección vertical hasta 4.601. El siguiente punto es $X = 4$, $Y' = 5.734$. Todos los puntos se unen para tener la recta (diagrama 14-7).

Tal recta tiene características interesantes. Según se analizó, no existe alguna línea recta que pase por los datos y tenga una suma de desviaciones al cuadrado, $\Sigma(Y - Y')^2$ que sea menor. Además, tal recta pasará por los puntos $\overline{X}$ y $\overline{Y}$. En este ejemplo, $\overline{X} = 6.0$ y $\overline{Y} = 8.0$.

DIAGRAMA 14-7

Recta de regresión trazada en el diagrama de dispersión



AUTOEXAMEN 14-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

(Nota: Este problema es continuación de uno presentado en el capítulo 13.)
Un agrónomo experimentó con distintas cantidades de fertilizante líquido en una muestra de parcelas del mismo tamaño. Las cantidades de fertilizante y los rendimientos de los cultivos correspondientes son:

Parcela	*Cantidad de fertilizante (toneladas)*	*Rendimiento (cientos de bushels)*
A	2	7
B	1	3
C	3	8
D	4	10

1. El agrónomo está interesado en pronosticar el rendimiento. ¿Cuáles son la variable dependiente y la variable independiente?
2. Trace un diagrama de dispersión.
3. Determine la ecuación de regresión.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Se tiene interés en examinar la tasa de matrimonios y de divorcios por millar de habitantes en Estados Unidos para años seleccionados. Las tasas para ocho años, según informes del Departamento de Salud y Servicios Humanos (DHHS) (de Estados Unidos), son:

Año	*Tasa de matrimonios*	*Tasa de divorcios*
1905	10.0	0.8
1925	10.3	1.5
1935	10.4	1.7
1945	12.2	3.5
1955	9.3	2.3
1965	9.3	2.5
1975	10.1	4.9
1985	10.2	5.0

Para analizar el conjunto de datos pareados o en pares:

a. Trace un diagrama de dispersión localizando la tasa de matrimonios en el eje X y la tasa de divorcios en el eje Y.
b. Si se desea predecir la tasa de divorcios con base en la tasa de matrimonios, ¿cuál es la variable independiente?
c. Con base en el diagrama de dispersión, ¿parece existir alguna relación entre la tasa de matrimonios y la de divorcios? Explique su respuesta.
d. Determine la ecuación de regresión.
e. Calcule tres puntos cualesquiera sobre la recta y trácela en el diagrama de dispersión.
f. ¿Cuál es el coeficiente de correlación y cuál el coeficiente de determinación (véase el capítulo 13)? Interprete los dos coeficientes.

2. Se va a realizar un estudio acerca de las tasas de mortalidad de niñas de raza blanca menores de 1 año de edad, en comparación con todas las otras niñas de la misma edad. Las tasas proporcionadas por el DHHS para años seleccionados, por millar de habitantes en cada grupo son:

	Tasas de mortalidad	
Año	*Niñas blancas menores de un año*	*Todas las otras niñas de la misma edad*
1960	20.1	40.7
1970	16.1	31.7
1975	12.2	25.2
1980	9.6	19.4
1984	8.2	16.1
1985	8.1	14.3

a. Localice los datos en un diagrama de dispersión, colocando las tasas de mortalidad para las niñas de raza blanca, en el eje X.
b. Con base en el diagrama de dispersión, ¿parece haber alguna relación entre las dos tasas de mortalidad? Explíquelo.

c. Calcule la ecuación de regresión.
d. Para una tasa de mortalidad de 10.0 de niñas de raza blanca, ¿cuál es la tasa de mortalidad pronosticada para las otras niñas?
e. Determine tres puntos cualesquiera de la recta y localícela en el diagrama de dispersión.
f. Calcule los coeficientes de correlación y determinación (Cap. 13). Interprete cada coeficiente.

3. Se llevó a cabo un proyecto de investigación para determinar si existe alguna relación entre los años de servicio y las puntuaciones de eficiencia de empleados. El objetivo del estudio es pronosticar la puntuación de eficiencia de un empleado con base en su tiempo de servicio. Los resultados muestrales son:

Empleado	*Años de servicio*	*Tasa de eficiencia*
Jones	1	6
Orlando	20	5
Ireland	6	3
Smith	8	5
Kordel	2	2
Harper	1	2
Lopez	15	4
Sobecki	8	3

a. ¿Cuál es la variable dependiente?
b. Trace un diagrama de dispersión.
c. Con base en el diagrama de dispersión, ¿existe alguna relación entre los años de servicio y la eficiencia?
d. Determine la ecuación de regresión.
e. Para ocho años de servicio, ¿cuál es la tasa de eficiencia pronosticada?
f. Determine tres puntos cualesquiera de la recta y trácela en el diagrama de dispersión.

4. En el departamento de producción de una empresa se desea examinar la relación entre el número de empleados que arman un subensamble y el número de subensambles producidos. Como experimento, a dos empleados se les asignó armar el subensamble. Produjeron 15 durante un periodo de una hora. Después se dedicaron a armarlo cuatro empleados. Produjeron 25 subensambles durante un periodo de una hora. El conjunto completo de pares de observaciones es como sigue.

Número de operarios	*Producción en una hora (unidades)*
2	15
4	25
1	10
5	40
3	30

La variable dependiente es la producción; esto es, se considera que el nivel de producción depende del número de personas que participan en el armado.
a. Trace un diagrama de dispersión.

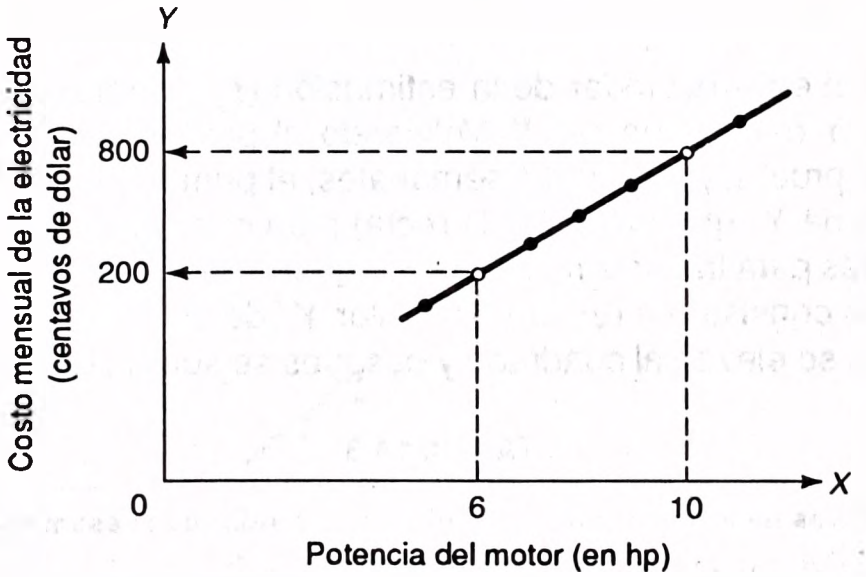
b. Con base en el diagrama de dispersión, ¿parece haber alguna relación entre el número de personas que realizan el armado y la producción? Explique la respuesta.
c. Determine la ecuación de regresión.
d. Contando con tres ensambladores, ¿cuál es la producción pronosticada por hora?
e. Determine tres puntos cualesquiera de la recta y trácela en el diagrama de dispersión.

ERROR ESTANDAR DE ESTIMACION

Obsérvese en el diagrama de dispersión anterior (diagrama 14-7) que no todos los puntos quedan en la recta de regresión. Si todos hubieran quedado en la recta y si el número de observaciones hubiera sido suficientemente grande, no existiría error al pronosticar las ventas semanales. Dicho de otra forma, si todos los puntos estuvieran en la recta de regresión, las ventas podrían pronosticarse con una exactitud de 100%. Entonces, no habría error al pronosticar la variable Y con base en la variable X. Esto es verdad en el caso hipotético que sigue (véase el diagrama 14-8). Teóricamente, si $X = 6$, entonces podría pronosticarse una Y exacta de 200 con 100% de confianza. O si $X = 10$, entonces $Y = 800$. No existe error en esta estimación.

DIAGRAMA 14-8

Ejemplo de pronóstico perfecto: potencia (hp) de un motor y costo de la electricidad



Un pronóstico perfecto en problemas relacionados con economía y administración es prácticamente imposible. Por ejemplo, los ingresos anuales provenientes de ventas de gasolina (Y) con base en los registros de automóviles (X) hasta cierta fecha, sin duda podrían aproximarse con gran exactitud, pero el pronóstico no sería exacto con redondeo a unidades monetarias enteras, o tal vez hasta el millar de unidades. Aun los pronósticos de resistencia a la tensión de alambres de acero con base en los diámetros externos de los alambres, no siempre son exactos (debido a ligeras diferencias en la composición del acero).

Entonces, lo que se necesita es una medida que indique qué tan preciso es el pronóstico de Y con base en X o, por el contrario, cuán inexacto podría ser el pronóstico. A esta medida se le denomina **error estándar de estimación**. El error estándar de estimación, denotado por $s_{y.x}$, es el mismo concepto que el de la desviación estándar analizado en el capítulo 4. La desviación estándar mide la dispersión con respecto a un promedio, como la media. El error estándar de estimación mide la dispersión con respecto a una recta promedio, denominada recta de regresión.

El error estándar de estimación Mide la dispersión de los valores observados, con respecto a la recta de regresión.

El error estándar de la estimación se determina por medio de la ecuación que sigue. (Obsérvese que es muy semejante a la de la desviación estándar de una muestra.)

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y')^2}{n - 2}}$$

✱ Ejemplo

El símbolo para el error estándar de la estimación ($s_{y \cdot x}$) representa la desviación estándar de las Y basada en las X. Volviendo al problema relacionado con las puntuaciones de prueba y las ventas semanales, el primer paso consiste en determinar cada valor de Y' (puntos sobre la recta) para cada valor X. Estos puntos Y' se calcularon antes para trazar la recta en el diagrama de dispersión (diagrama 14-7). El siguiente paso consiste en restar cada valor Y' de su valor Y correspondiente. Estas diferencias se elevan al cuadrado y después se suman (véase la tabla 14-3).

TABLA 14-3

Cálculos necesarios para tener el error estándar de la estimación

Vendedor	*Puntuación de prueba* X	*Ventas (miles de dólares)* *Real,* Y	*Pronosticadas,* Y'	*Desviaciones* $Y - Y'$	*Desviaciones al cuadrado* $(Y - Y')^2$
Sr. Amber	4	5	5.734	−0.734	0.5388
Sr. Archer	7	12	9.133	+2.867	8.2200
Sra. Smith	3	4	4.601	−0.601	0.3612
Sr. Malcolm	6	8	8.000	0.000	0.0000
Sra. Goodwin	10	11	12.532	−1.532	2.3470
Total	30	40	40.000	0.000	11.4670

¿Cuál es el error estándar de estimación?

✔ Solución

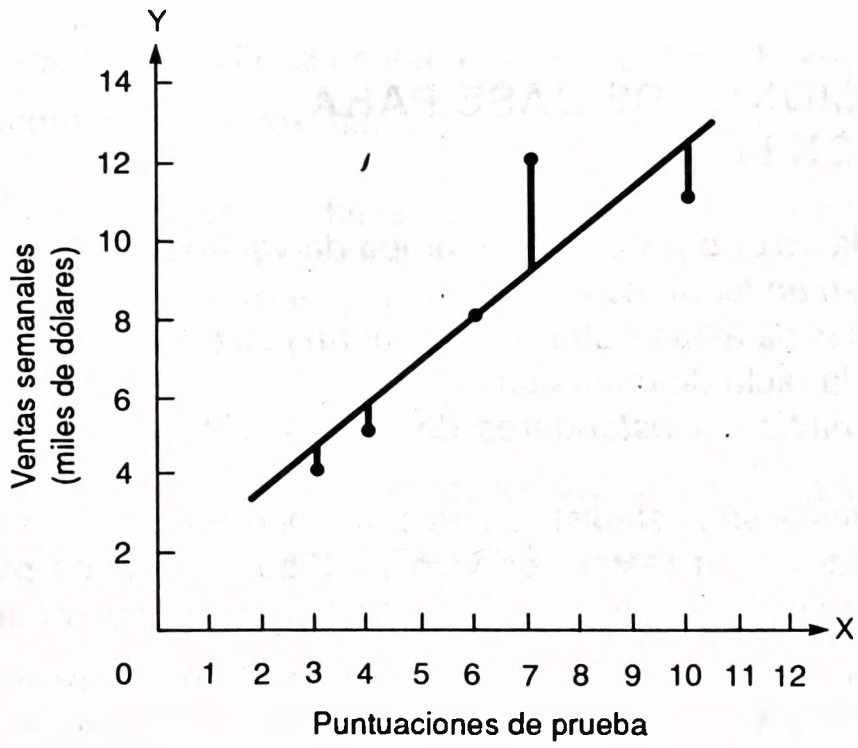
$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y')^2}{n-2}}$$
$$= \sqrt{\frac{11.467}{5-2}}$$
$$= 1.955 \text{ (en miles de dólares)}$$

La cifra 1.955 es en realidad $1 955 (porque las ventas están en miles de dólares).

Las desviaciones ($Y - Y'$) son desviaciones verticales con respecto a la recta de regresión. Para ilustrar esto, se muestran las cinco desviaciones de la tabla 14-3 en el diagrama 14-9. Obsérvese en la tabla 14-3 que la suma de las desviaciones es igual a cero, lo cual indica que las desviaciones positivas (por encima de la recta de regresión en el diagrama de dispersión) están compensadas por las desviaciones negativas (por debajo de la recta).

DIAGRAMA 14-9

Gráfica que muestra las distancias verticales entre los puntos de dispersión y la recta de regresión



La fórmula para el error estándar de estimación, que se citó antes, se dio principalmente para mostrar la semejanza que existe en el concepto y el cálculo entre la desviación estándar y el error estándar de la estimación. Supóngase que se estudia un gran número de observaciones y que las cifras son grandes. Determinar cada punto Y' sobre la recta de regresión y elevar después al cuadrado las

diferencias $(Y - Y')^2$ sería bastante tedioso. La fórmula que sigue es idéntica desde el punto de vista algebraico a la anterior y facilita los cálculos:

$$\boxed{s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a(\Sigma Y) - b(\Sigma XY)}{n-2}}}$$

Los cuadrados, sumas y otras cifras para el problema de puntuaciones de pruebas-ventas semanales se calcularon en la tabla 14-2. Al sustituir estos valores en la fórmula se tiene:

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{370 - 1.202(40) - 1.133(274)}{5-2}}$$
$$= 1.955 \text{ (en miles de dólares)}$$

(Este es el mismo error estándar de estimación que se calculó antes.)

Para comprender mejor la aplicación del error estándar de estimación de $1 955 en el análisis de regresión, deben enunciarse primero las consideraciones básicas con respecto a la regresión lineal.

CONSIDERACIONES DE BASE PARA LA REGRESION LINEAL

1. Para cada valor de X existe un grupo de valores Y, y estos valores Y se *distribuyen en forma normal.*
2. Las *medias* de estas distribuciones normales de valores Y se encuentran todas en la recta de regresión.
3. Las *desviaciones estándares* de dichas distribuciones normales son *iguales.*
4. Los valores Y son estadísticamente *independientes.* Esto significa que al seleccionar una muestra, los valores Y seleccionados para un valor X específico no dependen de los valores Y para cualquier otro valor X.

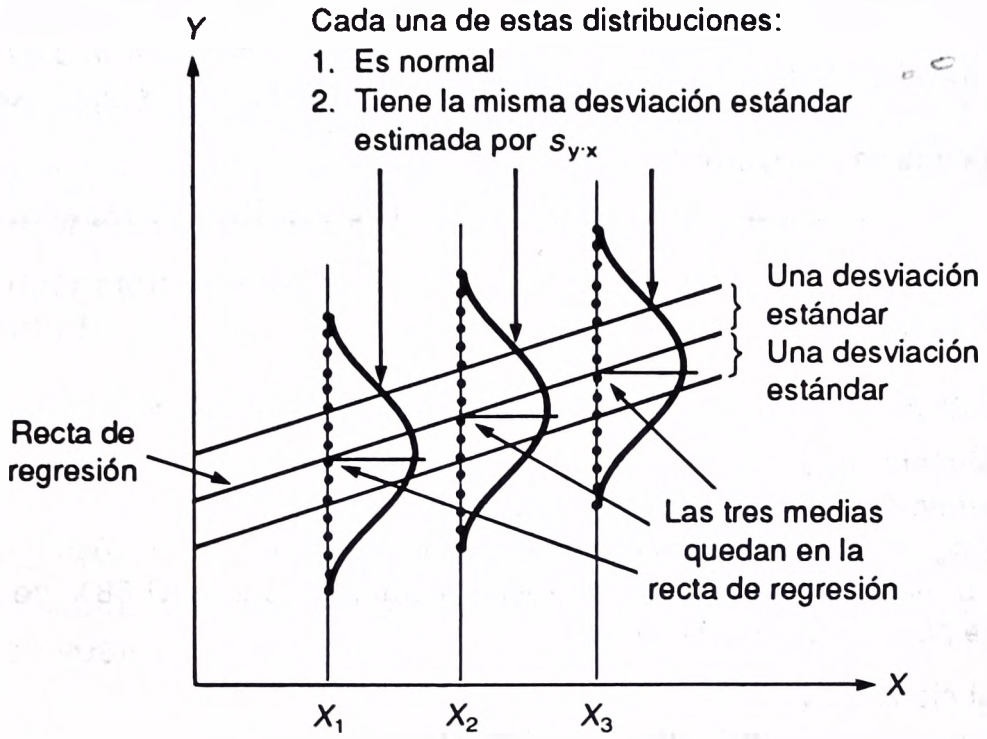
En el diagrama 14-10 se ilustran estas consideraciones. Obsérvese que estos enunciados son verdaderos para cada uno de los tres valores X: 1) Los valores Y se distribuyen en forma normal. 2) Todas las medias se encuentran sobre la misma línea de regresión. 3) Las desviaciones estándares, según las representa el error estándar de estimación $s_{y \cdot x}$, son iguales.

Recuérdese del capítulo 7 que si los valores se distribuyen en forma normal hasta cierto punto:

$\overline{X} \pm 1s$ abarca aproximadamente el 68% central de los valores.

DIAGRAMA 14-10

Representación gráfica de las consideraciones básicas de la regresión



$\overline{X} \pm 2s$ abarca aproximadamente el 95.5% central de los valores.

$\overline{X} \pm 3s$ comprende aproximadamente el 99.7% central de los valores.

Si la distribución es muy sesgada, tales relaciones no serán válidas.

Existen las mismas relaciones entre el valor promedio pronosticado, Y', y el error estándar de la estimación, $s_{y \cdot x}$. De nuevo, si la dispersión con respecto a la recta de regresión se distribuye en forma normal, hasta cierto punto y la muestra es grande, entonces:

$Y' \pm 1s_{y \cdot x}$ abarca el 68% central de los valores observados.

$Y' \pm 2s_{y \cdot x}$ abarca el 95.5% central de los valores observados.

$Y' \pm 3s_{y \cdot x}$ abarca el 99.7% central de dichos valores observados.

Ahora es posible relacionar estas consideraciones y el error estándar de la estimación con el experimento de puntuaciones de prueba-ventas semanales. Suponga que se incluye un gran número de vendedores en el experimento (en vez de sólo cinco). La diferencia entre las ventas pronosticadas, Y', y las ventas reales sería menor que un error estándar ($1 955) para el 68% de los vendedores. Además, 95% de los pronósticos no variarían más de 2 ($1 955). Más del 99% de los pronósticos de ventas semanales estarían "fuera" por no más de 3($1 955).

AUTOEXAMEN 14-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase el autoexamen 14-1.

1. Determine el error estándar de la estimación.
2. Suponga que se incluyeran en el experimento un gran número de puntos (en vez de sólo cuatro). ¿Dentro de qué valor estaría el 95% de los pronósticos de rendimientos?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Véase el ejercicio 3.
   a. Determine el error estándar de estimación.
   b. Suponga que un gran número de empleados (en vez de sólo ocho) se incluyeran en el experimento. ¿Dentro de qué valor estaría entonces el 68% de los pronósticos sobre puntuación de eficiencia?

6. Véase el ejercicio 4.
   a. Determine el error estándar de estimación.
   b. Suponga que se incluyera un gran número de personas que realizan los ensambles en el experimento (en vez de sólo cinco). ¿Entonces el 99.7% de la producción estimada la realizaría con no más de cuántas personas?

ESTIMACION DE INTERVALOS DE CONFIANZA

El error estándar de estimación es una medida válida para utilizarla al fijar *intervalos de confianza* cuando el tamaño de la muestra es grande, y en alguna forma la dispersión con respecto a la recta de regresión está distribuida de manera normal. Ninguna de estas consideraciones es válida en el problema relacionado con las ventas semanales. Por ejemplo, el tamaño muestral de cinco es muy pequeño. Por tanto, debe introducirse un factor de corrección para una muestra pequeña.

Un intervalo de confianza se determinará para:

1. El valor *medio* de Y para un valor dado de X.
2. Un valor *individual* de Y para un valor dado de X.

A fin de determinar el intervalo de confianza para el *valor medio* de Y para un valor dado de X, se utiliza la fórmula:

$$\boxed{Y' \pm t(s_{y \cdot x}) = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}}}$$

en donde, para este problema:

Y' es el valor pronosticado para cualquier valor X seleccionado. Por ejemplo, Y' es de \$8 000 para un valor X de 6 (véase la tabla 14-3).

X es cualquier valor seleccionado de X.

$\overline{X}$ es la media de las X (6 en este caso).

n es el número de observaciones. Hay cinco.

$s_{y \cdot x}$ es el error estándar de la estimación (calculado antes como 1.955).

t es el valor t tomado del apéndice F para $n - 2 = 5 - 2 = 3$ grados de libertad.

De nuevo conviene recordar que el concepto de t lo dedujo William Gossett a principios de la década de 1900. Advirtió que $\overline{X} \pm z(s)$ no era exactamente correcto para muestras pequeñas. Por ejemplo, observó que para muestras de tamaño 120, el 95% de los elementos quedaban dentro de $\overline{X} \pm 1.98$ en vez de en $\overline{X} \pm 1.96$. Esto no es demasiado crítico, pero obsérvese lo que sucede conforme el tamaño de la muestra se vuelve más pequeño:

g.l.	*t*
120	1.980
60	2.000
21	2.080
10	2.228
3	3.182

Esto es lógico. Cuanto más pequeña es la muestra, tanto mayor es el error posible. El incremento en el valor de t compensa esta posibilidad. El valor t de Student (Gossett firmó sus trabajos con el seudónimo de Student) para un nivel de confianza de 95% y $n - 2$ grados de libertad, es 3.182. Lo que Student descubrió para la desviación estándar (s) puede aplicarse en forma directa al error estándar de la estimación ($s_{y \cdot x}$).

Los límites de confianza de 95% para el valor Y' de 8.0 son 5.218 y 10.782 (véanse algunos cálculos básicos en la tabla 14-4). Introduciendo los valores de n, t y los demás en la fórmula se obtiene:

$$Y' \pm t(s_{y \cdot x}) = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}}$$

$$= 8.0 \pm 3.182(1.955)\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(6-6)^2}{30}}$$

$$= 8.0 \pm 3.182(1.955)\sqrt{0.20}$$

$$= 5.218 \text{ y } 10.782, \text{ o } \$5\,218 \text{ y } \$10\,782$$

TABLA 14-4

Cálculos necesarios para determinar los límites de confianza

X	Y	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$
4	\$ 5	−2	4
7	12	+1	1
3	4	−3	9
6	8	0	0
10	11	+4	16
		0	30

Interpretación Para un grupo de solicitantes cuyas puntuaciones de prueba son exactamente 6, existe una probabilidad de 0.95 de que sus ventas promedio semanales estén en el intervalo entre \$5 218 y \$10 782.

Como otro ejemplo del establecimiento de límites de confianza para el valor medio de Y según un valor dado de X, supóngase que un grupo de solicitantes tuvo puntuaciones de prueba de exactamente 7. Los números básicos para determinar los límites de confianza de 0.95 para $X = 0$, se presentan como sigue (cuando $X = 7$, $Y' = 9.133$, a partir de la tabla 14-3):

$$
\begin{aligned}
& 9.133 \pm 3.182(1.955)\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{(7-6)^2}{30}} \\
&= 9.133 \pm 3.182(1.955)\sqrt{0.20 + 0.0333} \\
&= 9.133 \pm 3.182(1.955)(0.483) \\
&= 6.128 \text{ y } 12.138, \text{ o } \$6\,128 \text{ y } \$12\,138
\end{aligned}
$$

AUTOEXAMEN 14-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los datos muestrales para los autoexámenes 14-1 y 14-2 se repiten a continuación.

Parcela	*Cantidad de fertilizante (toneladas)*	*Rendimiento (cientos de bushels)*
A	2	7
B	1	3
C	3	8
D	4	10

Se calculó la ecuación de regresión como $Y' = 1.5 + 2.2X$ (en cientos de bushels). El error estándar se evaluó como 0.9487 (en cientos de bushels).

1. Tomando en cuenta que esta es una muestra pequeña, fije los límites de confianza de 0.90 para un grupo de parcelas que recibieron exactamente tres toneladas de fertilizantes cada una.
2. Interprete lo que descubrió.

Ahora, a fin de determinar un intervalo de confianza para un valor *individual* de Y según un valor dado de X, la fórmula se modifica ligeramente: se suma 1 al número bajo el radical; la fórmula se convierte en

$$Y' \pm t(s_{y \cdot x}) = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}}$$

Las ventas semanales del Sr. Archer se utilizan como ejemplo. Obtuvo 7 en la prueba (tabla 14-3). Los límites de confianza de 95% se determinarían por:

$$9.133 \pm 3.182(1.955)\sqrt{1 + \frac{1}{5} + \frac{(7-6)^2}{30}}$$

$$= 9.133 \pm 3.182(1.955)(1.111)$$

$$= 2.224 \text{ y } 16.042, \text{ o } \$2\,224 \text{ y } \$16\,042$$

¿A QUE CONCLUSION LLEGO EL DIRECTOR DE PERSONAL?

Se ha continuado durante dos capítulos con el mismo problema de ventas. Recuérdese que el director de personal de una empresa que contratará un gran número de vendedores, empezó una búsqueda más objetiva para determinar qué candidato contratar para una promoción inicial. Diseñó una prueba para pronosticar las ventas semanales. Antes de utilizarla, formuló planes para determinar su confiabilidad. La prueba fue aplicada a cinco vendedores experimentados y sus puntuaciones se agruparon en pares con las ventas semanales. (El número de vendedores del experimento se conservó bajo para que los cálculos fueran mínimos.)

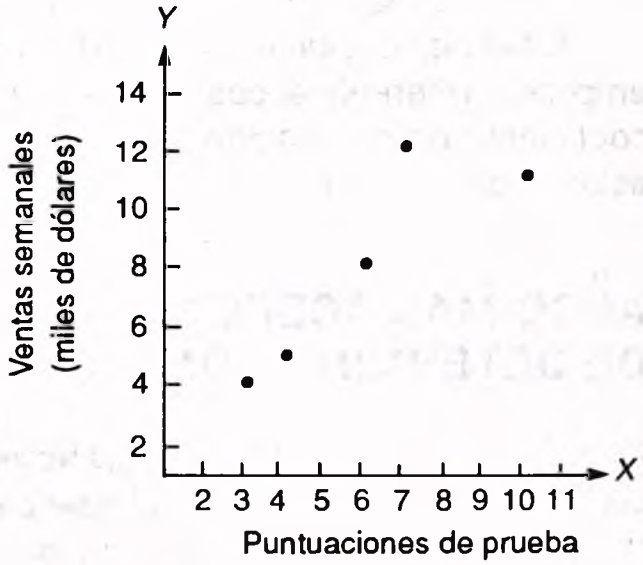
Primero se graficaron los pares de datos en un diagrama de dispersión, según se muestra en el diagrama 14-11.

DIAGRAMA 14-11

Diagrama de dispersión donde se muestran las puntuaciones de prueba y las ventas

Pares de datos: puntuaciones de prueba y ventas semanales

Vendedor	*Puntuación de prueba*	*Ventas semanales*
Sr. J. A. Amber	4	$ 5 000
Sr. B. N. Archer	7	12 000
Sra. G. D. Smith	3	4 000
Sr. A. B. Malcolm	6	8 000
Sra. A. Goodwin	10	11 000



Por el diagrama de dispersión se evidenció que existía una relación muy estrecha entre las puntuaciones de prueba (variable independiente X) y las ventas

(variable dependiente Y). Para medir esa relación, se calculó el coeficiente de correlación, r. Su valor es 0.88, lo cual indica, según se sospechaba, una estrecha relación entre los dos conjuntos de variables. El significado de r no es tan explícito como el del coeficiente de determinación. La r de Pearson tiende a enfatizar el grado de relación entre las variables X y Y. Algunos estadígrafos prefieren el coeficiente de determinación por tal motivo: $r^2 = (0.88)^2 = 0.77$. El número 0.77 indica que 77% de la variación total en las ventas semanales se debe a la variación en las puntuaciones de prueba. El coeficiente de no determinación, 0.23 (obtenido por $1 - r^2 = 1 - 0.77 = 0.23$), da la proporción de la variación en ventas que no se debe a la variación en las puntuaciones de prueba.

En esta parte es probable que el director de personal hubiera llegado a la conclusión (si se hubiera utilizado una muestra de más de 30) de que su prueba, aunque no es un elemento perfecto de pronóstico para las ventas semanales, podría utilizarse para pronosticar las ventas con mayor exactitud. A fin de predecir las ventas, se determinó la ecuación de regresión lineal $Y' = a + bX = 1.202 + 1.133X$. Para ilustrar su empleo, supóngase que un solicitante de un puesto en ventas obtuvo 6 puntos en la prueba. Las ventas semanales promedio del aspirante serían \$8 000, obtenido por $Y' = 1.202 + 1.133(6)$ (en miles de dólares).

Si el coeficiente de correlación hubiera sido de 1.00 o perfecto, no habría error en las ventas semanales estimadas en \$8 000. El coeficiente de correlación fue 0.88, lo cual significa que habrá un error en cualquier pronóstico formulado utilizando la ecuación de regresión. Tal error se mide por el error estándar de estimación. Se determinó como \$1 955. El director de personal podría llegar a la conclusión: 1) que 68% de las predicciones de ventas semanales no estarían equivocadas en más de 1(\$1 955). 2) que 95% no estarían equivocadas en más de 2(\$1 955). 3) Que 99.7% de los pronósticos no estarán equivocados en más de 3(\$1 955).

En resumen, es probable que el director de personal concluya que la prueba tiene grandes posibilidades como instrumento objetivo para estimar las ventas semanales de los solicitantes de puestos en el departamento de ventas.

Antes de concluir el análisis de la correlación y regresión simples, es necesario ampliar lo referente al coeficiente de determinación y examinar la relación entre tal coeficiente de correlación, el coeficiente de determinación y el error estándar de estimación.

ALGO MAS ACERCA DEL COEFICIENTE DE DETERMINACION

En el capítulo 13 utilizamos una fórmula conveniente de cálculo para determinar el coeficiente de correlación, r. El coeficiente de determinación se obtuvo elevando al cuadrado el coeficiente de correlación.

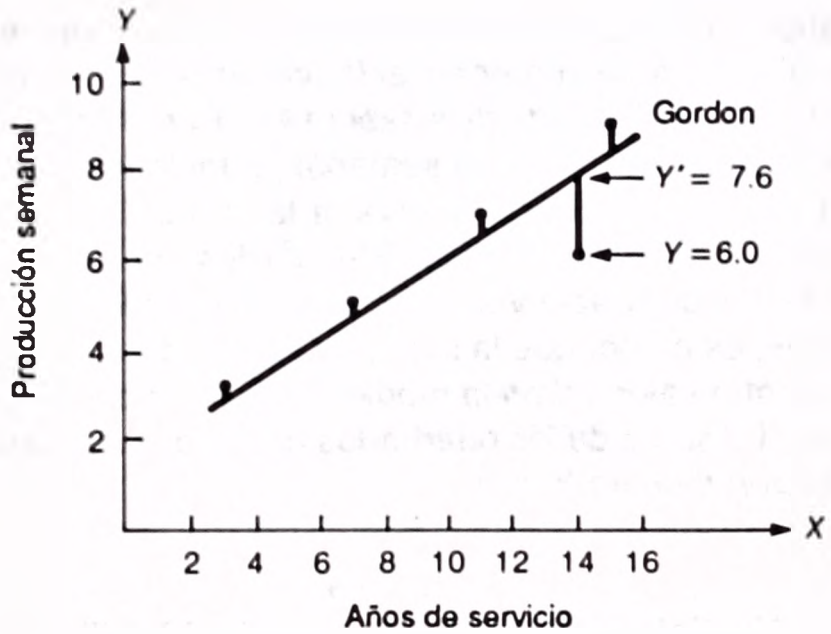
Para examinar aún más el coeficiente de determinación, supóngase que interesa la relación entre los años de permanencia en el trabajo, X, y la producción semanal, Y. Los datos muestrales revelaron que:

Empleado	Años de servicio X	Producción semanal Y
Gordon	14	6
James	7	5
Ford	3	3
Salter	15	9
Artes	11	7

Los datos muestrales se graficaron en un diagrama de dispersión. Debido a que la relación entre X y Y parece ser lineal, se trazó una recta por los puntos determinados (véase el diagrama 14-12). La ecuación es $Y' = a + bX = 2 + 0.4X$.

DIAGRAMA 14-12

Datos observados y línea recta



Obsérvese en el diagrama 14-12 que si se fuera a utilizar esa recta para pronosticar la producción semanal de un empleado, en ningún caso la predicción sería exacta. Esto es, existiría cierto error en cada uno de los pronósticos. Como ejemplo, para Gordon, que ha estado con la empresa 14 años, se pronosticaría una producción semanal de 7.6 unidades; sin embargo, él sólo produce 6 unidades.

Para medir el error general en nuestro pronóstico, cada desviación con respecto a la recta se eleva al cuadrado y los cuadrados se suman. El punto pronosticado sobre la recta se denota por Y' y el punto observado por Y. Para Gordon, $(Y - Y')^2 = (6 - 7.6)^2 = (-1.6)^2 = 2.56$. Lógicamente, esta variación no puede explicarse, de manera que se denomina *variación no explicada*. No es posible explicar en forma específica, por qué la producción de Gordon de 6 unidades está 1.6 unidades por abajo de su producción pronosticada de 7.6 unidades.

La suma de las desviaciones al cuadrado, $\Sigma (Y - Y')^2$ es 4.00 (tabla 14-5). El término $\Sigma(Y - Y')^2 = 4.00$ es la variación en Y (producción) que no puede pronosticarse a partir de X. Es la variación "no explicada" en Y.

TABLA 14-5

Cálculos necesarios para determinar la variación no explicada

	X	Y	Y'	$Y - Y'$	$(Y - Y')^2$
Gordon	14	6	7.6	−1.6	2.56
James	7	5	4.8	0.2	0.04
Ford	3	3	3.2	−0.2	0.04
Salter	15	9	8.0	1.0	1.00
Artes	11	7	6.4	0.6	0.36
Total	50	30		0.0*	4.00

* Debe ser 0

Supóngase ahora que *sólo* se conocen los valores Y (en este problema, la producción semanal) y se desea pronosticar la producción de todos los empleados. Estos valores son 6, 5, 3, 9 y 7 a partir de la tabla 14-5. Para hacer tales predicciones, podríamos asignar la producción media semanal (6 unidades, obtenida por $\Sigma Y/n = 30/5 = 6$) a cada empleado. Esto conservaría la suma de los cuadrados de los errores de pronóstico en un valor mínimo. (Recuérdese del capítulo 3 que la suma de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media aritmética, para un conjunto de números, es menor que la suma de los cuadrados de las desviaciones a partir de cualquier otro valor, como la mediana.) En la tabla 14-6 se muestran los cálculos necesarios. La suma de los cuadrados de las desviaciones es 20. Esto se conoce como *variación total en Y.*

TABLA 14-6

Cálculos necesarios para determinar la variación total en Y

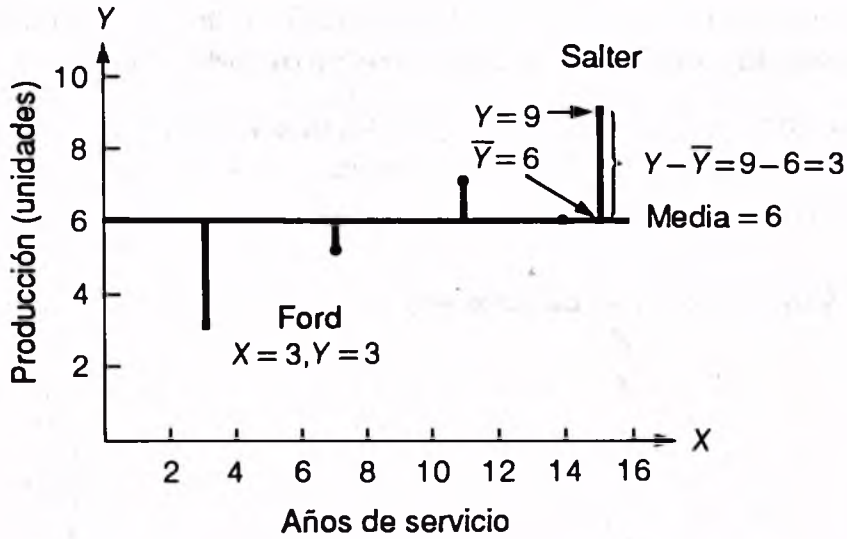
Nombre	*Producción semanal* Y	*Producción semanal media* $\overline{Y}$	$Y - \overline{Y}$	*Media al cuadrado* $(Y - \overline{Y})^2$
Gordon	6	6	0	0
James	5	6	−1	1
Ford	3	6	−3	9
Salter	9	6	3	9
Artes	7	6	1	1
Total			0*	20

* Debe ser 0.

Lo que hicimos para determinar la variación total en Y se muestra gráficamente en el diagrama 14-13.

DIAGRAMA 14-13

Puntos que muestran la desviación con respecto a la media de *Y*



Lógicamente, la variación total en Y puede subdividirse en variación no explicada y variación explicada. Para llegar a la variación explicada, conociendo la variación total y la no explicada, simplemente se realiza una resta: variación explicada = variación total − variación no explicada. Al dividir la variación explicada entre la variación total se obtiene el coeficiente de determinación, r^2 que es un porcentaje. En términos de una fórmula:

$$r^2 = \frac{\text{Variación total} - \text{Variación no explicada}}{\text{Variación total}}$$

$$= \frac{\Sigma(Y-\overline{Y})^2 - \Sigma(Y-Y')^2}{\Sigma(Y-\overline{Y})^2}$$

En este problema:

$$r^2 = \frac{20-4}{20} = \frac{16}{20}$$

$$= 0.80$$

Tabla 14-6

Tabla 14-5

Variación explicada

Variación total

Según se ha mencionado, 0.80 corresponde a un porcentaje. Se dice así que 80% de la variación en la producción semanal, Y, está determinado por su relación lineal con X (años de permanencia en el trabajo).

Para verificar podría utilizarse la fórmula de cálculo para el coeficiente de correlación, r. Al elevar r al cuadrado se obtiene el coeficiente de determinación. En el ejercicio 7 se presenta una verificación del problema anterior.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Utilizando el problema precedente, relacionado con años de permanencia en el trabajo y producción semanal, verifique que el coeficiente de determinación en realidad es 0.80.

8. El número de acciones de la empresa Icom, Inc. que variaron durante un mes y el precio al final del mes, se enlistan en la tabla que sigue. Además, se dan los puntos Y' en la recta que pasa por los datos observados:

Movimiento (miles de acciones)	*Precio*	
X	Y	Y'
4	\$2	2.7
1	1	0.6
5	4	3.4
3	2	2.0
2	1	1.3

a. Trace un diagrama de dispersión y haga pasar una línea recta a través de los puntos.
b. Calcule el coeficiente de determinación utilizando la fórmula: variación explicada dividida entre variación total.
c. Como verificación, utilice la fórmula de cálculo para r.
d. Interprete el coeficiente de determinación.

RELACION ENTRE COEFICIENTE DE CORRELACION, COEFICIENTE DE DETERMINACION Y ERROR ESTANDAR DE ESTIMACION

En una sección anterior se analizó el error estándar de la estimación, que mide cuán cerca de la recta de regresión se encuentran los valores reales. Cuando el error estándar es pequeño, indica que las dos variables están relacionadas muy de cerca. En el cálculo del error estándar, el término clave es $\Sigma(Y - Y')^2$. Si tal término es "pequeño", entonces el error estándar también será pequeño.

Recuérdese del capítulo 13 que el coeficiente de correlación mide la fuerza de la asociación entre dos variables. Cuando los puntos sobre el diagrama de dispersión parecen cercanos a la línea recta, se observa que el coeficiente de correlación tiende a ser "grande". Así, el error estándar de la estimación y el coeficiente de correlación indican la misma información, pero utilizan una escala diferente para indicar la fuerza de la asociación. Sin embargo, ambas medidas se relacionan con el término $\Sigma(Y - Y')^2$.

También observamos que el cuadrado del coeficiente de correlación se denomina coeficiente de determinación. El coeficiente de determinación mide el porcentaje de la variación en Y que se explica por la variación en X.

Un medio conveniente para mostrar la relación entre estas tres medidas es una tabla ANOVA. Esta tabla se asemeja a la tabla de análisis de variancia desarrollada en el capítulo 12. En dicho capítulo, la variación se dividió en dos componentes: la

que se debe a los tratamientos y la que se debe al error aleatorio. El concepto es semejante en análisis de regresión. La variación total, $\Sigma(Y - \overline{Y})^2$, está dividida en dos componentes: 1) la variación explicada por la *regresión* (que la explica la variable independiente), y 2) el *error*, o variación no explicada. Estas dos categorías se identifican en la columna de la tabla ANOVA que sigue. La columna con el encabezado "GL" se refiere a los grados de libertad asociados a cada categoría. El número total de grados de libertad es $n - 1$. El número de grados de libertad en la regresión es 1, debido a que hay una variable independiente. El número de grados de libertad asociado con el término de error es $n - 2$. El término SS, que está en el centro de la tabla ANOVA, se refiere a la suma de cuadrados: la variación. Los términos se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Variación total} &= \text{total SS} = \Sigma(Y - \overline{Y})^2 \\ \text{Variación o error} &= \text{SSE} = \Sigma(Y - Y')^2 \\ \text{Regresión} &= \text{SSR} = \Sigma(Y' - \overline{Y})^2 \end{aligned}$$

La tabla ANOVA es:

Fuente	*GL*	*SS*	*MS*
Regresión	1	SSR	SSR/1
Error	$n - 2$	SSE	SSE/$(n - 2)$
Total	$n - 1$	total SS*	

* total SS = SSR + SSE.

El coeficiente de determinación, r^2, puede determinarse directamente a partir de la tabla ANOVA por

$$r^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{total SS}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{total SS}}$$

El término "SSR/total SS" es el porcentaje en la variación de Y explicado por la variable independiente X. Obsérvese el efecto del término SSE sobre r^2. Conforme SSE disminuye, r^2 aumentará. Por el contrario, conforme disminuye el error estándar, se incrementa el término r^2.

El error estándar de estimación también puede determinarse a partir de la tabla ANOVA utilizando la ecuación que sigue.

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n-2}}$$

El problema de las ventas y la puntuación de prueba iniciado en el capítulo 13 y continuado en este capítulo, sirve para ilustrar los cálculos del coeficiente de determinación y del error estándar en la estimación a partir de una tabla ANOVA.

✱ Ejemplo

Las puntuaciones de prueba y las ventas semanales de una muestra de cinco vendedores se indican de nuevo, tomadas de la tabla 14-1.

Vendedor	*Puntuación de prueba*	*Ventas semanales*
Sr. J. A. Amber	4	$ 5 000
Sr. B. N. Archer	7	12 000
Sra. G. D. Smith	3	4 000
Sr. A. B. Malcolm	6	8 000
Sra. A. Goodwin	10	11 000

La tabla ANOVA que sigue es parte del listado de regresión determinado por el sistema MINITAB.

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS
Regression	1	38.533	38.533
Error	3	11.467	3.822
Total	4	50.000	

¿Cuál es el coeficiente de determinación? ¿Y cuál es el error estándar de la estimación?

✔ Solución

El coeficiente de determinación es 0.771, obtenido por

$$r^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{total SS}} = \frac{38.533}{50.000} = 0.771$$

Este es el mismo valor que se calculó en la página 502 del capítulo 13. De nuevo puede decirse que aproximadamente 77.1% de la variación total en la variable dependiente (ventas) se explica, o se debe, a la variación en la variable independiente (puntuaciones de prueba). Si hubiéramos necesitado el coeficiente de correlación, r, se habría tomado la raíz cuadrada del coeficiente de determinación: $\sqrt{r^2} = \sqrt{0.771} = 0.88$, que indica una estrecha relación entre las puntuaciones de prueba y las ventas. (Este valor también es igual al calculado en el capítulo 13.)

El error estándar de estimación se calcula como sigue:

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n-2}} = \sqrt{\frac{11.467}{5-2}} = 1.995$$

Valor que es igual al que se calculó en la página 541 de este capítulo.

De nuevo se advierte la eficiencia de un sistema de computación para evaluar rápidamente medidas estadísticas básicas.

RESUMEN

Una investigación estadística con frecuencia implica el examen de la relación entre dos conjuntos de variables. El *análisis de regresión* se ocupa en parte del desarrollo de una expresión matemática para tal relación. La forma general de la ecuación de regresión es $Y' = a + bX$, en donde Y' es el valor pronosticado de Y, dado un valor específico de X.

La recta de "mejor ajuste" puede determinarse utilizando la técnica de *mínimos cuadrados*. Minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores Y reales y los valores Y' pronosticados sobre la recta de regresión.

El *error estándar de la estimación*, $s_{y \cdot x}$, mide la exactitud del pronóstico. También se utiliza para desarrollar un intervalo de confianza correspondiente a la media de los valores de Y dado un valor de X, o para un valor de X específico.

Recapitulación

I. Análisis de regresión.
   A. Su objetivo es determinar la ecuación de regresión a fin de pronosticar el valor de una variable (denotada por Y y denominada variable dependiente) con base en otra variable (denotada por X y llamada variable independiente).
   B. El procedimiento es:
      1. Seleccionar una muestra a partir de la población y enlistar los pares de datos (X y Y) para cada observación.
      2. Trazar un diagrama de dispersión a fin de tener una representación visual de la relación.
      3. Determinar la ecuación de regresión, que tiene la forma $Y' = a + bX$, en donde:

         Y' es el valor promedio pronosticado de la variable Y para cualquier valor de X.

         a es la intersección Y, o valor estimado de Y cuando $X = 0$.

         b es la denominada pendiente de la recta, o sea, el cambio promedio en Y' por unidad de cambio en X.

         X es cualquier valor de X.

      4. Los cálculos para a y b se obtienen por

$$b = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2}$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

      5. El error estándar de estimación mide la variación con respecto a la recta de regresión. Dos fórmulas utilizadas para determinar el error estándar son:

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a(\Sigma Y) - b(\Sigma XY)}{n-2}}$$

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y')^2}{n-2}}$$

6. Los límites de confianza para el valor medio de Y según un valor X, se obtienen por

$$Y' \pm t(s_{y \cdot x})\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}}$$

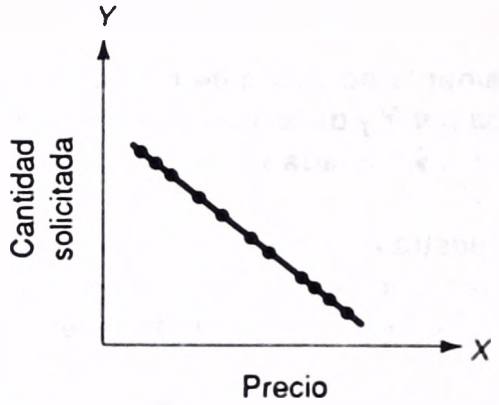
A fin de fijar límites de confianza para un valor individual de Y correspondiente a un valor dado de X:

$$Y' \pm t(s_{y \cdot x})\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}}$$

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

Los ejercicios del 9 al 14 se basan en la representación que sigue.

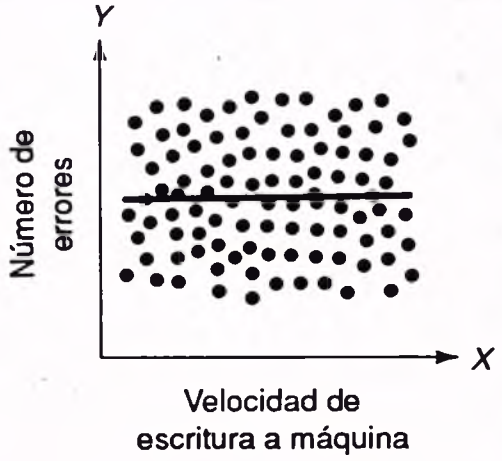


9. Tal representación se denomina:
   a. Gráfica suiza de puntos.
   b. Gráfica de barras.
   c. Diagrama de dispersión.
   d. Gráfica lineal.
   e. Ninguna de estas opciones es correcta.
10. La ecuación para la recta que pasa por los puntos tomaría la forma de:
   a. $Y' = a + b + c$.
   b. $Y' = a + bX$.
   c. $Y' = X - 1$.
   d. $Y' = a + bX^2$.
   e. Ninguna de las opciones anteriores es correcta.
11. En este problema específico, el investigador intenta pronosticar:
   a. La cantidad solicitada (o demandada) con base en el precio.
   b. El precio con base en la cantidad solicitada.
   c. Tanto el precio como la cantidad solicitada.
   d. Ninguna de las opciones es correcta.
12. Si se calculara, el signo de b en la ecuación sería
   a. Positivo o negativo.
   b. Positivo.
   c. Negativo.

d. Infinito.
e. Ninguna de las opciones es correcta.

13. Si se calculara el error estándar de estimación, sería
    a. Infinito.
    b. + 1.00.
    c. – 1.00.
    d. 0.
    e. Ninguna de estas opciones es correcta.
14. Cualesquiera pronósticos con base en estas nociones serían:
    a. Sin error.
    b. De poca o ninguna utilidad.
    c. Ninguna de las opciones es correcta.
15. A la variable que se utiliza para pronosticar otra variable se le denomina:
    a. Variable dependiente.
    b. Variable independiente.
    c. Variable de correlación.
    d. Variable *t* de Student.
    e. Ninguna de estas opciones es correcta.
16. El método empleado para llegar a la recta de "mejor ajuste" en análisis de regresión se denomina:
    a. Método de dibujo a mano libre.
    b. Método de no determinación.
    c. Método de mínimos cuadrados.
    d. Método de correlación.
    e. Ninguna de estas opciones es correcta.

Los ejercicios 17 y 18 se basan en el diagrama que sigue.



17. En la ecuación de regresión para la línea recta, el valor para *b* sería aproximadamente:
    a. – 1.00.
    b. + 1.00.
    c. 0.
    d. Ninguna de estas opciones es correcta.
18. La variable independiente está en el
    a. Eje *Y*.
    b. Eje *X*.

c. Tanto en el eje Y como en el eje X.
d. Ninguna de estas opciones es correcta.

19. La Organización de las Naciones Unidas (ONU) proporcionó los siguientes valores de las tasas anuales de nacimientos y suicidios para países seleccionados.

País	*Tasa de nacimiento (por millar de habitantes)*	*Tasa de suicidios (por millar de habitantes)*
Australia	15.7	11.1
Checoslovaquia	18.4	21.9
Finlandia	13.5	25.1
Alemania Oriental	13.9	30.5
Italia	12.5	5.8
México	35.3	2.1
Polonia	19.0	12.1
Singapur	17.0	11.3
España	17.2	4.0
Estados Unidos de Norteamérica	15.3	12.7

Suponga que se desea estimar la tasa de suicidios con base en la tasa de nacimientos.
a. Trace un diagrama de dispersión.
b. Determine la ecuación de regresión.
c. Grafique la ecuación de regresión en el diagrama de dispersión. (Sugerencia: seleccione tres valores de X y calcule los valores de Y' corrrespondientes).
d. Pronostique la tasa de suicidios para un país que tenga una tasa de nacimientos de 15.0 por millar de habitantes.
e. Determine el error estándar de la estimación.
f. Determine el intervalo de confianza para un grupo de países cuyas tasas de nacimiento sean exactamente de 15.0 por millar de habitantes.
g. Interprete los hallazgos.

Los ejercicios 20 al 24 se basan en lo que sigue: el director de investigación de la organización Cattleman Association, está examinando la relación entre los precios de varios productos pecuarios, como cerdos y terneras. El Departamento de Agricultura (de Estados Unidos), mediante el National Agricultural Statistics Service, proporcionó los precios que siguen por cada 100 libras durante periodos seleccionados.

Cerdos	*Reses*	*Ternera*	*Ovejas*	*Corderos*
$47.10	$57.30	$59.90	$16.40	$60.10
15.30	20.40	22.90	5.61	17.90
41.80	66.10	88.80	26.30	66.70
49.30	52.60	61.10	25.60	69.00
44.00	53.70	62.10	23.90	67.70
22.70	27.10	34.50	7.51	26.40
46.10	32.20	27.20	11.30	42.10
38.00	62.40	76.80	21.30	63.60
44.00	53.70	62.10	23.90	67.70
46.80	55.50	61.70	15.70	53.90

20. Utilizando los precios seleccionados por cada 100 libras para cerdo y res:
a. Trace un diagrama de dispersión. Considere que los precios de la res son la variable dependiente.
b. Calcule la ecuación de regresión.

c. Mostrando cálculos básicos, grafique la recta en el diagrama de dispersión.
d. El precio estimado para la carne de cerdo es $45.00 (dólares) por cada 100 libras. ¿Cuál es el precio pronosticado para la res?
e. ¿Cuál es el coeficiente de determinación?
f. Interprete los resultados.

21. Véase el ejercicio 20. Si dispone de un paquete de software (programas para computadora), resuelva el problema y determine la ecuación de regresión, el coeficiente de determinación, etc. Saque conclusiones.
22. Utilizando los precios seleccionados por cada 100 libras de carne de res y ternera:
    a. Trace un diagrama de dispersión. Considere que los precios de ternera son la variable dependiente.
    b. Con base en el diagrama de dispersión, ¿a qué conclusión se puede llegar en cuanto a la fuerza de la relación?
    c. Determine la ecuación de regresión.
    d. ¿Cuál es el error estándar de la estimación?
    e. ¿Cuál es el coeficiente de determinación?
    f. Interprete los hallazgos.
23. Véase el ejercicio 22. Si dispone de un paquete de software resuelva el problema. Determine la ecuación de regresión, el coeficiente de determinación, etc. Saque conclusiones.
24. Seleccione dos conjuntos cualesquiera de datos en pares, diferentes de los de cerdo y ternera que se utilizaron en los ejercicios 20 y 22. Primero indique cuál es la variable que se va a estimar, y después analice la relación entre las dos variables elaborando un diagrama de dispersión, determinando la ecuación de regresión, etc. Escriba un informe sobre lo que se encontró. Resuelva los problemas utilizando una calculadora de mano o un paquete computacional como el MINITAB.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Véase el problema 1 de la Aplicación de los conceptos, capítulo 13.
    a. Grafique la relación entre el número de visitas y el valor de los pedidos. Considere que el número de visitas es la variable independiente.
    b. Elabore una ecuación de regresión para pronosticar el valor de los pedidos a partir del número de visitas.
    c. ¿Cuál es el valor pronosticado de los pedidos si se realizan cinco visitas?
    d. Establezca un intervalo de confianza de 95% para el valor de los pedidos recibidos en Hammond Iron Works, Inc. si se realizan cinco visitas.
    e. ¿Qué porcentaje de variación en el valor de los pedidos se explica por la variación en el número de visitas?
2. Véase el problema 2 de la Aplicación de los conceptos, capítulo 13.
    a. Grafique la relación entre el promedio de carreras ganadas por equipo y el porcentaje de triunfos. Considere que el promedio de carreras ganadas por equipo es la variable independiente.
    b. Elabore una ecuación de regresión para pronosticar el porcentaje de triunfos a partir del promedio de carreras ganadas por equipo.
    c. ¿Cuál es el porcentaje estimado de triunfos para un equipo con un promedio de carreras de 3.5 por juego?

d. Especifique un intervalo de confianza de 95% para el porcentaje de triunfos de un equipo específico con un promedio de carreras de 3.5.
e. ¿Qué porcentaje de la variación en el porcentaje de triunfos de un equipo se explica por el promedio de carreras ganadas por equipo?

EXAMEN CAPITULO 14

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Las ventas de dentífrico parecen depender mucho del nivel de publicidad. A fin de examinar esta observación se consideran, los gastos publicitarios anuales para varias marcas y sus ventas anuales:

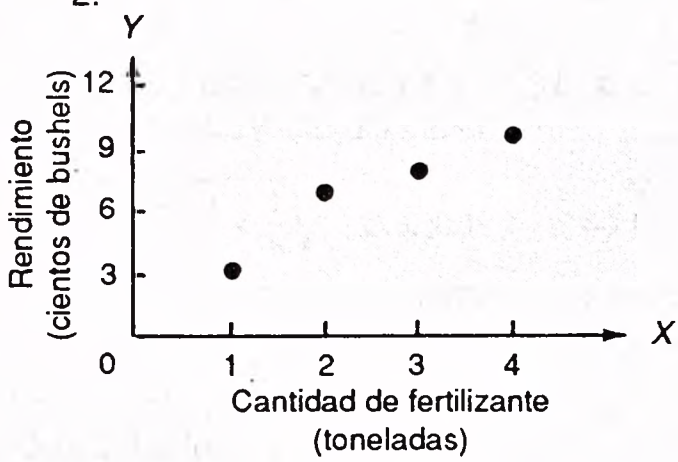
Marca	*Gastos anuales en publicidad (millones de dólares)*	*Ventas anuales (millones de dólares)*
Glint	2	5
Peart	4	7
Shine On	3	6
Number 1	1	2

1. a. Trace un diagrama de dispersión
   b. Calcule la ecuación de regresión de mínimos cuadrados.
   c. Con base en la ecuación de regresión, un gasto de publicidad de 1.9 millones (de dólares), ¿qué importe de ventas se debería obtener en promedio?
   d. Establezca tres puntos y trace la recta en el diagrama de dispersión.
2. a. Determine el error estándar de estimación.
   b. Para un grupo de laboratorios fabricantes de dentífricos cuyos gastos anuales en publicidad son de exactamente 1.9 millones (de dólares), ¿cuál es el intervalo de confianza de 95% para la media aritmética de sus ventas anuales?
   c. Interprete estos límites.

Autoexámenes

14-1 1. El rendimiento es una variable dependiente. La cantidad de fertilizante es la variable independiente.

2.



3.

X	Y	XY	X^2	Y^2
2	7	14	4	49
1	3	3	1	9
2	8	24	9	64
4	10	40	16	100
10	28	81	30	222

$$b = \frac{4(81) - (10)(28)}{4(30) - (10)^2}$$

$$= \frac{324 - 280}{120 - 100} = 2.2$$

$$a = \frac{28}{4} - 2.2\left(\frac{10}{4}\right)$$

$$= 7 - 5.5 = 1.5$$

La ecuación es: $Y' = 1.5 + 2.2X$ (en cientos de bushels).

14-2 1. 0.9487 (en cientos de bushels) obtenido por:

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a(\Sigma Y) - b(\Sigma XY)}{n-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{222 - 1.5(28) - 2.2(81)}{4-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1.8}{2}} = \sqrt{0.9}$$

$$= 0.9487 \text{ o } 94.87 \text{ bushels}$$

2. 189.74 bushels, obtenido por 2(94.87).

14-3 1. 6.58 y 9.52, ya que Y' para una X igual a 3 es 8.1, que resulta de $Y' = 1.5 + 2.2(3) = 8.1$. Se tiene que $X = 2.5$, y entonces:

X	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$
2	−0.5	0.25
1	−1.5	2.25
3	0.5	0.25
4	1.5	2.25
		5.00

El valor de t del apéndice F para 4 − 2 = 2 grados de libertad al nivel 0.10, es 2.920.

$$Y' \pm t(s_{y \cdot x})\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^2}{\Sigma(X - \overline{X})^2}}$$

$$= 8.1 \pm 2.920(0.9487)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(3 - 2.5)^2}{5.00}}$$

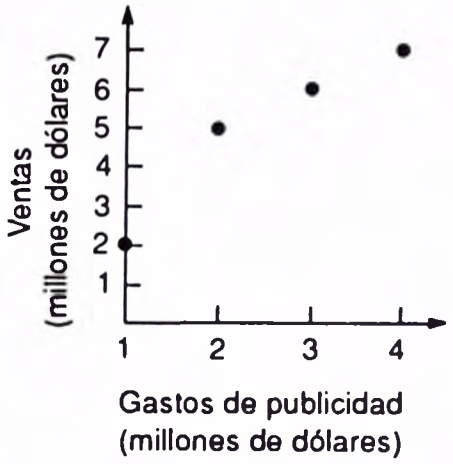
$$= 8.1 \pm 2.920(0.9487)(0.5477)$$

= 6.58 y 9.62 (en cientos de bushels), o sea 658 y 962 bushels.

2. Para un grupo de parcelas que reciben exactamente tres toneladas de fertilizante, la probabilidad de que el rendimiento medio esté en el intervalo entre 658 y 962 bushels es 0.90.

Examen capítulo 14

1. a.



b. $Y' = a + bX = 1 + 1.6X$ (en millones de dólares)

$$b = \frac{4(58) - 10(20)}{4(30) - (10)^2} = \frac{32}{20} = 1.6$$

$$a = \frac{20}{4} - 1.6\left(\frac{10}{4}\right) = 5 - 4 = 1$$

c. 4.04 millones (de dólares), obtenido por $Y' = 1 + 1.6(1.9)$.

d.

X	Y'
1	2.6
2	4.2
3	5.8
4	7.4

2. a. 0.77 (en millones de dólares), obtenido por:

$$\sqrt{\frac{114 - 1(20) - 1.6(58)}{4 - 2}} = \sqrt{\frac{1.2}{2}} = 0.77$$

b. \$2.16 y \$5.92 (en millones de dólares), evaluado por medio de:

$$4.04 \pm 4.303(0.77)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1.9 - 2.5)^2}{5.0}}$$

$$= 4.04 \pm 4.303(0.77)(0.5674504)$$

$$= 4.04 \pm 1.88$$

c. Para un grupo de fabricante de dentífricos con gastos de publicidad exactamente de 1.9 millones (de dólares), la probabilidad de que las ventas medias estén en el intervalo entre 2.16 millones y 5.92 millones, es 0.95.

15

Regresión y correlación múltiples

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Describir la relación entre dos o más variables independientes y una variable dependiente utilizando la ecuación de regresión múltiple.
2. Describir el error en el pronóstico utilizando el error múltiple estándar de estimación.
3. Describir la fuerza de la relación entre las variables independientes y la variable dependiente, utilizando coeficientes múltiples de correlación, determinación y no determinación.
4. Explicar paso por paso los resultados por computadora de regresión y correlación múltiples.
5. Realizar una prueba global para determinar si el modelo de regresión múltiple es válido o no.
6. Evaluar coeficientes de regresión individuales.

El capítulo anterior estuvo dedicado a la relación que existe entre dos conjuntos de medidas de nivel de intervalo o de razón. Una se denotaba como variable independiente y la otra como variable dependiente. Se observó que si la relación entre los dos conjuntos de variables es lineal, la ecuación de regresión $Y' = a + bX$ se utiliza para pronosticar la variable dependiente, Y, con base en la variable independiente, X. Además, el coeficiente producto-momento de correlación de Pearson es una medida que analizamos y que revela si la relación es grande, moderada o pequeña. Un coeficiente cercano a más o menos 1.0 indicaría una relación muy grande entre X y Y. Un coeficiente cercano a 0 (por ejemplo, – 0.12 o bien + 0.12) indicaría que la relación es bastante pequeña.

El uso de una variable independiente para pronosticar la variable independiente no toma en cuenta la relación de otras variables con la variable dependiente. Este capítulo está dedicado a ampliar el estudio de la correlación y la regresión, examinando la influencia de *dos o más variables* independientes sobre la dependiente. Se denomina **análisis de regresión y correlación múltiples.** Se presentará primero el análisis de regresión múltiple al desarrollar y explicar el uso de la ecuación de regresión múltiple, así como del error estándar múltiple de la estimación. Después se medirá la fuerza de la relación entre las variables independientes y la variable dependiente, utilizando el coeficiente múltiple de correlación, y los coeficientes múltiples de determinación y no determinación. Por último, se presentarán varias aplicaciones de computadora utilizando el MINITAB.

ANALISIS DE REGRESION MULTIPLE

Recuérdese del capítulo 14 que la ecuación de regresión lineal simple que abarca una variable independiente y una variable dependiente, tiene la forma $Y' = a + bX$. El caso de regresión múltiple sólo amplía la ecuación para incluir variables independientes adicionales. Para dos variables independientes, la forma general de la **ecuación de regresión múltiple** es:

$$\boxed{Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2}$$

en donde:

X_1, X_2 son las dos variables independientes.

a es la intersección en Y, es decir, la ordenada del punto de intersección con el eje Y.

b_1 es el cambio neto en Y por cada cambio unitario en X_1 *manteniendo* X_2 *constante* (o sea sin cambios). Se denomina *coeficiente de regresión parcial, coeficiente de regresión neta,* o, más brevemente, *coeficiente de regresión.*

b_2 es el cambio neto en Y por unidad de cambio en X_2, *manteniendo* X_1 *constante* (sin cambios). También se denomina coeficiente de regresión parcial o simplemente coeficiente de regresión.

Para ilustrar la interpretación de a y de los dos coeficientes de regresión, supóngase que las millas por galón de gasolina de un vehículo automotor están directamente relacionadas con el índice octánico de la gasolina que se utilice (X_1), e inversamente con el peso del automóvil (X_2). Considérese que se determinó que la ecuación de regresión múltiple es $Y' = 6.3 + 0.2X_1 + (-0.001)X_2$. El valor de a de 6.3 indica que el plano de regresión corta al eje Y en 6.3 cuando tanto X_1 como X_2 son cero. La b_1 de 0.2 indica que por cada incremento de uno en los octanos de la gasolina, el automóvil recorrerá dos décimos de milla más por galón, *sin importar el peso del vehículo*. Esto es, el peso del automóvil se mantiene constante. El valor b_2 de -0.001 indica que por cada incremento de una libra en el peso del vehículo, el rendimiento en millas recorridas por galón disminuye en 0.001 por milla, *sin importar los octanos de la gasolina que se esté utilizando*.

Como ejemplo, un automóvil con gasolina de 92 octanos en el tanque, y que pesa 2 000 libras, recorrerá en promedio 22.7 millas por galón, lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} Y' &= a + b_1X_1 + b_2X_2 \\ &= 6.3 + 0.2(92) + (-0.001)2\,000 \\ &= 22.7 \text{ millas por galón} \end{aligned}$$

Para tres variables independientes denotadas por X_1, X_2 y X_3, la ecuación general de regresión múltiple es:

$$\boxed{Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3}$$

Esto puede ampliarse para cualquier número de variables independientes (k), siendo la ecuación general de regresión múltiple:

$$\boxed{Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \cdots + b_kX_k}$$

Según se mostró en el capítulo 14, el método de mínimos cuadrados minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales con respecto a la línea recta. Lo mismo se cumple para la regresión múltiple. Sin embargo, a fin de llegar a a, b_1 y b_2 en la ecuación de regresión múltiple, la abundancia de cálculos resulta muy tediosa, aun utilizando una calculadora de mano. Como ejemplo, para dos variables independientes es necesario resolver simultáneamente tres ecuaciones que son:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= na + b_1\Sigma X_1 + b_2\Sigma X_2 \\ \Sigma X_1Y &= a\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1^2 + b_2\Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2Y &= a\Sigma X_2 + b_1\Sigma X_1X_2 + b_2\Sigma X_2^2 \end{aligned}$$

Se dispone de muchos paquetes de software (o programas de computadora) y la mayoría de los resultados proporcionan un razonable conjunto de respuestas. Los paquetes MINITAB, SPSS^x y SAS son tres de los más utilizados. Antes de presentar el paquete de regresión múltiple MINITAB, se examinará el significado

del término de intersección en el eje Y, a, y los coeficientes de regresión parcial, b_1 y b_2. Para hacer esto, se volverá a examinar el problema de ventas de dos variables del capítulo 14, y se agregará otra variable independiente. Entonces tendremos un problema de regresión múltiple relacionado con una variable dependiente, Y, y dos variables independientes, X_1 y X_2.

✱ Ejemplo

Recuérdese del capítulo 14 que una pequeña muestra de vendedores experimentados se sometieron a una prueba diseñada por el director de personal, y las puntuaciones de tal evaluación se parearon con los importes de las ventas semanales. Ahora se agregará una segunda variable independiente (sus calificaciones de desempeño en la fase 1 del programa inicial de entrenamiento) a fin de mejorar el proceso de pronóstico. Obsérvese en la tabla 15-1 que las ventas semanales (variable dependiente) se denotan con Y. Las puntuaciones de prueba y las calificaciones de desempeño (variables independientes) se denotan por X_1 y X_2, respectivamente.

TABLA 15-1

Ventas semanales, puntuaciones de prueba y calificaciones de desempeño para la muestra de vendedores

Vendedor	*Ventas semanales (en miles de dólares)* Y	*Puntuación de prueba* X_1	*Calificación de desempeño* X_2
Sr. Amber	5	4	2
Sr. Archer	12	7	5
Sra. Smith	4	3	1
Sr. Malcolm	8	6	4
Sra. Goodwin	11	10	6

1. ¿Cuál es la ecuación de regresión múltiple?
2. Supóngase que un solicitante de empleo en el departamento de ventas tuvo una puntuación de 6.0 en la prueba, y una calificación de desempeño de 3.8 en la fase 1 del programa de entrenamiento. ¿Cuáles son las ventas semanales estimadas del solicitante?

✔ Solución

1. La forma general es $Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2$. Para este problema, supóngase que se determinó que la ecuación de regresión que se aplica en este caso es $Y' = 3.5 + (-0.975)\,X_1, + 2.875X_2$.
2. Las ventas semanales estimadas del solicitante son \$8 575 (dólares), obtenidas por

$$\begin{aligned} Y' &= 3.5 + (-0.975)6.0 + 2.875(3.8) \\ &= 3.5 - 5.85 + 10.925 \\ &= 8.575 \text{ (en miles de dólares)} \end{aligned}$$

AUTOEXAMEN 15-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Al ingeniero de control de calidad de una industria le interesa pronosticar la resistencia a la tensión de un alambre de acero fabricado, con base en su diámetro exterior y la cantidad de molibdeno contenida en el metal. Como experimento, selecciona cuatro tramos de alambre, mide su diámetro exterior y determina el contenido de molibdeno. Después mide la resistencia a la tensión de cada tramo de alambre. Los resultados son:

Tramo	*Resistencia a la tensión (psi),* Y	*Diámetro exterior (cm),* X_1	*Cantidad de molibdeno (unidades),* X_2
A	11	3	6
B	9	2	5
C	16	4	8
D	12	3	7

Considere que la ecuación de regresión múltiple es: $Y' = -0.5 + 2X_1 + 1X_2$.

1. Con base en la ecuación, ¿cuál es la resistencia pronosticada a la tensión de un alambre de acero que tenga un diámetro exterior de 3.5 cm y 6.4 unidades de molibdeno?
2. Explique qué significa el valor b_1 en la ecuación.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. El director de mercadotecnia de una compañía está estudiando las ventas mensuales en las seis regiones de la empresa. Se seleccionaron tres variables independientes para pronosticar las ventas: población regional, ingreso per cápita y tasa regional de desempleo. Se calculó que la ecuación de regresión es (en dólares):

$$Y' = 64\,100 + 0.394X_1 + 9.6X_2 - 11\,600X_3$$

   a. ¿Cuál es el nombre completo de la ecuación?
   b. Explique qué significa el número 64 100.
   c. ¿Cuál es el total estimado de ventas mensuales para la región IV? (Tal región tiene una población de 796 000 y un ingreso per cápita de $ 6 940 y la tasa de desempleo es de 6.0%.

2. En Thompson Machine Works se adquirieron varias máquinas nuevas muy complejas. En el departamento de producción se necesitó cierta guía con respecto a la capacitación necesaria del operario. ¿Es la edad un factor? ¿Es importante el tiempo de servicio como operador de máquina? A fin de explorar aún más los factores necesarios para pronosticar el desempeño con las nuevas máquinas, se enlistaron cuatro.

X_1 = Tiempo durante el cual el empleado ha sido operador de máquina.

X_2 = Puntuación en la prueba de aptitudes mecánicas.

X_3 = Puntuación anterior en el trabajo.

X_4 = Edad.

El desempeño en la nueva máquina se denota por Y.

Se seleccionaron al azar 12 operarios, se recolectaron datos para cada uno y se registró su desempeño en las nuevas máquinas. Algunos de los resultados son:

Nombre	*Desempeño en la nueva máquina,* Y	*Tiempo como operador,* X_1	*Puntuación en aptitudes mecánicas,* X_2	*Desempeño anterior en el trabajo,* X_3	*Edad* X_4
Andy Kosin	112	12	312	121	52
Sue Annis	113	2	380	123	27

Suponga que la ecuación es:

$$Y' = 11.6 + 0.4X_1 + 0.286X_2 + 0.112X_3 + 0.002X_4$$

a. ¿Cuál es el nombre completo de la ecuación?
b. ¿Cuántas variables dependientes hay? ¿Cuántas variables independientes?
c. ¿Cómo se denomina al número 0.286?
d. Conforme la edad aumenta en un año, ¿en cuánto se eleva el desempeño estimado en la nueva máquina?
e. Carl Knox solicitó trabajar en una de las nuevas máquinas. Ha sido operador de máquina durante seis años, y alcanzó una puntuación de 280 en la prueba de aptitudes mecánicas. Tiene una puntuación de 97 en su desempeño anterior en el trabajo, y 35 años. Estime el desempeño de Carl en la nueva máquina.

3. Se estudió una muestra de personas senectas viudas para determinar su grado de satisfacción en su vida actual. Se utilizó un índice especial, denominado índice de satisfacción, para medir esta cualidad. Se estudiaron seis factores que son: edad en el momento del primer matrimonio (X_1), ingreso anual (X_2), número de hijos vivos (X_3), valor de los bienes poseídos (X_4), estado de salud expresado como índice (X_5) y número promedio de actividades sociales por semana, como jugar al boliche, bailar y asistir a reuniones (X_6). Supóngase que la ecuación de regresión múltiple es:

$$Y' = -16.24 + 0.017X_1 + 0.0028X_2 + 42X_3 + 0.0012X_4 + 0.19X_5 + 26.8X_6$$

a. ¿Cuál es el índice estimado de satisfacción de una persona que se casó por primera vez a los 18, tiene un ingreso anual de $ 26 500 (dólares), tres hijos vivos, bienes por $156 000 (dólares), un índice de estado de salud de 141, y 2.5 actividades sociales por semana en promedio?
b. ¿Qué proporcionaría más satisfacción: un ingreso adicional de $10 000 al año, o dos actividades sociales más por semana?

4. Cellulon, fabricante de un nuevo tipo de aislantes térmicos para casas, desea desarrollar lineamientos para constructores y consumidores en lo que se refiere a los efectos 1) del grueso del aislante en el desván de una casa, y 2) de la temperatura exterior en el consumo de gas natural. En el laboratorio se variaron el espesor del aislamiento y la temperatura. Algunos de los resultados son:

Consumo mensual de gas natural (pies cúbicos), Y	*Espesor del aislamiento (pulgadas),* X_1	*Temperatura exterior (Fahrenheit),* X_2
30.3	6	40
26.9	12	40
22.1	8	49

Con base en los resultados muestrales, la ecuación de regresión es:

$$Y' = 62.65 - 1.86X_1 - 0.52X_2$$

a. ¿Cuánto gas natural esperan consumir los dueños de casa al mes, si 1) instalan aislamiento de 6 pulg de grueso, y 2) la temperatura exterior es de 40° F?
b. ¿Qué efecto tendría sobre el consumo mensual de gas natural instalar 7 pulg de aislante en vez de 6 (considerando que la temperatura exterior permanece en 40° F)?
c. ¿Por qué son negativos los coeficientes de regresión b_1 y b_2? ¿Es esto lógico?

ERROR ESTANDAR MULTIPLE DE LA ESTIMACION

Volviendo al ejemplo de las ventas semanales, se determinó que un solicitante con una puntuación de 6.0 en la prueba y una puntuación de desempeño de 3.8 en la fase 1 del programa de entrenamiento debería tener ventas semanales de $8 575. Resulta obvio que en algunas semanas las ventas serán de más de esta cantidad, y en algunas otras, menores. El error en esta estimación puede medirse por medio del *error estándar múltiple de la estimación,* denotado por $s_{y \cdot 12}$. (Los subíndices indican que se consideran dos variables independientes para estimar Y.)

Recuérdese del capítulo 14 que el error estándar de la estimación en el análisis de regresión mide la variación con respecto a la recta. De manera semejante, el error estándar de la estimación en el análisis de regresión múltiple mide el error para valores de Y con respecto al plano de regresión si intervienen dos variables independientes. Obsérvese que la fórmula es casi igual a la utilizada en el caso simple:

$$\boxed{s_{y \cdot 12} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y')^2}{n - k - 1}}}$$

en donde n es el número de observaciones, y k es el número de las variables *independientes.*

Se utiliza como ejemplo el problema de ventas semanales. El primer vendedor seleccionado al azar fue el Sr. Amber. Su puntuación en la prueba fue 4; esto es X_1. Su calificación de desempeño fue 2; esto es X_2. Sus ventas estimadas (Y') son

$5 350, obtenidas por $Y' = 3.5 + (-0.975)4 + 2.875(2) = 5.35$ (en miles de dólares). Las ventas, ventas estimadas y los cálculos necesarios para determinar el error estándar se proporcionan en la tabla 15-2. Ahí se muestra que las ventas semanales reales de Amber tuvieron un total de $5 000, pero sus ventas pronosticadas fueron $5 350. De esta forma, el error de pronóstico o **residual** es de – $350, obtenido al calcular $Y - Y'$, o sea, $5 000 – $5 350.

TABLA 15-2

Cálculos necesarios para obtener el error estándar múltiple de la estimación

Vendedor	*Puntuación de prueba,* X_1	*Calificación de desempeño,* X_2	*Ventas semanales (miles de dólares),* Y	*Ventas semanales pronosticadas (miles de dólares),* Y'	$(Y - Y')$	$(Y - Y')^2$
Sr. Amber	4	2	$ 5	$ 5.35	$– 0.35	0.1225
Sr. Archer	7	5	12	11.05	0.95	0.9025
Sra. Smith	3	1	4	3.45	0.55	0.3025
Sr. Malcolm	6	4	8	9.15	– 1.15	1.3225
Sra. Goodwin	10	6	11	11.00	0.00	0.0000
					$ 0.00*	2.6500

* Debe ser igual a 0.

En este problema, $n = 5$ (cinco vendedores) y $k = 2$ (dos variables independientes). Al evaluar el error estándar múltiple de la estimación resulta:

$$s_{y \cdot 12} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y')^2}{n - k - 1}} = \sqrt{\frac{2.65}{5 - 2 - 1}} = 1.151 \text{(en miles de dólares)}$$

El error estándar de la estimación calculado en el capítulo 5, que comprende sólo ventas y puntuaciones de prueba, fue $1 955. Al tener una variable independiente adicional (calificación de desempeño) se redujo a $1 151 el error al hacer un pronóstico. Desde luego, esto significa que agregar una segunda variable independiente hizo que los pronósticos de ventas fueran más precisos.

Interpretación Si las ventas semanales se distribuyen en forma normal con respecto al plano de regresión múltiple, aproximadamente 68% de las ventas se encontrarán dentro de $1 151 de su valor estimado Y'. Así, 95.5% de las ventas semanales estarán dentro de $2s_{y \cdot 12}$, esto es, dentro de 2 ($1 151) del valor Y' pronosticado por la ecuación. Además, aproximadamente 99.7% de las ventas estarán dentro de $\pm 3s_{y \cdot 12}$.

En el capítulo 14 se utilizó el error estándar de la estimación para establecer intervalos de confianza. El procedimiento para determinar esos intervalos en el caso de regresión múltiple, es muy parecido al seguido en la regresión simple y no se expondrá en detalle aquí.

AUTOEXAMEN 15-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

La ecuación de regresión múltiple para el ejercicio 4 se dio como $Y' = 62.65 - 1.86X_1 - 0.52X_2$, en donde X_1 es la cantidad de aislante instalado en el desván y X_2 es la temperatura exterior.

1. Para una casa en la que se instalan 8 pulg de aislante y hay una temperatura exterior de 45° F, ¿cuál es el consumo estimado de gas natural?
2. Para una casa, que tiene 8 pulg de aislante y una temperatura de 45° F, el consumo real de gas natural fue de 22.0 pies cúbicos. ¿Cuál es la diferencia entre el consumo real y la mejor estimación de consumo de gas natural para tal casa? ¿Cómo se denomina a esta diferencia?

Consideraciones acerca de la regresión y la correlación múltiples

Antes de iniciar el análisis de la correlación múltiple, enlistaremos las consideraciones básicas, tanto de la regresión múltiple como de la correlación múltiple. Según se observó en varios de los capítulos anteriores, es necesario identificar las consideraciones porque si no se cumplen por completo, los resultados podrían presentar un sesgo. Por ejemplo, al seleccionar una muestra, se considera que todos los elementos de la población tienen posibilidad de ser seleccionados. Si la investigación se relaciona con todas las personas que esquían, pero no se toman en cuenta a aquellas de más de 40 años porque consideramos que son "demasiado grandes", estaríamos sesgando las respuestas hacia los esquiadores más jóvenes. Sin embargo, debe mencionarse que en la práctica real, apegarse en forma estricta a las siguientes consideraciones no siempre es posible en los problemas de regresión y correlación múltiples, relacionados con el cambiante medio de la administración. Pero las técnicas estadísticas que se analizan en este capítulo parecen funcionar bien, aun cuando una o más de las consideraciones que siguen no se tomen en cuenta. Aun si los valores en la ecuación de regresión múltiple quedan "fuera" ligeramente, las estimaciones basadas en la ecuación serán más cercanas que cualquier otra estimación que pudiera realizarse.

Cada una de las consideraciones que siguen se analizarán con más detalle conforme se avance en el capítulo.

1. Las variables independientes y la variable dependiente tienen una relación lineal o en línea recta.
2. La variable dependiente debe ser continua y al menos de nivel de intervalo.
3. La variación en la diferencia entre los valores real y pronosticado debe ser la misma para todos los valores ajustados de Y. Esto es, $(Y - Y')$ debe ser aproximadamente igual para todos los valores de Y'. Cuando tal sea el

caso, las diferencias presentan **homoscedasticidad.** Además, los residuos, calculados por $Y - Y'$, deben estar distribuidos en forma normal con media 0.

4. Las observaciones sucesivas de la variable dependiente no deben estar correlacionadas. Si tal consideración no se cumple, la situación se denomina **autocorrelación.** La autocorrelación ocurre con frecuencia cuando se recopilan datos durante períodos o intervalos de tiempo.
5. Las variables independientes no deben estar muy correlacionadas. Cuando las variables independientes sí lo están, la situación se conoce como **multicolinealidad.**

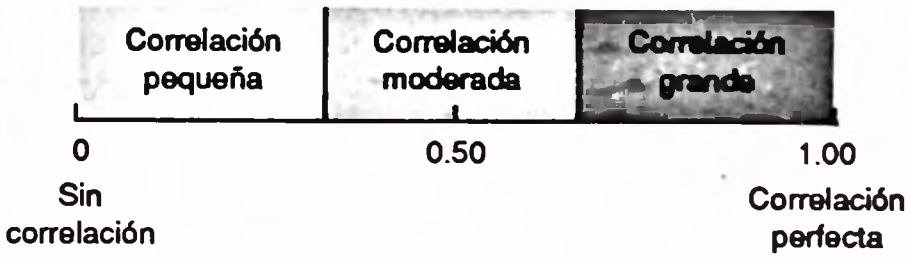
ANALISIS DE CORRELACION MULTIPLE

Para describir la relación entre las variables dependiente e independiente en el análisis de correlación múltiple, se utilizan los mismos tres coeficientes mencionados en el análisis de correlación simple (capítulo 13). Estos son, el *coeficiente de correlación múltiple,* el *coeficiente de determinación múltiple* y el *coeficiente de no determinación múltiple.*

Coeficiente de correlación múltiple

Coeficiente de correlación múltiple Medida de la fuerza de la asociación entre la variable dependiente y dos o más variables independientes.

El coeficiente de correlación múltiple puede tomar cualquier valor entre 0 y + 1.00 inclusive, y se denota por R. La R múltiple siempre es positiva. Un coeficiente de 0.94 indica una asociación muy fuerte entre las variables dependiente e independiente. Un coeficiente de 0.09 revela una relación muy débil.



Coeficiente de determinación múltiple

El coeficiente de correlación múltiple permite decir que el coeficiente 0.94 indica una asociación "muy grande" entre las variables dependiente e independiente. Una medida más significativa y precisa de la asociación es el *coeficiente de determinación múltiple,* R^2. (Obsérvese que se obtiene al elevar al cuadrado el coeficiente de correlación múltiple.) Es obvio que si conocemos el coeficiente de determinación múltiple, R^2, el coeficiente de correlación R puede obtenerse tomando su raíz cuadrada.

Coeficiente de determinación múltiple Proporción (porcentaje) de la variación total en la variable dependiente Y que se explica por medio del conjunto de variables independientes.

Coeficiente de no determinación múltiple

Es lógico que el *coeficiente de no determinación múltiple* mida la proporción de la variación total en la variable dependiente Y, que *no* se debe a las variables independientes. Se obtiene por $1 - R^2$.

✱ Ejemplo

En el ejercicio 4 se expuso la relación entre la cantidad de gas natural consumida (Y) y dos variables independientes: grueso del aislamiento en el desván y temperatura exterior. Supóngase que el coeficiente de determinación múltiple se calcula como 0.81.

1. Interprete el coeficiente de determinación múltiple.
2. ¿Cuál es el coeficiente de no determinación? Interprételo.
3. ¿Cuál es el coeficiente de correlación múltiple? Interprételo.
4. Las dos variables independientes no explican toda (100%) la variación en el consumo de gas natural. ¿Qué otros factores podrían estar afectando el uso de gas natural?

✔ Solución

1. De la variación en el consumo de gas natural, 81% se explica debido al grueso del aislamiento en el desván y la temperatura exterior.
2. Por tanto, 19% de la variación en el consumo de gas natural *no* se explica debido al espesor del aislamiento y a la temperatura exterior: $1 - R^2 = 1 - 0.81 = 0.19$.
3. 0.90, obtenido por $\sqrt{0.81}$. Esto indica una asociación muy grande entre el consumo de gas natural y las dos variables independientes (espesor del aislamiento y temperatura exterior).
4. El número de veces por mes que se abren y cierran las puertas exteriores y la fuerza del viento pueden ser otros de los factores que afecten el consumo de gas.

Tabla ANOVA

Según se mencionó antes, los cálculos relacionados con la regresión múltiple son laboriosos. Por fortuna, se dispone de muchos programas para computadora. La mayoría dan salida a la información en un formato estandarizado. El listado que sigue, proveniente del sistema MINITAB para los datos de ventas semanales de la tabla 15-1, es representativo. Incluye la ecuación de regresión y la tabla de análisis

de variancia. Se ha descrito el significado de los términos de la ecuación de regresión $Y' = 3.500 - 0.9750X_1 + 2.875X_2$. Más adelante se analizarán las columnas "Coef", "Stdev" y "t-ratio".

```
MTB > set c1
DATA> 5,12,4,8,11
DATA> end
MTB > set c2
DATA> 4,7,3,6,10
DATA> end
MTB > set c3
DATA> 2,5,1,4,6
DATA> end
MTB > name c1 'sales' c2 'score' c3 'rating'
MTB > regr c1 2 c2 c3

The regression equation is
sales =3.50 - 0.975 score + 2.87 rating

Predictor        Coef      Stdev    t-ratio
Constant        3.500      1.628       2.15
score         -0.9750     0.8439      -1.16
rating          2.875      1.115       2.58

s = 1.151    R-sq = 94.7%      R-sq(adj) = 89.4%

Analysis of Variance

SOURCE       DF        SS        MS
Regression    2    47.350    23.675
Error         2     2.650     1.325
Total         4    50.000
```

Ahora nos dedicaremos a estudiar la tabla ANOVA. ¿Cómo se calcula? Es semejante a la tabla ANOVA descrita en el capítulo 12. En tal capítulo la variación estaba dividida en dos componentes. La debida a los *tratamientos* y la correspondiente al *error* aleatorio. Aquí la variación total también está dividida en dos componentes: la que es explicada por la regresión (las variables independientes), y el error, o variación no explicada. Estas dos categorías (regresión y error) se indican en la columna titulada SOURCE (fuente). La columna con el encabezado DF indica los grados de libertad. En este ejemplo hay cinco observaciones, de manera que $n = 5$. El número *total* de grados de libertad es $n - 1$. En este caso $n - 1 = 5 - 1 = 4$ grados de libertad. Los grados de libertad en el renglón "regresión" de la tabla ANOVA es igual al número de variables independientes. Se utiliza k para representar el número de variables independientes, de manera que $k = 2$. Los grados de libertad en el renglón "error" son $n - (k + 1) = 5 - (2 + 1) = 2$ grados de libertad.

El término SS (columna central de la tabla ANOVA) se refiere a la suma de cuadrados o variación. Tales términos se calculan como sigue:

Variación total = total SS = $\Sigma(Y - \overline{Y})^2 = 50.00$
Variación en el error = SSE = $\Sigma(Y - Y')^2 = 2.650$
Variación en la regresión = SSR = total SS − SSE = 50.000 − 2.650 = 47.350

La columna de la derecha, con el encabezado MS (de mean square = cuadrado medio) se obtiene al dividir el término SS entre el término DF. De manera que MSR, regresión cuadrada media, la determina SSR/k, y MSE por SSE/[$n - (k + 1)$].

Por tanto, el formato general del análisis de la tabla de variancia es:

Fuente	*df*	*SS*	*MS*
Regresión	k	SSR	MSR = SSR / k
Error	$n - (k + 1)$	SSE	MSE = SSE / [$n - (k + 1)$]
Total	$n - 1$	total SS	

Puede llegarse al coeficiente de determinación múltiple, R^2, a partir de la tabla ANOVA. Recuérdese que el coeficiente de determinación es el porcentaje de la variación explicado por la regresión. Es la variación explicada por la regresión dividida entre la variación total.

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SS total}} = \frac{47.350}{50.000} = 0.947$$

Este procedimiento se analizó con profundidad hacia el final del capítulo 14. El error estándar múltiple de la estimación también puede obtenerse directamente a partir de la tabla de análisis de variancia:

$$S_{y \cdot 12} = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n - (k + 1)}} = \sqrt{\frac{2.650}{5 - (2 + 1)}} = 1.151$$

El cálculo del error estándar de la estimación a partir de la tabla ANOVA también se examinó casi al final del capítulo 14. Estos valores, $R^2 = 0.947$ y $s_{y \cdot 12} = 1.151$, se incluyen en el listado MINITAB precedente.

APLICACION POR COMPUTADORA

Para citar un ejemplo del uso de la regresión y correlación múltiples, y mostrar la aplicación universal de una computadora en la solución de problemas, ampliaremos un ejercicio anterior. Supóngase que una gran empresa de bienes raíces desea desarrollar algunos lineamientos para posibles compradores de casas unifamiliares pequeñas que ofrece la empresa. Una de las preguntas más comunes que plantean los posibles compradores es: ¿si adquiriéramos esta casa, cuánto tendríamos que pagar aproximadamente por calefacción durante los meses de invierno? El agente consideró cuatro variables importantes en el pronóstico de los costos de calefacción:

1) temperatura exterior mínima diaria promedio, 2) número de pulgadas de aislante en el desván, 3) número de ventanas de la casa y 4) antigüedad del calefactor.

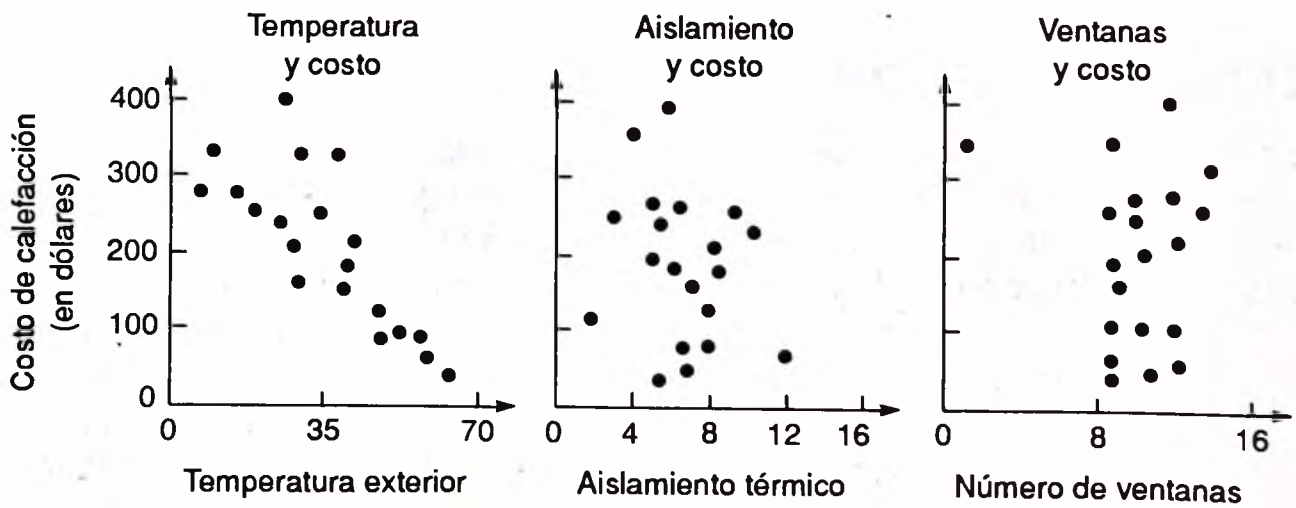
El agente hizo que 20 oficinas locales, en diferentes partes del país, recolectaran información acerca de las casas pequeñas que tienen en sus listas para ventas (véase la tabla 15-3).

TABLA 15-3

Costo de calefacción y otras características de casas pequeñas

Casa pequeña	*Costo de calefacción (en dólares), Y*	*Temperatura exterior mínima, X_1*	*Pulgadas de aislante, X_2*	*Número de ventanas, X_3*	*Antigüedad del calefactor, X_4*
1	250	35	3	10	6
2	360	29	4	1	10
3	165	36	7	9	3
4	43	60	6	8	9
5	92	65	5	8	6
6	200	30	5	9	5
7	355	10	6	14	7
8	290	7	10	9	10
9	230	21	9	11	11
10	120	55	2	9	5
11	73	54	12	11	4
12	205	48	5	10	1
13	400	20	5	12	15
14	320	39	4	10	7
15	72	60	8	8	6
16	272	20	5	10	8
17	94	58	7	10	3
18	190	40	8	11	11
19	235	27	9	14	8
20	139	30	7	9	5

Hay cuatro variables independientes, denotadas por X_1, X_2, X_3 y X_4. La variable dependiente, costo de la calefacción, es Y. Para visualizar la relación entre algunas de las variables independientes y la variable dependiente (costos), se han trazado diagramas de dispersión.



De las tres variables independientes mostradas, parece que existe la correlación más fuerte entre la temperatura exterior mínima y el costo de la calefacción. Observando la dispersión más amplia, podría llegarse a la conclusión de que prácticamente no existe relación entre el número de ventanas de la casa y el costo de la calefacción.

Matriz de correlación

Como primer paso en el análisis de los factores relacionados con el costo de calentar una casa, se desarrolla una **matriz de correlación.** Tal matriz muestra los coeficientes simples de correlación entre todas las variables. El listado de MINITAB es como sigue:

```
MTB > C1 - C5

                cost       temp      insul     window
temp          -0.812
insul         -0.257     -0.103
window         0.097     -0.256      0.307
age            0.537     -0.486      0.064      0.030
```

El costo es la variable dependiente, Y. En especial interesa saber qué variable independiente tiene la correlación más grande con el costo. Según se indica en el listado, la temperatura tiene la correlación más grande (– 0.812) con el costo. El signo negativo indica que conforme aumenta la temperatura, el costo de calentar una casa disminuye. La variable independiente X_3, número de ventanas, tiene una asociación muy pequeña con el costo (0.097). Es probable que esta variable se elimine de análisis posteriores.

Un segundo uso de la matriz de correlación es para verificar si existe multicolinealidad. La multicolinealidad ocurre cuando las variables independientes están correlacionadas entre sí. Esto distorsiona el error estándar de la estimación y puede llegar a conclusiones incorrectas referentes a qué variables son significativas y cuáles no. En este ejemplo, la correlación entre la antigüedad del calefactor y la temperatura exterior es – 0.486. Este valor no es lo suficientemente grande para provocar problemas. Una regla práctica común es que las correlaciones entre las variables independientes menores de 0.70 o – 0.70, no ocasionan problemas.

PRUEBA GLOBAL: DETERMINACION DE LA VALIDEZ O NO VALIDEZ DEL MODELO DE REGRESION MULTIPLE

Puede probarse la capacidad general de las variables independientes $X_1, X_2 \ldots X_k$ para explicar el comportamiento de la variable dependiente Y. Para plantear lo anterior en forma de pregunta: ¿puede la variable dependiente ser estimada sin

apoyarse en las variables independientes? La prueba utilizada se conoce como *prueba global.* Básicamente, investiga si todas las variables independientes tienen coeficientes netos de regresión iguales a cero. Planteado de otra forma, ¿podría la cantidad de variación explicada, R^2, ocurrir al azar ?

A fin de relacionar esta pregunta con el problema de costo de calefacción, probaremos si las variables independientes (cantidad de aislante en el desván, temperatura mínima diaria, antigüedad del calefactor y número de ventanas) son capaces de pronosticar los costos de calefacción de una casa.

Recuérdese que al probar una hipótesis, primero planteamos las hipótesis nula y alternativa. En el problema de costo de calefacción, existen cuatro variables independientes. Recuérdese que b_1, b_2, b_3 y b_4 son coeficientes muestrales de regresión neta. Los coeficientes correspondientes en la población tienen los símbolos β_1, β_2, β_3 y β_4. Ahora probamos si los coeficientes netos de regresión en la población valen cero. La hipótesis nula es

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$$

La hipótesis alternativa es

$$H_1 : \text{No todos los } \beta \text{ son } 0.$$

Si la hipótesis nula es verdadera, ello implica que los coeficientes de regresión son todos cero y, lógicamente, no son de utilidad al pronosticar la variable dependiente (costo de calefacción). Si este fuera el caso, se tendrían que buscar algunas otras variables independientes (o adoptar un enfoque distinto) para pronosticar los costos de calefacción de una casa.

Para probar la hipótesis nula de que los coeficientes de regresión múltiple son todos cero, se aplica la prueba F presentada en el capítulo 12, Análisis de variancia. Se utilizará el nivel 0.05 de significación. Recuérdense las siguientes características de la distribución F:

1. Tiene sesgo positivo, con el valor crítico para el nivel 0.05 localizado en la cola de la derecha. El valor crítico es el punto que separa la región de aceptación de la de rechazo.
2. Se elabora conociendo el número de grados de libertad en el numerador y el número de grados de libertad en el denominador.

Los grados de libertad para el numerador y el denominador pueden localizarse en el resumen por computadora. Esa parte de la tabla se incluye a continuación. El número superior en la columna marcada DF es 4, lo que indica que hay cuatro grados de libertad en el numerador. El número medio en dicha columna (15) indica que hay 15 grados de libertad en el denominador. El número 15 se obtiene por $n - (k + 1) = 20 - (4 + 1) = 15$. El número 4 corresponde al número de variables independientes.

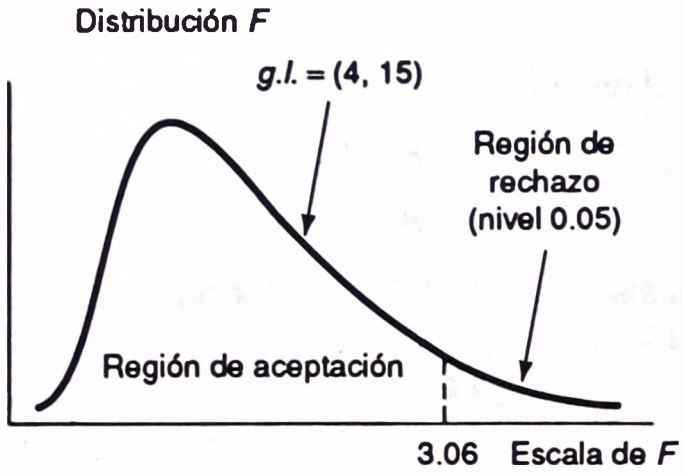
Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS
Regression	4	171227	42807 = MSR
Error	15	41689	2779 = MSE
Total	19	212916	

El valor de F se calcula dividiendo el término MSR entre el MSE.

$$F = \frac{\dfrac{\text{SSR}}{k}}{\dfrac{\text{SSE}}{n - (k + 1)}} = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = \frac{42807}{2779} = 15.40$$

El valor crítico de F se obtiene a partir del apéndice G. Utilizando la tabla para el nivel 0.05, se va en dirección horizontal hasta 4 grados de libertad en el numerador, se lee hacia abajo hasta llegar a 15 grados de libertad en el denominador y se llega al valor crítico, que es 3.06. En el diagrama que sigue se muestran las regiones de aceptación y de rechazo.



Continuando con la prueba global, la regla de decisión es: aceptar la hipótesis nula de que todos los coeficientes de regresión son 0 si el valor calculado de F es menor que o igual a 3.06. Si la F calculada es mayor que 3.06, se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_1.

El valor calculado de F es 15.40, que está en la región de rechazo. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula de que todos los coeficientes de regresión múltiples son cero. La hipótesis alternativa se acepta, lo que indica que no todos los coeficientes de regresión son nulos. Desde un punto de vista práctico, esto significa que las variables independientes (cantidad de aislante, etc.) tienen la capacidad de explicar la variación en la variable dependiente (costo de la calefacción). Se esperaba esta decisión. Es lógico que la temperatura exterior, la cantidad de aislante, etc., tengan mucho que ver con los costos de calefacción. La prueba global nos asegura que así es.

Evaluación de los coeficientes individuales de regresión

En el problema del costo de calefacción, se mostró que algunos de los coeficientes de regresión, pero no necesariamente todos, no son iguales a cero. El siguiente paso consiste en probar las variables *individualmente* para determinar cuáles no son cero. Si hay coeficientes para los cuales H_0 no puede rechazarse, se considerará su eliminación de la ecuación de regresión. En realidad, probaremos cuatro hipótesis.

Para la temperatura:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Para el aislante:

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

Para el número de ventanas:

$$H_0 : \beta_3 = 0$$
$$H_1 : \beta_3 \neq 0$$

Para la antigüedad del calefactor:

$$H_0 : \beta_4 = 0$$
$$H_1 : \beta_4 \neq 0$$

Se probará la hipótesis al nivel 0.05. La forma como se enuncia la hipótesis alternativa indica que la prueba es de dos colas.

El estadístico de prueba es la distribución t de Student con $n - (k + 1)$ grados de libertad. El número de observaciones muestrales es n, y hay 20 casas en el estudio, de manera que $n = 20$. El número de variables independientes es k, que en este caso corresponde a 4. De modo que hay $n - (k + 1) = 20 - (4 + 1) = 15$ grados de libertad.

El valor crítico para t se presenta en el apéndice F. Para una prueba de dos colas, con 15 grados de libertad y utilizando el nivel de significación 0.05, se rechaza H_0 si t es menor que -2.131 o mayor que 2.131. El sistema MINITAB da el resultado que se muestra en la parte superior de la página siguiente.

La columna con el encabezado Coef da la ecuación de regresión múltiple:

$$Y' = 424.74 - 4.5719X_1 - 14.906X_2 + 0.244X_3 + 6.126X_4$$

Interpretación del término $-4.5719X_1$ en la ecuación: por cada grado que aumente la temperatura, se espera que el costo de calefacción disminuya aproximadamente en \$4.57, considerando constantes las otras tres variables.

La columna en el listado MINITAB, con el encabezado "Stdev", indica la des-

```
The regression equation is
cost = 425 - 4.57 temp - 14.9 insul + 0.24 window + 6.13 age

Predictor        Coef        Stdev      t - ratio     p - value
Constant       424.74      79.23%        5.36          0.000
temp          -4.5719      0.8272       -5.53          0.000
insul         -14.906      5.140        -2.90          0.011
window          0.244      4.953         0.05          0.961
age             6.126      4.175         1.47          0.163

s = 52.72      R - sq =80.4%      R - sq (adj) =75.2%
```

viación estándar del coeficiente de regresión muestral. Recuérdese que se seleccionó una muestra de costos de calefacción en distintas partes del país. Si se fuera a seleccionar una segunda muestra aleatoria y se calcularan los coeficientes de regresión de tal muestra, los valores no serían exactamente iguales. Sin embargo, si repitiéramos el proceso de muestreo muchas veces sería posible diseñar una distribución muestral de los coeficientes de regresión. La columna marcada Stdev contiene la estimación de la variabilidad de estos coeficientes de regresión. La distribución muestral de Coef/Stdev sigue la distribución t con $n - (k + 1)$ grados de libertad. Por tanto, pueden probarse individualmente las variables independientes para determinar si difieren de cero los coeficientes netos de regresión. La razón t calculada es – 5.53 para la temperatura y – 2.90 para el aislante. Estos dos valores t están en la región de rechazo, a la izquierda de – 2.131. Entonces se llega a la conclusión de que los coeficientes de regresión para las variables temperatura y aislamiento *no* son iguales a cero. Las razones t calculadas para el número de ventanas (0.05) y la antigüedad del calefactor (1.47) están en la región de aceptación entre 0 y 2.131. Por tanto, estas dos variables independientes no son elementos significativos de pronóstico. En el capítulo 11 se describió la forma como se utiliza un valor p para identificar la fuerza del rechazo. En este listado también se presentan valores p. El valor 0.011 en la columna de valores p y en el renglón de aislamiento es la probabilidad de dos colas de un valor t menor que – 2.90 o mayor que 2.90. En resumen, se recomienda eliminar del estudio las variables independientes, número de ventanas y antigüedad del calefactor y conservar las variables temperatura y aislamiento.

Volviendo al problema del costo de la calefacción, las variables temperatura y aislamiento explicaron el 77.6% de la variación en dicho costo. Utilizando las cuatro variables (temperatura, aislamiento, ventanas y antigüedad) se explicó un total de 80.4% de la variación. Las dos variables adicionales incrementaron R^2 en sólo 2.8%, un incremento muy pequeño para la adición de dos variables independientes. Probablemente no valga la pena contar las ventanas de una casa y determinar la antigüedad del calefactor, ya que estos dos factores explican muy poco de la variación en el costo mencionado.

AUTOEXAMEN 15-3

Las respuestas se dan al final del capítulo

Los datos de regresión y correlación múltiple para el problema anterior de costo de calefacción se volvieron a correr en la computadora, utilizando sólo las dos variables independientes significativas: temperatura y aislamiento. (Véase el listado MINITAB.)

1. ¿Cuál es la nueva ecuación de regresión múltiple? (La temperatura es X_1 y el aislamiento X_2).
2. ¿Qué es el coeficiente de determinación múltiple? Interprételo.
3. ¿Qué es el coeficiente de no determinación? Interprételo.
4. ¿Cómo se puede expresar que estas dos variables independientes son valiosas para pronosticar los costos de calefacción?
5. ¿Qué es el valor p correspondiente al aislamiento? Interprételo.

```
The regression equation is
cost = 490 - 5.15 temp - 14.7 insul

Predictor        Coef        Stdev     t-ratio     p-value
Constant       490.29        44.41       11.04       0.000
temp          -5.1499       0.7019      -7.34       0.000
insul         -14.718        4.934      -2.98       0.008

s = 52.98        R-sq = 77.6%        R-sq(adj) = 74.9%

Analysis of Variance

SOURCE        DF        SS        MS        F      p-value
Regression     2    165195     82597    29.42       0.000
Error         17     47721      2807
Total         19    212916
```

Variables cualitativas en la regresión

Hasta ahora las variables utilizadas para estimar el costo de calentar una casa han sido **cuantitativas**; esto es, su naturaleza ha sido numérica. En ocasiones se desea utilizar variables cuya naturaleza no es numérica. A tales variables se les denomina **variables cualitativas** o **variables ficticias**.

Por ejemplo, podría ser de interés estimar el sueldo de un ejecutivo con base en los años de experiencia en el trabajo y el que tenga o no un título universitario. Se presupone que un graduado ganará un sueldo mayor que alguien que no se graduó. El tener un título universitario puede ser sólo una de dos condiciones: sí o no. De esta forma se considera como variable cualitativa.

Suponga que en el estudio de costo de calefacción se agrega la variable independiente "pisos". Para las casas de un piso se utiliza 0, para casas con dos, se utiliza 1. Considérese que todas las casas del estudio tienen uno o dos pisos.

Se denotará la variable "pisos" como X_5. Los datos provenientes de la tabla 15-4 se introducen en el sistema MINITAB.

TABLA 15-4

Costos de calefacción, temperatura, aislamiento y número de pisos de una muestra de 20 casas

Costo, Y	*Temperatura,* X_1	*Aislamiento,* X_2	*Pisos,* X_5
250	35	3	0
360	29	4	1
165	36	7	0
43	60	6	0
92	65	5	0
200	30	5	0
355	10	6	1
290	7	10	1
230	21	9	0
120	55	2	0
73	54	12	0
205	48	5	1
400	20	5	1
320	39	4	1
72	60	8	0
272	20	5	1
94	58	7	0
190	40	8	1
235	27	9	0
139	30	7	0

El listado de MINITAB es:

```
MTB > NAME C6 'STORIES'
MTB > REGR C1 3 C2 C3 C6

The regression equation is
cost = 394 - 3.96 temp - 11.3 insul + 77.4 stories

Predictor        Coef      Stdev    t - ratio    p - value
Constant       393.67      45.00       8.75        0.000
temp         -3.9628     0.6527      -6.07        0.000
insul        -11.334      4.002      -2.83        0.012
stories        77.43      22.78       3.40        0.004

s = 41.62        R - sq = 87.0%        R - sq(adj) = 84.5%

Analysis of Variance

SOURCE       DF        SS        MS        F     p - value
Regression    3    185202     61734    35.64       0.000
Error        16     27713      1732
Total        19    212916
```

¿Cuál es el efecto de la variable "pisos"? ¿Debe incluirse en el análisis? Para mostrar el efecto de la variable, supóngase que se trata de una casa de un piso y una casa de dos pisos, una junto a la otra. Ambas casas tienen 3 pulg de aislamiento y la temperatura media en enero es 20°F. Para la casa de un solo piso, X_5 se sustituye por 0 en la ecuación de regresión. El costo estimado de calefacción es $280.90, obtenido por

$$\begin{aligned} Y' &= 394 - 3.96X_1 - 11.3X_2 + 77.4X_5 \\ &= 394 - 3.96(20) - 11.3(3) + 77.4(0) = 280.90 \end{aligned}$$

Para la casa de dos pisos, X_5 se sustituye por 1 en la ecuación de regresión. El costo estimado de calefacción es $ 358.30, que resulta de

$$\begin{aligned} Y' &= 394 - 3.96X_1 - 11.3X_2 + 77.4X_5 \\ &= 394 - 3.96(20) - 11.3(3) + 77.4(1) = 358.30 \end{aligned}$$

La diferencia entre los costos estimados de calefacción es $77.40 (de $358.30 – $280.90). Por tanto, es de esperar que el costo de calentar una casa de dos pisos sea $77.40 mayor que el costo para una casa equivalente de un solo piso.

Se ha mostrado que la diferencia entre los dos tipos de casas es $77.40, ¿pero es significativa esta diferencia? Se realiza la siguiente prueba de hipótesis.

$$H_0 : \beta_5 = 0$$

$$H_1 : \beta_5 \neq 0$$

La información necesaria para responder la pregunta anterior puede encontrarse en el listado MINITAB de la página 583. La razón t calculada es 3.40. Hay tres variables independientes en el análisis, de manera que existen $n - (k + 1) = 20 - (3 + 1) = 16$ grados de libertad. Del apéndice F el valor crítico es 2.120. La regla de decisión, utilizando una prueba de dos colas y el nivel de significación 0.05, es rechazar H_0 si la t calculada está a la izquierda de – 2.120 o a la derecha de 2.120. Puesto que el valor calculado de 3.40 está a la derecha de 2.120, se rechaza la hipótesis nula. Se llega así a la conclusión que el coeficiente de regresión no es cero. La variable independiente "pisos" debe incluirse en el análisis.

REGRESION POR PASOS

La ecuación de regresión que desarrollamos para el problema de costo de calefacción incluía tres variables independientes: temperatura promedio mínima, espesor de aislante y número de pisos en la casa. Para obtener esta ecuación, primero se corrió una prueba global para determinar si era significativo cualquiera de los coeficientes de regresión. Cuando resultó que al menos uno era significativo, se probaron después en forma individual los coeficientes a fin de determinar cuáles eran significativos. Se eliminaron los no significativos y se conservaron los otros. Se argumentó que al conservar los coeficientes significativos, se obtuvo la ecuación

de regresión que utilizaba el menor número posible de variables independientes, facilitando interpretar y explicar lo más posible de la variación en la variable dependiente. Ahora se describirá una técnica denominada **regresión por pasos,** que es más eficiente en la elaboración de la ecuación.

En el método por pasos, se desarrolla una secuencia de ecuaciones. La primera contiene sólo una variable independiente. Sin embargo, tal variable independiente es una del conjunto de variables propuestas que explica más de la variación en la variable dependiente. Dicho en otra forma, si se calculan todas las correlaciones simples entre cada variable independiente y la variable dependiente, el método por pasos selecciona la variable independiente que tiene la mayor correlación con la variable dependiente.

A continuación, el método por pasos examina las variables independientes restantes y selecciona la que explicará el mayor porcentaje de la variación que todavía no se ha explicado. Este proceso continúa hasta que se hayan incluido en la ecuación todas las variables independientes con coeficientes de regresión netos significativos. Las ventajas del método por pasos son: 1) En la ecuación sólo se incluyen coeficientes significativos de regresión, 2) se ven con claridad los pasos relacionados con la elaboración de la ecuación, y 3) se muestran los cambios paso a paso en el error estándar de la estimación y en el coeficiente de determinación.

A continuación se presenta el listado MINITAB por pasos para el problema de calefacción. Obsérvese que la ecuación final incluye las mismas tres variables que se obtuvieron utilizando la prueba global precedente. Se han eliminado las variables con coeficientes de regresión no significativos.

```
MTB > STEP C1 C2 – C6

STEPWISE REGRESSION OF COST ON 5 PREDICTORS, WITH N = 20

     STEP          1        2        3
CONSTANT       388.8    300.3    393.7

temp           -4.93    -3.56    -3.96
T - RATIO      -5.89    -4.70    -6.07

stories                    93       77
T - RATIO                3.56     3.40

insul                          -11.3
T - RATIO                      -2.83

S               63.6     49.5     41.6
R - SQ         65.85    80.46    86.98
```

Revisando los pasos: la ecuación de regresión después del primer paso es:

$$Y' = 388.8 - 4.93X_1$$

La variable independiente "temperatura" explica 65.85% de la variación en el costo de calefacción. El error estándar de la estimación es $63.60.

La siguiente variable independiente que se introduce en la ecuación es la variable para el número de pisos. Incluyendo las dos variables independientes "temperatura" y "pasos", el término *R al cuadrado* se incrementa de 65.85% a 80.46%. Esto es, al sumar la segunda variable "pisos", R^2 se incrementó en 14.61 puntos porcentuales. Este incremento es mayor que el incremento que se habría presentado al agregar cualquier otra variable independiente. La ecuación de regresión después del paso 2 es:

$$Y' = 300.3 - 3.56X_1 + 93.0X_5$$

Por lo general, los coeficientes de regresión cambiarán de un paso al siguiente. En este caso el coeficiente para la temperatura ha conservado su signo negativo, pero cambió de – 4.93 a – 3.56. Tal cambio es un reflejo de la influencia agregada de la variable independiente "pisos". ¿Por qué el método por pasos seleccionó la variable pisos en vez de la variable aislamiento? De nuevo, se debe a que el incremento en R^2 (coeficiente de determinación) es mayor si se utiliza la variable pisos que si se emplea la variable aislamiento.

Después del tercer paso la ecuación de regresión es:

$$Y' = 393.7 - 3.96X_1 - 11.3X_2 + 77.0X_5$$

Esta es la misma ecuación que obtuvimos utilizando la prueba global, seguida por la prueba individual para cada uno de los coeficientes de regresión. El valor R^2 es 86.98%, el mismo que se calculó antes. Así, con el método por pasos hemos desarrollado la misma ecuación de regresión y está formada por las mismas variables. Sin embargo, el método por pasos ofrece una ruta más directa hacia la ecuación óptima.

ANALISIS DE RESIDUOS

En una sección anterior describimos las consideraciones básicas necesarias para el análisis de regresión y correlación. Estas consideraciones son:

1. Existe una relación lineal entre la variable dependiente y las variables independientes.
2. La variable dependiente está a nivel de intervalo o de razón.
3. Las variables independientes no están correlacionadas.
4. No están correlacionadas las observaciones sucesivas de la variable dependiente.
5. Las diferencias entre los valores reales y los valores estimados se distribuyen casi en forma normal, y son los mismos para todos los valores estimados.

La última consideración puede verificarse al graficar los **residuos**. Un residuo es la diferencia entre el valor real de Y y el valor pronosticado de Y, esto es $(Y - Y')$.

Residuo Diferencia entre el valor real de Y y el valor pronosticado de Y.

El sistema MINITAB resulta útil para investigar si los residuos se distribuyen en forma normal, y si además tienen una variancia constante con respecto a los valores de Y'. En la tabla 15-5 se presentan los datos necesarios para continuar el análisis del problema de costo de calefacción. En la columna 1 se muestran los costos reales de calefacción, presentados originalmente en la tabla 15-3. En la columna 2 se presenta el valor ajustado o estimado de Y; esto es Y'. El valor Y' puede determinarse sustituyendo los valores reales de las tres variables independientes en la ecuación de regresión. Por ejemplo, el primer valor ajustado es 221.08, obtenido por

$$Y' = 393.67 - 3.96(35) - 11.33(3) + 77.43(0) = 221.08$$

(La diferencia entre 221.08 y el valor 220.964 de la tabla 15-5 se debe al redondeo en el software de computadora.) El residuo en la columna 3 es 29.0358, obtenido por 250.00 − 220.96. Los residuos para las otras 19 observaciones se calculan de manera semejante.

TABLA 15-5

Resumen de costos reales, costos estimados y residuos para el problema del costo de calefacción

Casa	*Costo real, Y*	*Costo estimado, Y'*	*Residuo Y − Y'*
1	250	220.964	29.0358
2	360	310.839	49.1606
3	165	171.665	−6.6655
4	43	87.891	−44.8911
5	92	79.411	12.5892
6	200	218.110	−18.1105
7	355	363.466	−8.4656
8	290	330.018	−40.0183
9	230	208.440	21.5597
10	120	153.041	−33.0412
11	73	43.664	29.3355
12	205	224.211	−19.2113
13	400	335.171	64.8291
14	320	271.211	48.7893
15	72	65.223	6.7768
16	272	335.171	−63.1709
17	94	84.483	9.5171
18	190	221.912	−31.9123
19	235	184.663	50.3368
20	139	195.443	−56.4426

Los valores ajustados y los residuos pueden calcularse por medio de MINITAB. Los enunciados que siguen se necesitan para colocar los valores ajustados en C11 y los residuos en C20 del listado MINITAB. (La información contenida en C10 no se describe aquí, pero es necesaria para tener los valores ajustados a partir de MINITAB.) El signo ";" al final de la primera línea y el "." al final de la segunda, son obligatorios.

```
MTB> regr c1 3 c2 c3 c6 , c10 c11 ;
SUBC> residuals c20 .
```

El sistema MINITAB también desarrolla tanto una representación de tallo y hoja, descrita en el capítulo 2 (véase el diagrama 15-1), como un histograma (véase el

DIAGRAMA 15-1

Representación de tallo y hoja de los residuos

```
MTB>STEM C20
Stem - and - leaf of residual N = 20
Leaf Unit = 10

 1    -0 6
 4    -0 544
 6    -0 33
10    -0 1100
10     0 001
 7     0 222
 4     0 445
 1     0 6
```

DIAGRAMA 15-2

Histograma de los residuos

```
MTB > HIST C20
Histogram of residual N = 20

Midpoint    Count
    -60        2   **
    -40        4   ****
    -20        2   **
      0        4   ****
     20        4   ****
     40        2   **
     60        2   **
```

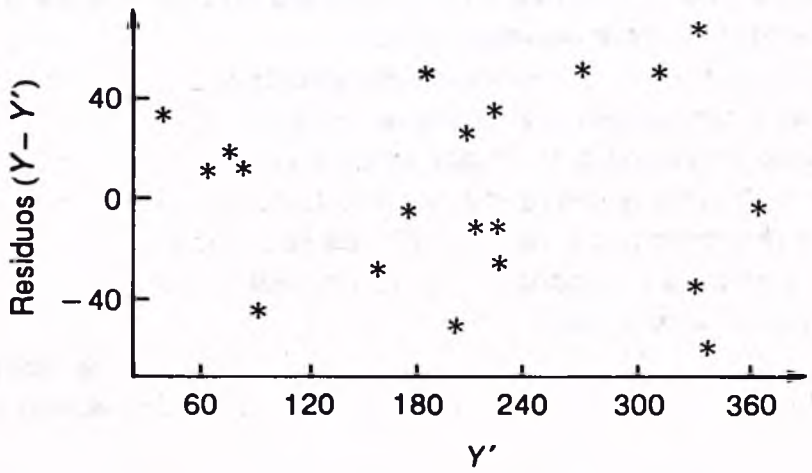
diagrama 15-2) para los residuos. Ambas gráficas indican que la distribución de los residuos es hasta cierto punto normal, según lo exigían las consideraciones. Para interpretar el histograma del diagrama 15-2, obsérvese que se compone de manera que los residuos se cuantifican en clases: – 50 a – 69, con un punto medio de – 60; – 30 a – 59, con un punto medio de – 40; etc. Algunas de las clases son:

Clase	*Punto medio*	*Residuos*	*Conteo*
– 50 hasta – 69	– 60	– 63.1709, – 56.4426	2
– 30 hasta – 49	– 40	– 44.8911, – 40.0183 – 33.0142, – 31.9123	4
– 10 hasta – 29	– 20	– 18.1105, – 19.2113	2

Las consideraciones para el análisis de regresión también exigen que los residuos permanezcan constantes para todos los valores de Y'. Recuérdese que a esta condición se le denomina **homoscedasticidad.** Para verificar si existe homoscedasticidad, los residuos se grafican en relación con los valores ajustados de Y (véase el diagrama 15-3). Debido a que no hay más variación respecto a los valores grandes de Y' que respecto a los valores pequeños de Y', puede decirse que esta consideración se cumple.

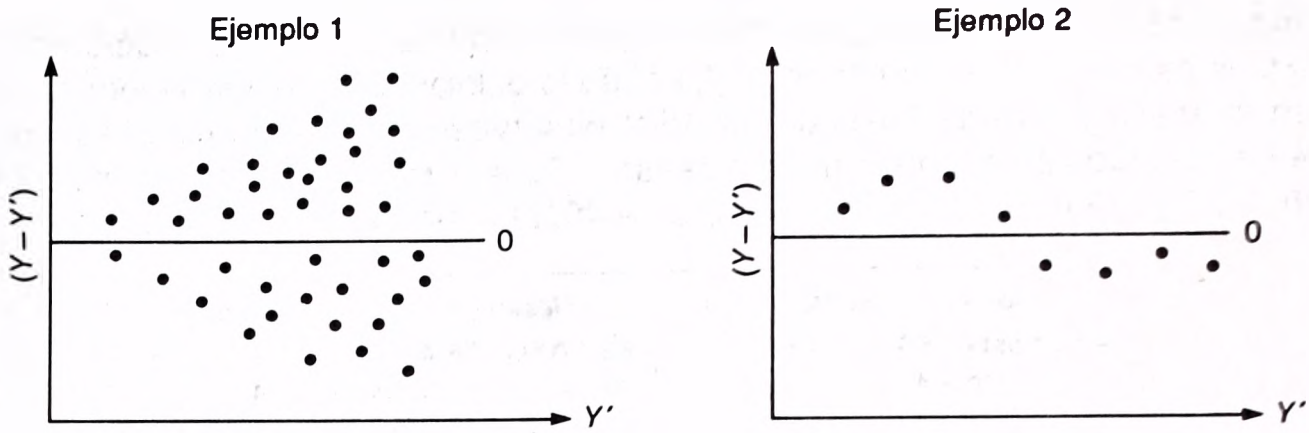
DIAGRAMA 15-3

***Y'* y residuos**



A continuación se presentan dos ejemplos en donde la condición de homoscedasticidad no se cumple. Obsérvese que en el primer ejemplo, los residuos tienen forma de embudo. Esto es, conforme aumentan los valores ajustados de Y, sucede lo mismo con la variación en los residuos. En el segundo ejemplo, existe un patrón en dichos residuos. Parece que toman la forma de una ecuación polinomial o de segundo grado.

¿Qué problemas provocan los residuos que no muestran homoscedasticidad? Las desviaciones estándares de los coeficientes de regresión serán subestimadas (demasiado pequeñas), ocasionando que posibles variables independientes parez-



can significativas cuando tal vez no lo sean. Para arreglar esta condición se seleccionan otras variables independientes o se transforman algunas de las variables. Se sugiere al lector que consulte un análisis más detallado sobre los residuos en un texto avanzado, como *Applied Linear Regression Models,* escrito por Neter, Wasserman y Kutner (Irwin, 1989).

RESUMEN

La correlación y la regresión simples, analizadas en los capítulos 13 y 14, se ocuparon de la relación entre dos variables: una dependiente y una independiente. En este capítulo se amplió el análisis para incluir la relación entre una variable dependiente y dos o más variables independientes.

El objetivo de la *ecuación de regresión múltiple* es estimar un valor para la variable dependiente con base en dos o más variables independientes. El error en el pronóstico se mide por el *error estándar múltiple de estimación.*

La fuerza de la relación entre la variable dependiente y las variables independientes se mide por el *coeficiente de correlación múltiple, R.* Una R igual a 0 indica que no hay correlación; los valores cercanos a 0 muestran que la correlación es débil; y los valores cercanos a 1 indican una correlación fuerte. Una R de 1.00 significa correlación perfecta.

El *coeficiente de determinación múltiple,* R^2, es la proporción de la variación en Y que es explicada por las variables independientes. El *coeficiente de no determinación múltiple,* $1 - R^2$, es la proporción no explicada.

Se realizó una *prueba global* para determinar si todas las variables independientes tienen o no coeficientes cero de regresión neta y se probó si los coeficientes individuales eran o no iguales a cero.

Por último, utilizando varios listados de computadora, se subrayó que una computadora es fundamental para resolver problemas de regresión y correlación múltiples.

Recapitulación

I. El análisis de regresión y correlación múltiple se basa en estas consideraciones.
   A. Existe una relación lineal entre las variables independientes y la variable dependiente.
   B. La variable dependiente es continua y de nivel de intervalo.
   C. La variación residual es la misma para todos los valores ajustados de Y, y estos residuos se distribuyen en forma normal.

D. Las observaciones sucesivas de la variable dependiente no están correlacionadas.
E. Las variables independientes no están muy correlacionadas.

II. La forma general de la ecuación de regresión múltiple es:

$$Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_kX_k$$

en donde Y' es el valor estimado, a es la intersección en Y, las b representan los coeficientes de regresión, y las X los valores de las diferentes variables independientes.
A. Puede haber un número ilimitado de variables independientes.
B. El criterio de mínimos cuadrados se utiliza para desarrollar la ecuación.
C. Se necesita una computadora para determinar los valores de a y los diferentes valores de b.

III. Existen tres medidas de la efectividad de la ecuación de regresión.
A. El error estándar múltiple de la estimación es semejante a la desviación estándar.
1. Se mide en las mismas unidades que la variable dependiente.
2. Es difícil determinar qué es un valor grande y qué es un valor pequeño del error estándar.
B. El coeficiente de correlación múltiple es semejante al coeficiente de correlación simple.
1. Varía de 0 a 1 inclusive.
2. Las asociaciones grandes son cercanas a 1; las pequeñas son cercanas a 0.
C. El coeficiente de determinación puede variar de 0 a 1.
1. Muestra la fracción de la variación en Y que se explica por medio del conjunto de variables independientes.
2. Es el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple.

IV. La tabla ANOVA da la variación en la variable dependiente que se explica por medio de la ecuación de regresión, así como la que no se explica.

V. Se utiliza una matriz de correlación para mostrar todos los posibles coeficientes de correlación simple entre todas las variables.

VI. Se utiliza una prueba global para investigar si cualesquiera de las variables independientes tienen coeficientes significativos de regresión.
A. La hipótesis nula es: todos los coeficientes de regresión son cero.
B. La hipótesis alternativa es: al menos un coeficiente de regresión no es cero.
C. El estadístico de prueba es la distribución F con k variables independientes y $n - (k + 1)$ grados de libertad, en donde n es el tamaño de la muestra.

VII. La prueba para las variables individuales se utiliza a fin de determinar qué variable independiente tiene coeficientes de regresión distintos de cero.
A. Las variables que tienen coeficientes de regresión cero, por lo general se eliminan del análisis.
B. El estadístico de prueba es la distribución t con $n - (k + 1)$ grados de libertad.

VIII. Las variables cualitativas no son numéricas.
A. También se les denomina variables ficticias.
B. Existen sólo dos posibles resultados para una variable cualitativa, como masculino o femenino.

IX. Una regresión por pasos lleva directamente a la ecuación de regresión más eficiente.
A. Sólo variables independientes con coeficientes significativos de regresión se presentan en el análisis.
B. Las variables se introducen en el orden en que incrementan el término R^2 con más rapidez.

X. Un residuo es la diferencia entre el valor real de Y y el valor pronosticado de Y.
   A. Los residuos deben distribuirse casi en forma normal. Histogramas y gráficas de tallo y hojas sirven para verificar si se cumple esta condición.
   B. Una gráfica de los residuos y sus valores Y' correspondientes resulta útil para mostrar que no hay tendencias o patrones en los residuos.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. La gerente distrital de una cadena de tiendas de ventas al menudeo con descuento, está investigando por qué ciertos establecimientos de su región tienen mejor desempeño que otros. Cree que tres factores están relacionados con las ventas totales, como son el número de competidores en la región, la población en el área circunvecina y la cantidad gastada en publicidad. Desde su distrito, formado por varios cientos de tiendas, selecciona una muestra aleatoria de 30 tiendas. Para cada una recolectó la información que sigue.

Y = ventas totales del último año (en miles de dólares).
X_1 = número de competidores en la región.
X_2 = población (en millones).
X_3 = gasto en publicidad (en miles de dólares).

Los datos muestrales se corrieron en el paquete de software MINITAB con los resultados que siguen.

Analysis of variance

Source	DF	SS	MS
Regression	3	3050.00	762.50
Error	26	2200.00	84.62
Total	29	5250.00	

Predictor	Coef	Stdev	t - ratio
Constant	14.00	7.00	2.00
X_1	−1.00	0.70	−1.43
X_2	30.00	5.20	5.77
X_3	0.20	0.08	2.50

a. ¿Cuáles son las ventas estimadas para la tienda Bryne, que tiene cuatro competidores, población de 0.4 (400 000) y gastos de publicidad de 30 ($30 000)?
b. Calcule el valor R^2.
c. Calcule el error estándar múltiple de la estimación.
d. Haga una prueba global de hipótesis para determinar si cualquiera de los coeficientes de regresión no es igual a cero. Utilice el nivel de significación 0.05
e. Realice pruebas de hipótesis para determinar cuáles de las variables independientes tienen coeficientes significativos de regresión. ¿Qué variables consideraría eliminar? Utilice el nivel de significación 0.05.

6. Se obtuvo el siguiente listado MINITAB.

Analysis of variance

Source	DF	SS	MS
Regression	5	100	20
Error	20	40	2
Total	25	140	

Predictor	Coef	Stdev	t - ratio
Constant	3.00	1.50	2.00
X_1	4.00	3.00	1.33
X_2	3.00	0.20	15.00
X_3	0.20	0.05	4.00
X_4	−2.50	1.00	−2.50
X_5	3.00	4.00	0.75

a. ¿Cuál es el tamaño muestral total?
b. Calcule el valor de R^2.
c. Calcule el error estándar múltiple de la estimación.
d. Realice una prueba global de hipótesis para determinar si cualquiera de los coeficientes de regresión es significativo. Utilice el nivel de significación 0.05.
e. Pruebe en forma individual los coeficientes de regresión. ¿Consideraría omitir alguna o algunas variables? En caso afirmativo, ¿cuál o cuáles? Utilice el nivel de significación 0.05.

Los problemas que siguen necesitan utilizar el sistema MINITAB o un paquete de software semejante.

7. El Sr. Mike Wilde es presidente de una organización de profesores en el distrito escolar de Otsego. Al prepararse para futuras negociaciones, a Mike le gustaría investigar la estructura de sueldos de los profesores del distrito. Considera que existen tres factores que afectan el sueldo de un profesor: años de experiencia, una calificación de la efectividad de la enseñanza dada por el director, y si el profesor tiene o no grado de maestría. Una muestra de 20 profesores dio como resultado los datos que siguen.

Sueldo (miles de dólares) Y	*Años de experiencia* X_1	*Calificación del director* X_2	*Maestría** X_3
21.1	8	35	0
23.6	5	43	0
19.3	2	51	1
33.0	15	60	1
28.6	11	73	0
35.0	14	80	1
32.0	9	76	0
26.8	7	54	1
38.6	22	55	1
21.7	3	90	1
15.7	1	30	0
20.6	5	44	0
41.8	23	84	1

* 1 = Si, 0 = No.

Sueldo (miles de dólares) Y	*Años de experiencia* X_1	*Calificación por el director* X_2	*Maestría** X_3
36.7	17	76	0
28.4	12	68	1
23.6	14	25	0
31.8	8	90	1
20.7	4	62	0
22.8	2	80	1
32.8	8	72	0

a. Desarrolle una matriz de correlación. ¿Qué variable independiente tiene la correlación más fuerte con la variable dependiente? ¿Parece que no habrá problemas con la multicolinealidad?
b. Determine la ecuación de regresión. ¿Qué sueldo estimaría usted para un profesor con cinco años de experiencia, una calificación dada por el director de 60, y sin maestría?
c. Realice una prueba de hipótesis global para determinar si alguno de los coeficientes de regresión netos son diferentes de cero.
d. Realice una prueba de hipótesis para los coeficientes individuales de regresión. ¿Consideraría usted eliminar cualquiera de las variables independientes?
e. Si su conclusión en la parte *d* fue eliminar una o más variables independientes, corra de nuevo el análisis sin esas variables.
f. Determine los residuos para la ecuación de la parte *e*. Use un diagrama de tallo y hoja o un histograma para verificar que la distribución de los residuos es casi normal.
g. Grafique los residuos calculados en la parte *f* en un diagrama de dispersión con los residuos en el eje Y y los valores Y' en el eje X. ¿La gráfica revela algunas infracciones a las consideraciones de regresión?

8. El gerente de ventas distrital de un fabricante importante de automóviles está estudiando las ventas. De manera específica, le gustaría determinar qué factores afectan el número de automóviles vendidos en una distribuidora. Para investigar, selecciona al azar 12 distribuidores. De estos últimos obtiene el número de automóviles vendidos el último mes, los minutos de publicidad radiofónica comprados el último mes, el número de vendedores de tiempo completo empleados en la distribuidora y si ésta se encuentra en la ciudad o no. La información es como sigue:

Autos vendidos el último mes Y	*Publicidad* X_1	*Fuerza de ventas* X_2	*Ciudad* X_3
127	18	10	Si
138	15	15	No
159	22	14	Si
144	23	12	Si
139	17	12	No
128	16	12	Si
161	25	14	Si
180	26	17	Si
102	15	7	No
163	24	16	Si
106	18	10	No
149	25	11	Si

a. Desarrolle una matriz de correlación. ¿Qué variable independiente tiene la correlación más grande con la variable dependiente? ¿Parece que habrá algún problema con la multicolinealidad?
b. Determine la ecuación de regresión. ¿Cuántos automóviles esperaría usted que se vendieran en una distribuidora con 20 vendedores, que paga 15 minutos de publicidad y se encuentra en una ciudad?
c. Realice una prueba global de hipótesis para determinar si alguno de los coeficientes netos de regresión difiere de cero.
d. Realice una prueba de hipótesis para los coeficientes individuales de regresión. ¿Consideraría eliminar alguna de las variables independientes?
e. Si su conclusión en la parte *d* fue suprimir una o más de las variables independientes, efectúe de nuevo el análisis sin esas variables.
f. Determine los residuos para la ecuación de la parte *e*. Utilice un diagrama de tallo y hoja o un histograma para verificar que la distribución de los residuos es casi normal.
g. Grafique los residuos calculados en la parte *f* en un diagrama de dispersión con los residuos en el eje Y y los valores Y' en el eje X. ¿La gráfica revela algunas infracciones a las consideraciones de regresión?

9. Un economista especializado en agricultura está estudiando la relación entre el ingreso per cápita de un distrito (variable dependiente) y el porcentaje de la población que se dedica a la agricultura, y el número medio de años de educación para las personas mayores de 25 años de edad. Se seleccionan al azar 20 distritos rurales.

Ingreso per cápita (miles de dólares) Y	*Porcentaje de personas dedicadas a la agricultura* X_1	*Educación (años)* X_2
19.6	10.2	10.6
19.4	13.4	16.9
16.0	10.2	15.1
19.8	10.8	14.9
21.8	10.3	15.0
18.2	13.3	16.0
18.2	11.3	16.0
21.4	10.3	15.1
15.2	12.7	12.9
24.8	8.5	10.1
21.4	12.6	16.0
19.2	12.8	10.4
26.4	9.7	13.7
25.8	9.5	14.0
20.2	10.5	10.2
15.2	13.0	13.8
19.8	10.6	13.0
24.8	8.4	15.2
13.3	9.6	13.8

a. Desarrolle una matriz de correlación. ¿Qué variable independiente tiene la correlación más grande con la variable dependiente? ¿Parece que habrá algún problema con la multicolinealidad?

b. Determine la ecuación de regresión. El distrito Warren se encuentra en Illinois. Tiene 12% de la fuerza de trabajo dedicada a la agricultura y la media de años de educación es 15. ¿Cuál es el ingreso estimado para el distrito?
c. Realice una prueba global de hipótesis para determinar si alguno de los coeficientes netos de regresión difiere de cero.
d. Realice una prueba para los coeficientes individuales de regresión. ¿Consideraría eliminar alguna de las variables independientes?
e. Si su conclusión en la parte *d* fue que una o más variables debían eliminarse, vuelva a efectuar el análisis eliminando esas variables.
f. Determine los residuos para la ecuación de la parte *e*. Utilice un diagrama de tallo y hoja o un histograma para verificar que la distribución de los residuos es aproximadamente normal.
g. Grafique los residuos calculados en la parte *f* en un diagrama de dispersión con los residuos en el eje Y y los valores Y' en el eje X. ¿La gráfica revela algunas infracciones a las consideraciones de regresión?
h. ¿Tiene usted algunas sugerencias acerca del análisis?

10. El Sr. Daniel Márquez recientemente obtuvo un grado en finanzas de una universidad. Una gran empresa financiera lo ha contratado como subgerente. Como primer proyecto, se le pide que estudie la ganancia bruta en la industria química. ¿Qué factores afectan las ganancias en esa industria? El Sr. Márquez selecciona una muestra de 16 empresas y obtiene datos sobre el número de empleados, número de dividendos de acciones comunes consecutivos pagados, valor total del inventario al principio del año actual y ganancia bruta de cada empresa. Los resultados son:

Empresa	*Utilidad bruta (miles de dólares)* Y	*Número de empleados* X_1	*Dividendos consecutivos* X_2	*Inventario inicial (miles de dólares)* X_3
1	2 800	140	12	1 800
2	1 300	65	21	320
3	1 230	130	42	820
4	1 600	115	80	76
5	4 500	390	120	3 600
6	5 700	670	64	8 400
7	3 150	205	43	508
8	640	40	14	870
9	3 400	480	88	5 500
10	6 700	810	98	9 875
11	3 700	120	44	6 500
12	6 440	590	110	9 130
13	1 280	440	38	1 200
14	4 160	280	24	890
15	3 870	650	60	1 200
16	980	150	24	1 300

a. Determine la ecuación de regresión. La Master Chemical Company emplea 220 personas, ha pagado 64 dividendos consecutivos de acciones comunes y tiene un inventario valuado en $1 500 000 (dólares) al principio del año. ¿Cuál es la ganancia bruta estimada?

b. Realice una prueba global de hipótesis para determinar si alguno de los coeficientes netos de regresión difiere de cero.
c. Lleve a cabo una prueba de hipótesis para los coeficientes individuales de regresión. ¿Consideraría usted suprimir cualquiera de las variables independientes?
d. Si su conclusión en la parte *c* fue eliminar una o más variables independientes, vuelva a correr el análisis, eliminando esas variables.
e. Determine los residuos para la ecuación de la parte *d*. Utilice un diagrama de tallo y hoja o un histograma para verificar que la distribución de los residuos es casi normal.
f. Grafique los residuos calculados en la parte *e* en un diagrama de dispersión con los residuos en el eje Y y los valores Y' en el eje X. ¿La gráfica revela algunas infracciones a las consideraciones de regresión?

11. Suponga que el gerente de ventas de un distribuidor importante de partes de automóvil desea desarrollar un método objetivo para pronosticar desde abril las ventas anuales totales de una región. Según las ventas regionales, también pueden estimarse las ventas totales de la empresa. Con base en la experiencia se puede determinar que las ventas anuales estimadas en abril son bastante exactas, por la que en años futuros el pronóstico de abril podría utilizarse para revisar los programas de producción y tener un inventario adecuado en las tiendas de venta al menudeo.

En apariencia varios factores están relacionados con las ventas, incluyendo el número de tiendas de venta al menudeo en la región que almacenan las partes producidas por la empresa, el número de automóviles registrados en la región hasta abril 1, y el ingreso personal total para el primer trimestre del año. Por último se seleccionó un total de cinco variables independientes como las más importantes (de acuerdo con el gerente de ventas). Después se recopilaron datos para un año reciente. También se registraron las ventas anuales totales para ese año en cada región. Obsérvese en la tabla que sigue que para la región 1 hubo 1 739 tiendas al menudeo que almacenaban las partes o repuestos producidos por la empresa, hubo 9 270 000 automóviles registrados en la región hasta el 1 de abril y las ventas para ese año fueron por $37 702 000 (dólares).

Ventas anuales (millones de dólares), Y	*Número de tiendas de venta al menudeo,* X_1	*Número de autos registrados (millones),* X_2	*Ingreso personal (miles de millones de dólares),* X_3	*Antigüedad promedio de los automóviles (años),* X_4	*Número de supervisores,* X_5
37.702	1 739	9.27	85.4	3.5	9.0
24.196	1 221	5.86	60.7	5.0	5.0
32.055	1 846	8.81	68.1	4.4	7.0
3.611	120	3.81	20.2	4.0	5.0
17.625	1 096	10.31	33.8	3.5	7.0
45.919	2 290	11.62	95.1	4.1	13.0
29.600	1 687	8.96	69.3	4.1	15.0
8.114	241	6.28	16.3	5.9	11.0
20.116	649	7.77	34.9	5.5	16.0
12.994	1 427	10.92	15.1	4.1	10.0

Se utilizó el sistema de software MINITAB para generar el listado que sigue.

a. Considere la matriz de correlación que sigue. ¿Qué variable tiene la correlación más grande con la variable dependiente? Las correlaciones entre las variables independientes "tiendas de venta al menudeo" e "ingresos", y entre "automóviles" y "tiendas de venta al menudeo" es bastante grande. ¿Podría ser esto un problema? ¿Cómo se denomina a esta condición?

	sales	outlets	cars	income	age
outlets	0.899				
cars	0.605	0.775			
income	0.964	0.825	0.409		
age	−0.323	−0.489	−0.447	−0.349	
bosses	0.286	0.183	0.395	0.155	0.291

b. Se obtuvo la siguiente ecuación de regresión utilizando las cinco variables independientes. ¿Qué porcentaje de la variación se explica por medio de la ecuación de regresión?

The regression equation is
sales = − 19.7 - 0.00063 outlets + 1.74 cars + 0 410 income + 2.04 age − 0.034 bosses

Predictor	Coef	Stdev	t - ratio
Constant	−19.672	5.422	−3.63
outlets	−0.000629	0.002638	−0.24
cars	1.7399	0.5530	3.15
income	0.40994	0.04385	9.35
age	2.0357	0.8779	2.32
bosses	−0.0344	0.1880	−0.18

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS
Regression	5	1593.81	318.76
Error	4	9.08	2.27
Total	9	1602.89	

SOURCE	DF	SEQ SS
outlets	1	1296.68
cars	1	34.38
income	1	246.09
age	1	16.58
bosses	1	0.08

c. Realice una prueba global de hipótesis para determinar si algunos de los coeficientes de regresión no son cero.

d. Efectúe una prueba de hipótesis con cada una de las variables independientes. ¿Consideraría usted eliminar "tiendas de venta al menudeo" y "jefes"?

e. Se volvió a efectuar la regresión, según se muestra en el listado que sigue, eliminando "tiendas de venta al menudeo" y "jefes". Calcule el coeficiente de determinación. ¿Cuánto ha cambiado R^2 con respecto al análisis anterior?

The regression equation is

sales = − 18.9 + 1.61 cars + 0.400 income + 1.96 age

Predictor	Coef	Stdev	t - ratio
Constant	−18.924	3.636	−5.20
cars	1.6129	0.1979	8.15
income	0.40031	0.01569	25.52
age	1.9637	0.5846	3.36

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS
Regression	3	1593.66	531.22
Error	6	9.23	1.54
Total	9	1602.89	

SOURCE	DF	SEQ SS
cars	1	586.23
income	1	990.07
age	1	17.36

f. A continuación se encuentra un histograma y un diagrama de tallo y hoja de los residuos. ¿Parece razonable la consideración de normalidad?

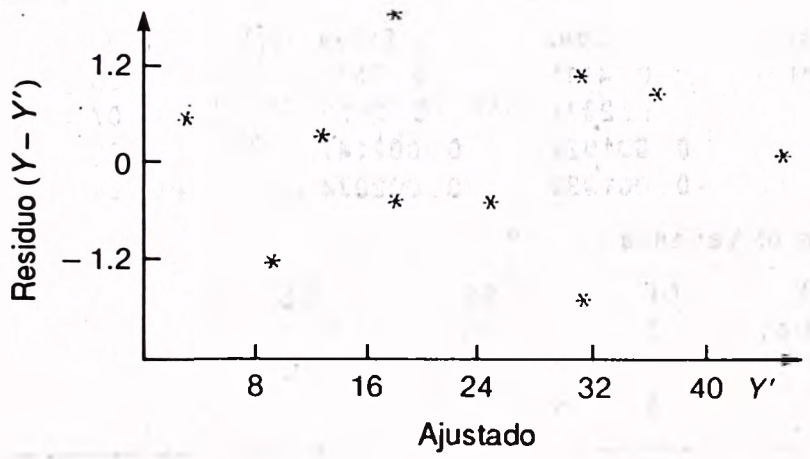
Histogram of residual N = 10

Midpoint	Count	
−1.5	1	*
−1.0	1	*
−0.5	2	**
0.0	2	**
0.5	2	**
1.0	1	*
1.5	1	*

Stem - and - leaf of residual N = 10
Leaf Unit = 0.10

1	−1 7
2	−1 2
2	−0
5	−0 440
5	0 24
3	0 68
1	1
1	17

g. A continuación se encuentra una gráfica de los valores ajustados de Y (es decir, Y') y los residuos. ¿Advierte que existan infracciones a las consideraciones?



12. El administrador de un nuevo programa paralegal en un colegio comunitario y técnico desea pronosticar el promedio de calificaciones en el nuevo programa. Consideró que el promedio de calificaciones en bachillerato, la puntuación de expresión oral en la Scholastic Aptitude Test (SAT) y la puntuación de matemáticas en la SAT, serían buenos elementos para pronosticar el promedio de calificaciones en la formación paralegal. Los datos para nueve estudiantes son:

Estudiante	*Prom. de calif. en bachillerato*	*SAT expresión oral*	*SAT matemáticas*	*Prom. de calif. paralegal*
1	3.25	480	410	3.21
2	1.80	290	270	1.68
3	2.89	420	410	3.58
4	3.81	500	600	3.92
5	3.13	500	490	3.00
6	2.81	430	460	2.82
7	2.20	320	490	1.65
8	2.14	530	480	2.30
9	2.63	469	440	2.33

Fuente: Administración de programas, Community and Technical College, The University of Toledo, Ohio.

Se utilizó el sistema de software MINITAB para generar el listado que sigue.

a. Se obtuvo la matriz de correlación siguiente. ¿Qué variable tiene la correlación más grande con la variable dependiente? Algunas de las correlaciones entre las variables independientes son grandes. ¿Será esto un problema?

	legal	gpa	verbal
gpa	0.911		
verbal	0.616	0.609	
math	0.487	0.636	0.599

b. Considere el listado que sigue. Calcule el coeficiente de determinación.

The regression equation is
legal = − 0.411 + 1.20 gpa + 0.00163 verbal − 0.00194 math

Predictor	Coef	Stdev	t - ratio
Constant	−0.4111	0.7823	−0.53
gpa	1.2014	0.2955	4.07
verbal	0.001629	0:002147	0.76
math	−0.001939	0.002074	−0.94

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS
Regression	3	4.3595	1.4532
Error	5	0.7036	0.1407
Total	8	5.0631	

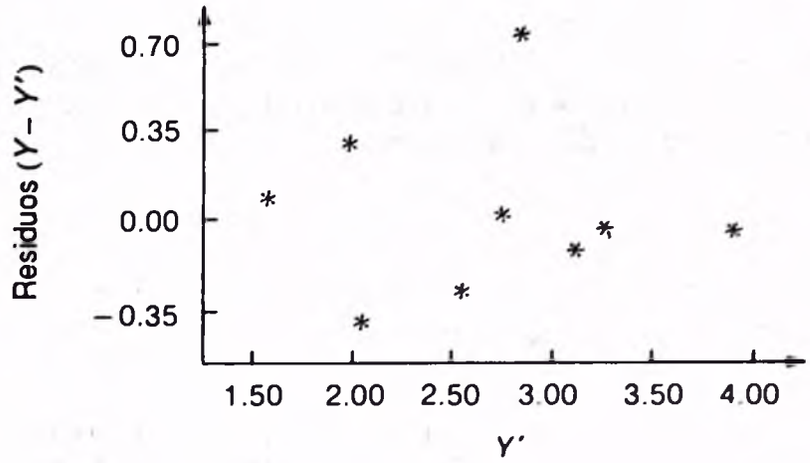
c. Efectúe una prueba global de hipótesis a partir del listado anterior. ¿Parece que algunos de los coeficientes de regresión no son iguales a cero?
d. Realice una prueba de hipótesis con cada variable independiente. ¿Consideraría usted eliminar las variables "expresión oral" y "matemáticas".
e. Se volvió a efectuar el análisis sin las variables "expresión" y "matemáticas". Consulte el listado que sigue. Calcule el coeficiente de determinación. ¿Cuánto ha cambiado R^2 con respecto a los análisis anteriores?

```
The regression equation is
legal = - 0.454 + 1.16 gpa

Predictor        Coef       Stdev     t - ratio
Constant      -0.4542      0.5542       -0.82
gpa            1.1589      0.1977        5.86

Analysis of Variance

SOURCE       DF        SS        MS
Regression    1    4.2061    4.2061
Error         7    0.8570    0.1224
Total         8    5.0631
```

f. A continuación se encuentran un histograma y un diagrama de tallo y hoja de los residuos. ¿Parece razonable la consideración de normalidad para los residuos?

```
Histogram of residual N = 9

 Midpoint    Count
    -0.4        1  *
    -0.2        3  ***
     0.0        3  ***
     0.2        1  *
     0.4        0
     0.6        1  *

Stem - and - leaf of residual N = 9
Leaf Unit = 0.10

  1    -0 4
  2    -0 2
(3)    -0 110
  4     0 00
  2     0 2
  1     0
  1     0 6
```

g. A continuación se tiene un diagrama de los residuos y los valores Y'. ¿Cree usted que hay alguna infracción a las consideraciones?



EXAMEN CAPITULO 15

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. ¿Cuál es la forma general de una ecuación de regresión múltiple con dos variables independientes?

Las preguntas 2 a 7 se refieren al listado de regresión múltiple que sigue.

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F
Regression	3	75		
Error	25	25		
Total				

Predictor	Coef	Stdev	t - ratio
Constant	6.00	3.35	
X1	0.70	0.50	
X2	–9.00	4.00	
X3	5.00	2.00	

2. ¿Cuántas variables independientes hay en este análisis?
3. ¿Cuál es el número total de observaciones, n?
4. Calcule el valor de R^2.
5. Determine el error estándar múltiple de la estimación.
6. Realice la siguiente prueba global de hipótesis.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \text{Las } \beta_i \text{ no todas son cero.}$$

a. ¿Cuál es la regla de decisión para esta prueba? Utilice el nivel de significación 0.05.
b. ¿Cuál es su decisión con respecto a la hipótesis nula?

7. Realice las tres pruebas de hipótesis presentadas a continuación. Utilice el nivel de significación 0.05.

$$H_0 : \beta_1 = 0 \qquad H_0 : \beta_2 = 0 \qquad H_0 : \beta_3 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0 \qquad H_1 : \beta_2 \neq 0 \qquad H_1 : \beta_3 \neq 0$$

a. ¿Cuál es la regla de decisión para esta prueba?
b. ¿Qué variables independientes tienen coeficientes significativos de regresión y cuáles no? ¿Qué variable o variables eliminaría usted?

Autoexámenes

15-1 1. 12.9 psi (lb/pulg^2), obtenido por $Y' = -0.5 + 2(3.5) = 1(6.4)$.

2. La b_1 de 2 indica que la resistencia a la tensión del alambre aumentará 2 psi por cada incremento de 1 cm en el diámetro exterior, permaneciendo constante la cantidad de molibdeno. Esto es, la resistencia a la tensión aumentará 2 psi sin importar la cantidad de molibdeno en el alambre.

15-2 1. 24.37 pies cúbicos, obtenido por $Y' = 62.65 + (-1.86)8 + (-0.52)45$.

2. 2.37 pies cúbicos, obtenido por 24.37 − 22.00. El consumo de combustible es 2.37 pies cúbicos menos de lo previsto. A esto se le denomina *residuo*.

15-3 1. $Y' = 490 - 5.15X_1 - 14.7X_2$

2. 0.776. Un total de 77.6% de la variación en el costo de la calefacción se explica debido a la temperatura y el aislante.

3. 1 − 0.776 = 0.224. Un total de 22.4% de la variación no se explica debido a la temperatura y el aislamiento.

4. Los resultados de la prueba global indican que al menos uno de los coeficientes de regresión no es cero. Para llegar a esa conclusión, primero se enunció la hipótesis nula como H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$. El valor crítico de F es 3.59, el valor calculado es 29.4, obtenido por medio de 82 597/2 807. Como 29.4 se encuentra en la región de rechazo más allá de 3.59, se rechaza H_0.

5. El valor p es 0.008. La probabilidad de un valor t menor de −2.98, o mayor que 2.98, con 17 grados de libertad, es 0.008.

Examen capítulo 15

1. $Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2$
2. Tres variables independientes.
3. $n = 29$
4. $R^2 = 75/100 = 0.75$
5. $s_{y \cdot 123} = \sqrt{1.00} = 1.00$
6. a. H_0 se rechaza si $F > 2.99$.

   b. $F = \dfrac{75/3}{25/25} = 25.00$

   H_0 se rechaza. Al menos un coeficiente de regresión no es cero.

7. a. H_0 se rechaza si $t < -2.060$ o bien $t > 2.060$.

   $t = \dfrac{0.70}{0.50} = 1.40$ para β_1

   $t = \dfrac{-9.00}{4.00} = -2.25$ para β_2

   $t = \dfrac{5.00}{2.00} = 2.50$ para β_3

   b. Se elimina X_1 y se conserva X_2 y X_3.

Repaso de los capítulos 13 – 15

Esta parte es un repaso de los principales términos y conceptos presentados en los capítulos 13, 14 y 15. En el capítulo 13 se observó que la fuerza de la relación entre un conjunto de variables independientes y un conjunto de variables dependientes puede medirse por medio del *coeficiente de correlación*. La *r* de *Pearson*, ideada por Karl Pearson, puede tomar cualquier valor entre – 1.00 y + 1.00, inclusive. Los coeficientes de – 1.00 y + 1.00 indican relación perfecta y 0 indica carencia de relación. Un valor cercano a 0 como – 0.14 o 0.14 indica una relación pequeña. Un valor cercano a – 1 o + 1, como – 0.90 o + 0.90, indica una relación grande. Al elevar *r* al cuadrado se obtiene el *coeficiente de determinación*. Da la proporción de la variación total en la variable dependiente explicada por la variable independiente.

La regresión y correlación múltiple se ocupan de la relación entre dos o más variables independientes y la variable dependiente.

De manera semejante, la fuerza de la relación entre un grupo de muchas variables independientes y una variable dependiente se mide por el *coeficiente de correlación múltiple*, *R* (cap. 15). Siempre es positiva y puede tomar cualquier valor entre 0 y + 1.00 inclusive. El *coeficiente de determinación múltiple*, R^2, mide la proporción de la variación en *Y* que se explica por medio de dos o más variables independientes.

La relación lineal en el caso que comprende una variable independiente y una variable dependiente se describe por medio de la ecuación $Y' = a + bX$. Para tres variables independientes, X_1, X_2 y X_3 la ecuación de regresión múltiple es

$$Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$$

Resolverla para evaluar $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ implicaría horas de tediosos cálculos. Por fortuna, este tipo de problema puede resolverse con rapidez utilizando uno de los muchos paquetes estadísticos disponibles para computadora. Lo común es utilizar MINITAB y SPSS^x. Un programa utiliza un procedimiento por pasos. Se maneja primero la variable independiente con más alta correlación con la variable dependiente. Se dan varias medidas, como el coeficiente de correlación. A continuación se introduce la variable, junto con la variable independiente restante que dé como resultado la mayor reducción proporcional en la variación no explicada. Después se calcula un nuevo conjunto de medidas (R, R^2, etc.). Este proceso continúa hasta haber considerado todas las variables independientes significativas.

GLOSARIO

Capítulo 13

Análisis de correlación Grupo de técnicas estadísticas empleado para medir la fuerza de la relación entre dos variables.

Coeficiente de correlación Medida ideada por Karl Pearson que proporciona la fuerza de asociación entre un conjunto de variables independientes y un conjunto de variables dependientes. La fórmula para una variable independiente y una dependiente es:

Coeficiente de correlación de rango-orden Ideado por Charles Spearman a principios de la década de 1900, es una medida de la fuerza de asociación entre dos conjuntos de datos de nivel ordinal, esto es, datos que pueden clasificarse de menor a mayor o viceversa. La fórmula para el coeficiente de correlación de rango de Spearman es:

$$r = \frac{n(\Sigma XY) - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2][n(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)^2]}}$$

Coeficiente de determinación Proporción de la variación total en la variable dependiente que la explica la variable independiente. Puede tomar cualquier valor entre 0 y + 1.00, inclusive. Un coeficiente de 0.82 indica que 82% de la variación en Y se debe a X. Este coeficiente se calcula elevando al cuadrado r (para correlación simple) o R (para correlación múltiple).

Coeficiente de no determinación Mide la proporción de la variación total en Y que no se explica por medio de X. Se calcula por medio de $1 - r^2$ para dos variables o $1 - R^2$ para el caso múltiple.

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

Diagrama de dispersión Forma gráfica que representa la relación entre dos conjuntos de variables.

Prueba de significación para r Fórmula para responder a la pregunta: ¿Es cero la correlación en la población de la cual se seleccionó la muestra? Para muestras de menos de 50, se utiliza t:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Para muestras grandes (50 o más), se utiliza la prueba z:

$$z = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

Prueba de significación para r_s Fórmula para responder a la pregunta: ¿Es cero la correlación en la población a partir de la cual se seleccionó la muestra? Para muestras

menores de 10, consulte el apéndice H. Para muestras entre 10 y 30, recurra al apéndice H o a la distribución t de Student. Para un tamaño de muestra mayor de 30, utilice t:

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

con $n - 2$ grados de libertad.

Capítulo 14

Ecuación de regresión lineal Ecuación matemática que define la relación entre dos variables. Tiene la forma $Y' = a + bX$. Se emplea para pronosticar Y con base en un valor X seleccionado.

Error estándar de estimación Mide la dispersión de los valores Y reales con respecto a la recta de regresión lineal. Indica qué tan alejado de la verdad puede estar un pronóstico.

Método de mínimos cuadrados Técnica que se emplea para resolver la ecuación de regresión.

Capítulo 15

Autocorrelación Correlación de residuos sucesivos. Esta condición ocurre con frecuencia cuando en el análisis interviene la variable tiempo.

Coeficiente de correlación múltiple Medida que define la fuerza de la relación entre dos o más variables independientes y la variable dependiente.

Ecuación de regresión múltiple La relación entre muchas variables independientes y una variable dependiente, expresada como ecuación matemática. La expresión general es $Y' = a + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \cdots + b_kX_k$. Se utiliza para estimar Y dados valores seleccionados de X.

Homoscedasticidad El error estándar de la estimación es igual para todos los valores ajustados de la variable dependiente.

Matriz de correlación Listado de todos los posibles coeficientes simples de correlación. Una matriz de correlación incluye las correlaciones entre cada una de las variables independientes y la variable dependiente, así como aquéllas entre todas las variables independientes.

Multicolinealidad Condición que ocurre en el análisis de regresión múltiple si las variables independientes están correlacionadas entre sí.

Regresión por pasos Método para determinar el orden en que entran las variables independientes a una ecuación de regresión múltiple. Las variables independientes entran a la ecuación de regresión en el orden en que incrementen el valor de R^2 con más rapidez.

Residuo Diferencia entre el valor real de la variable dependiente y el valor estimado de la variable dependiente.

Variable cualitativa Variable de escala nominal no numérica. Por ejemplo, una persona se considera como empleada o desempleada.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar del repaso se dan al final del libro.

Parte I: Llene los espacios en blanco y analice las respuestas.

1. La fuerza de la relación entre un conjunto de variables independientes X y una variable dependiente Y se mide por la _____.
2. Se calculó un coeficiente de correlación de rango como – 0.90. Comente este resultado.
3. La r de Pearson obtenida para un problema relacionado con 60 pares de datos fue 0.40. Comente este resultado. ¿Es cero la correlación en la población? Proporcione alguna prueba.
4. Se calculó el coeficiente de no determinación y resultó de 0.04 en un problema relacionado con una variable independiente y una dependiente. ¿Qué significa esto?
5. Explique la función del procedimiento "por pasos" utilizada en MINITAB.

Los ejercicios del 6 al 10 se basan en la tabla que sigue. La división de contabilidad de una gran cadena de tiendas departamentales intenta pronosticar la ganancia neta para cada una de las múltiples tiendas, con base en el número de empleados de éstas, los gastos generales, etc. Unas cuantas estadísticas provenientes de algunas de las tiendas son:

Tienda	*Utilidad neta (miles de dólares)*	*Número de empleados*	*Gastos generales (miles de dólares)*	*Tasa promedio de movimiento (%)*	*Pérdidas por robo (miles de dólares)*
1	846	143	79	69	52
2	513	110	64	50	45

6. La variable dependiente es _____.
7. La ecuación general para este problema es _____.
8. La ecuación de regresión múltiple se calculó utilizando $Y' = 67 + 8X_1 - 10X_2 + 0.004X_3 - 3X_4$. ¿Cuáles son las ventas pronosticadas para una tienda con 112 empleados, gastos generales de $65 000, una tasa de movimiento de 50% y una pérdida por robos de $50 000?
9. Suponga que la R obtenida fue 0.86. ¿Cuál es el coeficiente de determinación? Explique este valor.
10. Considere que el error estándar múltiple de la estimación calculada fue 3 (en miles de dólares). Explique qué significa lo anterior en este problema.

Parte II: Problemas.

11. Unas empresas de venta de equipo de impresión rápida en una gran área de negocios en el centro de una ciudad, gastan la mayoría de sus fondos para publicidad en anuncios colocados en las paradas de autobús. Un proyecto de investigación se relaciona con pronosticar las ventas mensuales con base en la cantidad anual gastada en fijar anuncios en los lugares mencionados. Una muestra de tales compañías reveló que tuvieron los siguientes gastos de publicidad y ventas:

Empresa	Cantidad anual gastada en publicidad en las paradas (miles de dólares)	Ventas mensuales (miles de dólares)
A	2	10
B	4	40
C	5	30
D	7	50
E	3	20

a. Trace un diagrama de dispersión.
b. Determine el coeficiente de correlación.
c. ¿Cuáles son los coeficientes de determinación y de no determinación?
d. Calcule la ecuación de regresión.
e. Pronostique las ventas mensuales de una de tales compañías que gasta $4 500 (dólares) en carteles o anuncios para las paradas de autobús.
f. Resuma los resultados.

12. En dos estados se ofreció un incentivo especial a profesionales del boliche, para que jugaran una sola noche en varias ciudades durante un periodo de dos semanas. Para crear interés y estimular la competición, se concedieron premios para un juego de 300, para la puntuación más alta cada noche, y así sucesivamente. Los puntos de premio alcanzados por cada jugador son:

	Puntos de premio alcanzados en	
Jugador	Florida	Georgia
Thompson	81	76
Sobecki	18	36
López	41	46
Arnold	91	88
Rollins	50	42
Cresent	29	36
Adrian	62	60
Cork	77	36
Adami	81	87
Marchal	56	72

El estadígrafo que trabaja para la Professional Bowlers Association está interesado en evaluar los rangos de los jugadores en las dos regiones.

a. Clasifique por rango los puntos alcanzados en cada región o estado (tenga cuidado con los empates).
b. Calcule el coeficiente de correlación de rango de Spearman para evaluar la consistencia de los jugadores en cada región. Interprete los resultados.

16

Análisis de datos de nivel nominal: distribución ji cuadrada

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Enumerar las características de la distribución ji cuadrada.
2. Realizar una prueba de hipótesis relacionada con la diferencia entre un conjunto de frecuencias observadas y un conjunto correspondiente de frecuencias esperadas.
3. Llevar a cabo una prueba de hipótesis para determinar si están relacionados dos criterios de clasificación.

Los capítulos del 8 al 12 se dedicaron a datos que cuando menos estaban en escala de intervalo, como pesos, ingresos y edades. Se llevó a cabo un número de pruebas de hipótesis acerca de una media poblacional y de dos o más medias poblacionales. Para esas pruebas se supuso que la población era normal. ¿Pueden efectuarse pruebas de hipótesis si los datos no están en escala de intervalo, sino en escala nominal u ordinal y si no se hacen suposiciones acerca de la forma de la población de origen?

Para responder a esa pregunta existen pruebas para los niveles de medición nominal y ordinal, y no es necesario formular supuestos sobre la forma de la población. Recuérdese del capítulo 1 que los datos a *nivel nominal* son el tipo de datos "más bajo". Tal tipo de datos sólo puede clasificarse en categorías; por ejemplo, republicanos, demócratas y "los demás", o bien, masculino y femenino. El *nivel ordinal* supone que una categoría tiene un rango más alto que la siguiente. Como ejemplo, a solicitud de una organización de investigaciones una muestra de aficionados al trote evalúa un zapato de reciente producción como extraordinario, bueno, aceptable o no satisfactorio. Está implícito que un rango de extraordinario es superior a bueno, que bueno es mejor que aceptable, y así sucesivamente.

Las pruebas de hipótesis aplicables a los niveles de medición nominal u ordinal se denominan pruebas **no paramétricas** o **libres de distribución**. El último nombre implica que en tales pruebas no intervienen suposiciones respecto a la distribución de la población de origen. Dichas pruebas son de aplicación relativamente fácil y, por lo general, es fácil realizar los cálculos.

PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE DE JI CUADRADA: FRECUENCIAS ESPERADAS IGUALES

La **prueba de bondad de ajuste ji cuadrada** es una de las pruebas no paramétricas más utilizadas. Ideada por Karl Pearson a principios de 1900, es apropiada para los niveles de datos tanto nominal como ordinal. También puede usarse para niveles de datos de intervalo y de razón. La primera prueba de significación implica *frecuencias esperadas iguales.*

* Ejemplo

Como implica el nombre completo, el objetivo de la prueba de bondad de ajuste de ji cuadrada es determinar cuán bien se ajusta un conjunto *observado* de datos a un conjunto *esperado*. Un ejemplo puede describir mejor el procedimiento de prueba de hipótesis. Supóngase que existen algunas dudas respecto al funcionamiento correcto de una de las máquinas tragamonedas del Palacio de Nerón, en Las Vegas; esto es, existe la sospecha de que está alterado el mecanismo de una de las ventanillas de la máquina.

Como experimento, se acciona 120 veces la palanca de la máquina y se registran los resultados, que se enlistan en la tabla 16-1. La pregunta que se desea responder es: ¿se ha alterado el mecanismo de la máquina?

TABLA 16-1

Resultados de accionar 120 veces la máquina tragamonedas

Dibujo en la ventanilla izquierda (celda)	*Número de veces que aparece el dibujo* f_0
Plátano	13
Cereza	33
Naranja	14
Durazno	7
Limón	36
Pera	17
Total	120

✔ Solución

Se usará el mismo procedimiento sistemático de prueba de hipótesis de cinco pasos seguido en los capítulos del 8 al 12.

Paso 1 Se establecen las hipótesis nula y alternativa.

La hipótesis nula, H_0, es que el mecanismo no ha sido alterado. En otras palabras, no existe diferencia entre el conjunto de frecuencias observadas y el conjunto de frecuencias esperadas; esto es, cualquier diferencia puede atribuirse al azar. La hipótesis alternativa, H_1, es que existe una diferencia entre los dos conjuntos de frecuencias, o sea que la máquina ha sido alterada. Si H_0 se rechaza y H_1 es aceptada, ello significa que el mecanismo ha sido alterado para permitir que un dibujo o varios, aparezcan en la ventanilla con más frecuencia que otros.

Paso 2 Se escoge un nivel de significación. Se selecciona el nivel 0.05, que es el mismo que para el error tipo 1. Por tanto, 0.05 es la probabilidad de que se rechace una hipótesis nula verdadera.

Paso 3 Se selecciona el estadístico de prueba, que es la distribución ji cuadrada que se denota por χ^2.

$$\boxed{\chi^2 = \sum \left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} \right]}$$

con $k - 1$ grados de libertad, donde k es el número de categorías. En la fórmula anterior:

f_0 es una frecuencia observada en una categoría específica.

f_e es una frecuencia esperada en una categoría específica.

En breve se examinarán las características de la distribución ji cuadrada con más detalle.

Paso 4 Se plantea la regla de decisión. Recuérdese que la regla de decisión en la prueba de hipótesis necesita encontrar un número que separe la región de aceptación de la de rechazo. A este número se le denomina *valor crítico*. Como se verá en breve, la distribución ji cuadrada en realidad es una familia de distribuciones. Cada distribución tiene una forma diferente, dependiendo del número de grados de libertad. Este número se determina por medio de $k - 1$, donde k representa el número de categorías. En este problema hay seis dibujos de frutas que aparecen en la ventanilla izquierda de la máquina tragamonedas sospechosa; por ejemplo plátano, cereza, naranja, durazno, limón y pera. Puesto que existen seis categorías, hay $k - 1 = 6 - 1 = 5$ grados de libertad. A cada categoría se le denomina *celda*, de modo que hay seis celdas. El valor crítico para 5 grados de libertad y el nivel de significación de 0.05 se encuentra en el apéndice I. En la tabla 16-2 se muestra una parte de la tabla del apéndice. El valor crítico es 11.070, determinado al localizar 5 grados de libertad en el margen izquierdo y recorriéndose horizontalmente a la derecha para leer el valor crítico en la columna 0.05.

TABLA 16-2

Parte de la tabla de ji cuadrada

Grados de libertad	*Area de la extremidad derecha*			
df	*0.10*	*0.05*	*0.02*	*0.01*
1	2.706	3.841	5.412	6.635
2	4.605	5.991	7.824	9.210
3	6.251	7.815	9.837	11.345
4	7.779	9.488	11.668	13.277
5	9.236	11.070	13.388	15.086

En consecuencia, la regla de decisión es: no se rechaza la hipótesis nula si el valor calculado de ji cuadrada es menor que o igual a 11.070. Si es mayor que 11.070, se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa, H_1. En la figura 16-1 se muestran las dos regiones.

Básicamente la regla de decisión indica que si existen grandes diferencias entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas, dando como resultado una χ^2 calculada mayor que 11.070, debe rechazarse la hipótesis nula. Sin embargo, si las diferencias entre f_0 y f_e son pequeñas, el valor calculado de χ^2 será 11.070 o menor y la hipótesis nula no debe rechazarse. El razonamiento es que tales diferencias pequeñas entre las frecuencias observadas y las esperadas se deben al azar.

Paso 5 Se selecciona una muestra, se calcula un valor de ji cuadrada y se toma una decisión para aceptar o rechazar la hipótesis nula. Se decide accionar la palanca

DIAGRAMA 16-1

Distribución probabilística ji cuadrada para 5 grados de libertad, mostrando las regiones de aceptación y rechazo, nivel de significación de 0.05

o manija de la máquina en investigación 120 veces y se cuenta el número de símbolos de plátanos, cerezas y otras frutas que aparezcan. Los conteos (frecuencias observadas) para cada una de las seis celdas se muestran en la tabla 16-1.

¿Cómo se determina el número de frecuencias esperadas? Se supone que la máquina está preparada de modo que cada dibujo tiene igual oportunidad de aparecer en la ventanilla. Supóngase que se acciona la manija seis veces. En teoría, puede esperarse que aparezcan en la ventanilla los dibujos de un plátano, una cereza, una naranja, un durazno, un limón y una pera. Sin embargo, si el experimento se hizo con 12 operaciones, en forma lógica puede esperarse que cada una de las seis frutas aparezca dos veces (determinadas por 12 dividido entre 6). Puesto que se operó la máquina 120 veces, puede esperarse que cada dibujo aparezca 120 dividido entre 6, o sea, 20 veces (siempre que no esté alterada la máquina de juego).

El conjunto de frecuencias observadas de la tabla 16-1 y el conjunto de frecuencias esperadas se muestran en la tabla 16-3. Obsérvese otra vez que las frecuencias esperadas son *todas iguales* (20 en cada celda).

TABLA 16-3

Frecuencias observadas y esperadas para 120 accionamientos de la máquina tragamonedas

Signo	*Frecuencias observadas* f_0	*Frecuencias esperadas* f_e
Plátano	13	20
Cereza	33	20
Naranja	14	20
Durazno	7	20
Limón	36	20
Pera	17	20
Total	120	120

Un examen de la tabla 16-3 indica que rara vez aparece un durazno en la ventanilla izquierda y que un limón aparece con más frecuencia que la esperada.

¿Debe concluirse que la máquina tragamonedas ha sido alterada? Sin embargo, quizá las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas pueden atribuirse al azar. El cálculo de ji cuadrada y la comparación con el valor crítico resuelven el dilema.

Recuérdese que el estadístico de prueba, χ^2, se calcula por medio de:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e} \right]$$

Con referencia a los cálculos siguientes, se ve que los pasos necesarios para determinar la ji cuadrada son:

Columna 1: Se evalúa la diferencia entre cada par f_0 y f_e. (*Nota*: La suma de las diferencias debe ser igual a cero.)

Columna 2: Las diferencias se elevan al cuadrado.

Columna 3: Cada diferencia al cuadrado se divide entre la frecuencia esperada apropiada, f_e. Después se suman los cocientes. La suma (34.40) es el valor calculado de ji cuadrada.

			(1)	(2)	(3) $\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$
Signo	f_0	f_e	$f_0 - f_e$	$(f_0 - f_e)^2$	
Plátano	13	20	−7	49	49/20 = 2.45
Cereza	33	20	13	169	169/20 = 8.45
Naranja	14	20	−6	36	36/20 = 1.80
Durazno	7	20	−13	169	169/20 = 8.45
Limón	36	20	16	256	256/20 = 12.80
Pera	17	20	−3	9	9/20 = 0.45
			0		34.40
	Debe ser				χ^2

La χ^2 calculada de 34.40 está en el área de rechazo, más allá del valor crítico de 11.070. En consecuencia, la decisión es rechazar H_0 al nivel 0.05. Se acepta H_1, la cual establece que el mecanismo de la ventanilla izquierda de la máquina ha sido alterado. Fundamentalmente rechazar H_0 significa que es casi imposible que aparezcan discrepancias tan grandes entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas si la máquina funciona correctamente (no está alterada). Repitiendo, la conclusión es que el mecanismo ha sido alterado.

Tanto el ejemplo de la máquina tragamonedas como el del autoexamen implican frecuencias esperadas iguales. Antes de considerar problemas con frecuencias esperadas *desiguales,* se verán brevemente las características de la distribución ji cuadrada.

AUTOEXAMEN 16-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una directora de personal está preocupada respecto al ausentismo. Ha decidido muestrear las listas de asistencia para determinar si el ausentismo está distribuido uniformemente durante los seis días laborables de la semana. La hipótesis nula que se va a probar es: el ausentismo está distribuido uniformemente durante toda la semana. Se usará el nivel 0.01. Los resultados de la muestra son:

	Número de ausentes
Lunes	12
Martes	9
Miércoles	11
Jueves	10
Viernes	9
Sábado	9

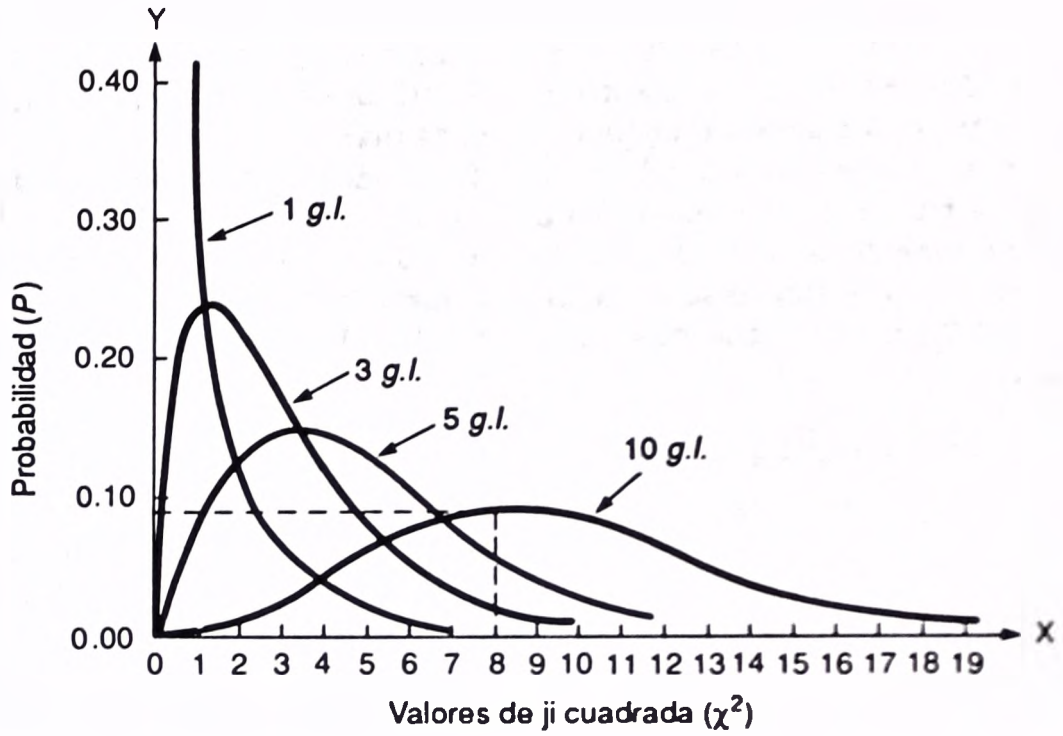
1. ¿A qué clase de frecuencias pertenecen los números 12, 9, 11, 10, 9 y 9?
2. ¿Cuántas categorías (celdas) hay en este caso?
3. ¿Cuál es la frecuencia esperada para cada día?
4. ¿Cuántos grados de libertad hay en este caso?
5. ¿Cuál es el valor crítico para ji cuadrada al nivel de 1%?
6. Usando la prueba de significación ji cuadrada, calcule χ^2.
7. ¿Se acepta o rechaza la hipótesis nula?
8. En forma específica, ¿qué le indica esto a la directora de personal?

Características de la distribución ji cuadrada

1. El valor calculado de la ji cuadrada es *siempre positivo* porque la diferencia entre f_0 y f_e se eleva al cuadrado, esto es, $(f_0 - f_e)^2$.
2. Existe una familia de distribuciones ji cuadrada. Hay una distribución ji cuadrada para 1 grado de libertad, otra para 2 grados de libertad, otra para 3 grados de libertad, etc. El número de grados de libertad está determinado por $k - 1$, donde k es el número de categorías. En consecuencia, la forma de la distribución ji cuadrada *no* depende del tamaño de la muestra. Por ejemplo, si 200 empleados de una línea aérea se clasifican en una de tres categorías (personal de vuelo, auxiliar en tierra y personal administrativo) habrá $k - 1 = 3 - 1 = 2$ grados de libertad.
3. La citada distribución ji cuadrada tiene *sesgo positivo*. Sin embargo, conforme aumenta el número de grados de libertad, la distribución comienza a aproximarse a la distribución normal. En la figura 16-2 se muestran las distribuciones para grados de libertad seleccionadas. Obsérvese que para 10 grados de libertad la gráfica se aproxima a la curva normal.

DIAGRAMA 16-2

Distribuciones ji cuadrada para grados de libertad seleccionados



PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE: FRECUENCIAS ESPERADAS DESIGUALES

Las frecuencias esperadas (f_e) en el experimento con la máquina tragamonedas fueron todas iguales; esto es, de 120 ensayos, en teoría se espera que el plátano aparezca 20 veces en la ventanilla izquierda de la máquina tragamonedas, una cereza aparecerá 20 veces, y así sucesivamente. La ji cuadrada también puede utilizarse si las frecuencias esperadas no son iguales. El ejemplo siguiente ilustra el caso de frecuencias desiguales y también muestra un uso práctico de ji cuadrada, por ejemplo, encontrar si una experiencia local difiere de la experiencia nacional.

* Ejemplo

Un estudio nacional de las admisiones al hospital, durante un periodo de dos años, reveló estas estadísticas respecto a personas senectas residentes en centros de asistencia que fueron hospitalizados durante el periodo: cuarenta por ciento fueron admitidos sólo una vez en el periodo de dos años. Veinte por ciento fueron admitidos dos veces. Catorce por ciento fueron admitidos tres veces, y así sucesivamente. La distribución completa del porcentaje se muestra en la tabla 16-4.

La administradora de un hospital local desea comparar su experiencia con la experiencia nacional. Seleccionó a 400 personas senectas en centros de asistencia locales que necesitaron hospitalización y determinó el número de veces que cada

TABLA 16-4

Admisión de personas senectas en el hospital

Número de ingresos en un periodo de dos años	*Porcentaje del total*
1	40
2	20
3	14
4	10
5	8
6	6
7	2
	100

uno fue admitido en su hospital. Las frecuencias observadas se muestran en la tabla 16-5.

La ji cuadrada sirve para comparar la experiencia local con la experiencia nacional. ¿Cómo pueden compararse las frecuencias locales observadas en la tabla 16-5 con los porcentajes nacionales de la tabla 16-4?

TABLA 16-5

Admisión en el hospital durante un periodo de dos años

Número de ingresos	*Número de personas* f_0
1	165
2	79
3	50
4	44
5	32
6	20
7	10
	400

✔ Solución

Obviamente, el *número* de frecuencias observadas que resulta del estudio de las personas senectas locales no puede compararse directamente con los *porcentajes* dados para los hospitales de la nación. Sin embargo, estos porcentajes en la tabla 16-4 pueden convertirse a frecuencias esperadas, f_e. La tabla muestra que 40% de dichas personas que necesitaron hospitalización sólo la recibieron una vez en el periodo de dos años. Por tanto, si *no* existe diferencia entre la experiencia en el hospital local y la experiencia nacional, entonces 40% de las 400 personas de la

muestra seleccionada por la administradora (160) habrían sido admitidas una sola vez durante el periodo. Además, 20% de las 400 personas de la muestra (80) habrían sido admitidas dos veces, y así sucesivamente. Las frecuencias locales observadas y las esperadas con base en el estudio nacional se indican en la tabla 16-6.

TABLA 16-6

Frecuencias observadas y esperadas para la admisión en el hospital

Número de veces admitido	*Número observado de admisiones* f_0	*Número esperado de admisiones* f_e	
1	165	160	← 40% × 400
2	79	80	← 20% × 400
3	50	56	← 14% × 400
4	44	40	← 10% × 400
5	32	32	← 8% × 400
6	20	24	← 6% × 400
7	10	8	← 2% × 400
	400	400	

Deben ser iguales.

Las hipótesis nula y alternativa son:

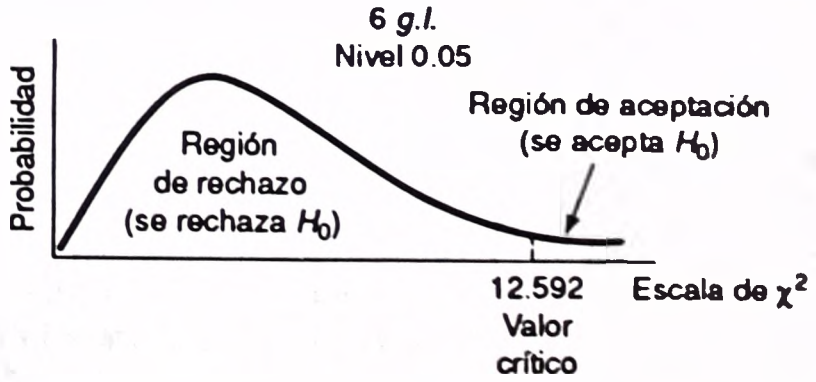
H_0: No existe diferencia entre las experiencias local y nacional.

H_1: Existe diferencia entre las experiencias local y nacional.

La regla de decisión se muestra en forma gráfica en el diagrama 16-3.

DIAGRAMA 16-3

Criterios de decisión para la investigación del hospital



Para determinar el valor crítico, obsérvese que en la tabla 16-2 hay siete celdas. Por tanto, hay $k - 1 = 7 - 1 = 6$ grados de libertad. Consultando el apéndice I, el valor crítico es 12.592. La regla de decisión es: aceptar la hipótesis nula si el valor calculado de ji cuadrada es menor que o igual a 12.592. En otra forma, se rechaza H_0 y se acepta H_1.

Los cálculos para la ji cuadrada son:

Número de veces admitido	f_0	f_e	$f_0 - f_e$	$(f_0 - f_e)^2$	$\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$
1	165	160	+5	25	0.156
2	79	80	−1	1	0.013
3	50	56	−6	36	0.643
4	44	40	+4	16	0.400
5	32	32	−0	0	0.000
6	20	24	−4	16	0.667
7	10	8	−2	4	0.500
			0		$\chi^2 = 2.379$

El valor calculado para ji cuadrada (2.379) queda a la izquierda de 12.592 y, en consecuencia, está en la región de aceptación. Se acepta la hipótesis nula, no existe diferencia entre la experiencia local y la experiencia nacional. En consecuencia, la administradora del hospital puede concluir que la situación local con respecto a la hospitalización de personas senectas en centros de asistencia es similar a la de otras partes del país.

Puede usarse el sistema MINITAB para calcular el valor de la ji cuadrada. El primer paso consiste en introducir al sistema el conjunto de frecuencias observadas. A continuación, se da entrada a las frecuencias esperadas. Después se calcula el valor de la ji cuadrada usando el comando LET. El paso final es imprimir el valor de ji cuadrada, que se representa como K1.

```
MTB > set c1
DATA > 165, 79, 50, 44, 32, 20, 10
DATA > end
MTB > set c2
DATA > 160, 80, 56, 40, 32, 24, 8
DATA > end
MTB > name c1 'observed' c2 'expected'
MTB > let k1=sum((c1-c2)**2/c2)
MTB > print k1
K1          2.37827
```

Obsérvese que el valor calculado mediante el sistema MINITAB es el mismo que se obtuvo antes (excepto por una ligera discrepancia debida al redondeo).

LIMITACIONES DE LA JI CUADRADA

Si hay un número inusitadamente pequeño de frecuencias esperadas en una celda, la ji cuadrada (si se aplica) puede llevar a una conclusión errónea. Esto puede deberse a que f_e aparece en el denominador y la división entre un número muy pequeño produce un cociente demasiado grande. Dos reglas de aceptación general respecto a pequeñas frecuencias de celda son:

1. Si sólo hay dos celdas, las frecuencias *esperadas* en cada celda deben ser cinco o más. El cálculo de la ji cuadrada sería permisible en el siguiente problema:

Persona	f_0	f_e
Alfabeta	643	642
Analfabeta	7	6

2. Para más de dos celdas, la χ^2 no debe aplicarse si más de 20% de las celdas f_e tienen frecuencias esperadas de menos de cinco. De acuerdo con esta regla, se permite calcular χ^2 para la información gerencial en la parte izquierda de la tabla mostrada más adelante. Sólo una de seis, o sea 17%, contiene una frecuencia de menos de cinco.

Nivel directivo	*Número*		*Nivel directivo*	*Número*	
	f_0	f_e		f_0	f_e
Sobrestante	18	16	Sobrestante	30	32
Supervisor	39	37	Supervisor	110	113
Gerente	8	13	Gerente	86	87
Gerente (nivel medio)	6	4	Gerente (nivel medio)	23	24
Vicepresidente adjunto	82	78	Vicepresidente adjunto	5	2
Vicepresidente	10	15	Vicepresidente	5	4
	163	163	Vicepresidente ejecutivo	4	1

La ji cuadrada no debe utilizarse para la información gerencial en la parte derecha de la tabla mostrada antes, porque tres de las siete frecuencias esperadas, o sea, 43%, son inferiores a cinco.

Usando este ejemplo para desarrollar el razonamiento que respalda a la regla, obsérvese que la mayoría de los pares de frecuencias observadas y esperadas son casi iguales. La diferencia más grande es sólo 3. En consecuencia, puede concluirse que no hay diferencia significativa entre el conjunto observado y el conjunto esperado de frecuencias. Sin embargo, el cálculo real de ji cuadrada y su evaluación contra el valor crítico adecuado refutará la conclusión. En cambio, puede concluirse que existe diferencia entre las frecuencias observadas y las esperadas. Sin embar-

go, esta conclusión no parece lógica. Se puede verificar esto resolviendo el autoexamen siguiente:

AUTOEXAMEN 16-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Con la información gerencial mostrada en la parte derecha de la tabla anterior, pruebe al nivel 0.05 la hipótesis nula de que no hay diferencia significativa entre el conjunto observado y el conjunto esperado de frecuencias.

El dilema puede resolverse si la información es tal que algunas de las categorías pueden combinarse. Este parece ser el caso en el problema gerencial. Los tres niveles vicepresidenciales se combinan en una categoría con objeto de satisfacer la regla de 20%.

Nivel directivo	*Número en la muestra,* f_0	*Número esperado,* f_e
Sobrestante	30	32
Supervisor	110	113
Gerente	86	87
Gerente (nivel medio)	23	24
Vicepresidente	14	7

El valor calculado de ji cuadrada para el conjunto revisado de frecuencias es 7.26. Este valor es menor que el valor crítico de 9.488 para el nivel 0.05. En consecuencia, la hipótesis nula se acepta al nivel de significación 0.05. Esto indica que no hay diferencia entre los resultados de la muestra y los resultados esperados. Las pequeñas diferencias entre las observaciones y lo esperado pueden atribuirse al muestreo. Por supuesto, esta es una conclusión más lógica.

AUTOEXAMEN 16-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Remítase al análisis anterior.

1. Verifique que la ji cuadrada calculada es efectivamente 7.26.
2. Utilizando el mismo nivel de significación (0.05), ¿cuál es la regla de decisión? (Cuidado: la información ha sido reorganizada.)
3. ¿Está de acuerdo en que debe aceptarse la hipótesis nula al nivel 0.05?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Un grupo de compradores en una tienda departamental, después de ver una nueva línea de vestidos expresaron sus opiniones. Los resultados son:

Opinión	*Número de compradores*
Extraordinario	47
Excelente	45
Muy bueno	40
Bueno	39
Regular	35
Inaceptable	34

Fuente: Estudio inédito, Oficina de Investigación Institucional, Universidad de Toledo.

Como el número más elevado (47) indicó que la nueva línea es extraordinaria, el jefe de mercadeo cree que es imperativo lanzar la producción en masa de los vestidos. El jefe de barrenderos (que por alguna razón tiene que ver en el asunto) cree que no está claro el imperativo, y alega que las opiniones están distribuidas por igual en las seis categorías. Además, señaló que las ligeras diferencias entre los diversos conteos probablemente se deban al azar. Pruebe la hipótesis nula de que no existe diferencia significativa entre las opiniones de los compradores. Pruebe al nivel de riesgo 0.01. Siga un enfoque formal; esto es, establezca la hipótesis nula, la hipótesis alternativa, etc.

2. El director de seguridad de una empresa de motocicletas tomó una muestra al azar del archivo de accidentes y los clasificó de acuerdo con el tiempo en que tuvo lugar cada uno.

Hora	*Número de accidentes*
8– 9 A.M.	6
9–10 A.M.	6
10–11 A.M.	20
11–12 A.M.	8
1– 2 P.M.	7
2– 3 P.M.	8
3– 4 P.M.	19
4– 5 P.M	6

Utilizando la prueba de ji cuadrada y el nivel de significación 0.01, determine si los accidentes están distribuidos uniformemente o no durante el día. Dé una breve explicación de la conclusión.

3. La columna 1 de la tabla siguiente presenta el número de estudiantes inscritos, por facultad, en la universidad durante el trimestre de otoño.

Facultad	*(1) Número de inscritos*	*(2) Número de entrevistados*
Artes y Ciencias	4 700	90
Administración de empresas	2 450	45
Docencia	3 250	60

Facultad	(1) Número de inscritos	(2) Número de entrevistados
Ingeniería	1 300	30
Derecho	850	15
Farmacología	1 250	15
Docencia	3 400	45

El director del periódico estudiantil seleccionó nombres al azar de cada facultad y mandó por correo a los estudiantes, cuestionarios seleccionados relacionados con actividades universitarias, cuotas, programa de deportes y otros. Los números de respuestas, por facultades, se muestran en la columna 2. Usando el nivel 0.05, determine si la respuesta de la muestra es o no representativa de la población de estudiantes.

4. Se realizó un estudio nacional respecto a la principal actividad bajo techo en tiempo libre de los hombres. El porcentaje del total de cada actividad se muestra en la columna central de la tabla siguiente. Los resultados de un estudio similar realizado con hombres de más de 60 años que viven en la región de las Montañas Rocosas se muestran en la columna derecha.

Principal actividad bajo techo	Resultados a nivel nacional (porcentaje del total)	Estudio en el área de las Montañas Rocosas (número)
Fotografía	22	337
Colección de estampillas y monedas	19	293
Bordado, tejido y costura	6	82
Jardinería en interiores	9	128
Trabajos en metal y madera	12	182
Alta cocina	4	54
Pintura y escultura	7	99
Ajedrez, damas y otros juegos de mesa	21	325

Demuestre al nivel de 0.05 que no existe diferencia entre los resultados nacionales y aquéllos de los hombres mayores de 60 años del área de las Montañas Rocosas.

ANALISIS DE TABLAS DE CONTINGENCIA

La prueba de bondad de ajuste aplicada en la sección anterior se relacionó sólo con una variable y una característica. La prueba de ji cuadrada también puede usarse para un proyecto de investigación relacionado con *dos* características. Los siguientes son algunos ejemplos:

1. ¿Un hombre liberado de una prisión federal se ajusta mejor a la vida civil si regresa a su ciudad natal o si va a vivir a otra parte? Las dos características son el ajuste a la vida civil y el lugar de residencia. Obsérvese que ambas características se miden en la escala nominal.
2. ¿Hay alguna relación entre el promedio de calificaciones obtenido por los estudiantes de universidad y sus ingresos 10 años después de su graduación? Las dos características medidas en cada individuo son: promedio de calificaciones e ingresos.

✱ Ejemplo

Supóngase que la Federal Correction Agency (de Estados Unidos) quiere investigar la primera interrogante citada antes: ¿un hombre liberado de una prisión federal se ajusta mejor a la vida civil si regresa a su ciudad natal o si va a vivir a otra parte? En otras palabras, ¿existe relación entre el ajuste a la vida civil y el lugar de residencia después de la liberación?

✔ Solución

Como antes, el primer paso en la prueba de hipótesis es establecer las hipótesis nula y alternativa.

H_0 No existe relación entre el ajuste a la vida civil y el lugar donde viva el individuo después de ser liberado.

H_1 Existe relación entre el ajuste a la vida civil y el lugar donde viva el individuo después de ser liberado.

Si se desea probar la relación entre las dos características, el enunciado de la hipótesis nula orienta respecto a la prueba que va a usarse. Si H_0 establece que no hay relación entre las dos características, se puede usar la distribución ji cuadrada como estadístico de prueba.

Se usará el nivel 0.01 de significación para probar la hipótesis. Recuérdese que es el error tipo I (significa que existe una probabilidad de 0.01 de que se rechace una hipótesis nula verdadera).

Los psicólogos de la agencia entrevistaron a 200 ex convictos seleccionados al azar. Utilizando una serie de preguntas, los psicólogos clasificaron el ajuste de cada persona a la vida civil como excelente, bueno, aceptable o no satisfactorio. Las clasificaciones de los 200 ex convictos fueron cuantificadas como se muestra. Por ejemplo, Joseph Camden mostró un excelente ajuste a la vida civil. Su caso es uno de los 27 cuantificados en la casilla superior de la extrema izquierda.

Ajuste a la vida civil	*Ajuste a la vida civil*			
	Muy bueno	*Bueno*	*Regular*	*Insatisfactorio*
Ciudad de origen	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸
Otra ciudad	𝍸 𝍸 III	𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

Los registros de cada casilla o *celda* se contaron. Los conteos se muestran en la siguiente **tabla de contingencia** (véase la tabla 16-7). En este caso, a la Federal Correction Agency le interesaba determinar si el ajuste a la vida civil es *contingente o no* con respecto al lugar a donde vaya el ex convicto después de ser liberado.

TABLA 16-7

Ajuste a la vida civil y lugar de residencia

Ajuste a la vida civil	*Ajuste a la vida civil*				
	Muy bueno	*Bueno*	*Regular*	*Insatisfactorio*	*Total*
Ciudad de origen	27	35	33	25	120
Otra ciudad	13	15	27	25	80
Total	40	50	60	50	200

Una vez que se conoce cuántos renglones (2) y cuántas columnas (4) hay en la tabla de contingencia, pueden determinarse el valor crítico y la regla de decisión. Para una prueba de significación de ji cuadrada donde se clasifican en cruce dos características en una tabla de contingencia, se determinan los grados de libertad (g.l.) por medio de:

$$\begin{aligned} g.l. &= (\text{número de renglones} - 1)(\text{número de columnas} - 1) \\ &= (r - 1)(c - 1) \end{aligned}$$

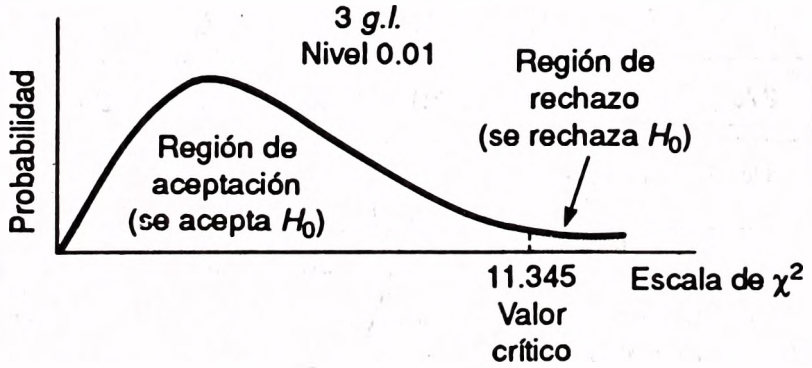
En este problema:

$$\begin{aligned} df &= (r - 1)(c - 1) \\ &= (2 - 1)(4 - 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Para determinar el valor crítico para tres grados de libertad y el nivel 0.01 (seleccionado antes), se consulta el apéndice I. Es 11.345. En consecuencia, la regla de decisión es: se acepta la hipótesis nula si el valor calculado de X_2 es igual a o menor que 11 345; se rechaza H_0 y se acepta H_1 si es mayor que 11.345. La regla de decisión se muestra en forma gráfica en el diagrama 16-4.

DIAGRAMA 16-4

Distribución ji cuadrada para 3 grados de libertad



Ahora se determinará el valor calculado de χ^2. Las frecuencias observadas, f_0, se presentan en la tabla 16-7. ¿Cómo se determinan las frecuencias esperadas f_e,

correspondientes? Obsérvese en la columna "Total" de la tabla 16-7 que 120 de los 200 ex convictos (60%) regresaron a sus ciudades natales. *Si no existe relación alguna* entre el ajuste y la residencia después de la liberación, puede esperarse que 60% de los 40 ex convictos tuvieron excelente ajuste a la vida civil al residir en sus ciudades natales. Por tanto, la frecuencia esperada f_e para la casilla superior izquierda es 0.60 × 40, o sea 24. En forma similar, si no hay relación entre el ajuste y la residencia actual, puede esperarse que 60% de los 50 ex convictos (30) que tuvieron "buen" ajuste a la vida civil, residan en sus ciudades de origen.

Además, obsérvese que 80 de los 200 ex convictos estudiados (40%) no regresaron a vivir en sus ciudades de origen. Por tanto, de los 60 considerados por los psicólogos que tuvieron ajuste "aceptable" a la vida civil, 0.40 × 60, o sea 24, puede esperarse que no regresen a sus ciudades de origen.

La frecuencia esperada para cualquier celda se puede determinar mediante:

$$\text{Frecuencia esperada para una casilla} = \frac{(\text{Total por renglón})(\text{Total por columna})}{\text{Gran total}}$$

Utilizando esta fórmula, la frecuencia esperada para la casilla superior izquierda de la tabla 16-7 es:

$$\begin{aligned}\text{Frecuencia esperada} &= \frac{(\text{Total por renglón})(\text{Total por columna})}{\text{Gran total}}\\ &= \frac{(120)(40)}{200}\\ &= 24\end{aligned}$$

Las frecuencias observadas, f_0, y las frecuencias esperadas, f_e, para todas las casillas en la tabla de contingencia se indican en la tabla 16-8.

TABLA 16-8

Frecuencias observadas y esperadas

Sitio de residencia después de quedar en libertad	*Ajuste a la vida civil*									
	Muy bueno		*Bueno*		*Regular*		*Insatisfactorio*		*Total*	
	f_0	f_e	f_0	f_e	f_0	f_e	f_0	f_e	f_0	f_e
Ciudad de origen	27	24	35	30	33	36	25	30	120	120
Otra ciudad	13	16	15	20	27	24	25	20	80	80
Total	40	40	50	50	60	60	50	50	200	200

Deben ser iguales

$\frac{(80)(50)}{200}$

Deben ser iguales

Debido al redondeo, es posible que no sean exactamente iguales el total de las frecuencias esperadas para una columna y el total de las frecuencias observadas para dicha columna. Si sucede esto, los totales pueden igualarse ajustando una o más de las frecuencias esperadas en esa columna.

Recuérdese que el valor calculado de ji cuadrada se determina por:

$$\chi^2 = \sum\left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\right]$$

Comenzando con la casilla superior de la extrema izquierda:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(27-24)^2}{24} + \frac{(35-30)^2}{30} + \frac{(33-36)^2}{36} + \frac{(25-30)^2}{30} \\ &+ \frac{(13-16)^2}{16} + \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(27-24)^2}{24} + \frac{(25-20)^2}{20} \\ &= 0.375 + 0.833 + 0.250 + 0.833 + 0.563 + 1.250 + 0.375 + 1.250 \\ &= 5.729\end{aligned}$$

Puesto que el valor calculado de ji cuadrada (5.729) se encuentra en la región de aceptación (a la izquierda de 11.345), se acepta la hipótesis nula al nivel 0.01. Al aceptar H_0, se concluye que no hay relación entre el ajuste a la vida civil y el lugar donde resida el ex recluso después de haber alcanzado su libertad. Para el programa de orientación de la Federal Correction Agency, el ajuste a la vida civil no está relacionado con el lugar donde viva el ex convicto después de su liberación.

Los resultados al correr el programa MINITAB para este problema se muestran a continuación. Obsérvese que se empleó el comando READ para introducir los

```
MTB > read c1 c2 c3 c4
DATA > 27 , 35 , 33 , 25
DATA > 13 , 15 , 27 , 25
DATA > end
MTB > chisquare c1 - c4
MTB > name c1 'outstand' c2 'good' c3 'fair' c4 'poor'
MTB > chisquare c1 - c4

Expected counts are printed below observed counts

              outstand      good      fair      poor     Total
     1          27          35        33        25       120
              24.0        30.0      36.0      30.0

     2          13          15        27        25        80
              16.0        20.0      24.0      20.0

Total           40          50+       60        50       200

ChiSq=        0.37+       0.83+     0.25+     0.83+
              0.56+       1.25+     0.37+     1.25= 5.73

df=3
```

datos en vez del comando SET. El comando empleado para calcular la ji cuadrada es CHISQUARE.
Obsérvese que el valor calculado de ji cuadrada (5.73) es el mismo que se obtuvo anteriormenrte.

AUTOEXAMEN 16-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Una socióloga estuvo investigando esta cuestión: ¿existe alguna relación entre el nivel de educación y las actividades sociales de una persona? Decidió manejar tres niveles de educación: asistió y terminó primaria o no, asistió y terminó secundaria o no, y asistió y terminó la profesional o no. Cada persona llevó un registro de sus actividades sociales, como jugar boliche en grupo, asistir a bailes y ceremonias religiosas. La socióloga los dividió en frecuencia superior al promedio, frecuencia promedio y frecuencia inferior al promedio.

	Actividad Social		
Educación	*Superior al promedio*	*Promedio*	*Inferior al promedio*
Universitaria	20	10	10
Bachillerato	30	50	80
Elemental	10	60	130

1. ¿Cómo se denomina esta tabla?
2. Establezca la hipótesis nula. Se va a probar al nivel 0.05.
3. ¿Debe aceptarse o rechazarse la hipótesis nula? Cite cifras para respaldar su decisión.
4. En forma específica, ¿qué indica esto para el problema?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Una encuesta respecto a los ingresos de representantes industriales que trabajan por su cuenta o son empleados de empresas pequeñas, medianas o grandes, reveló lo siguiente:

   De los que tienen ingresos menores de $20 000 (dólares) al año, 9 trabajan por su cuenta, 12 son empleados en empresas pequeñas, 40 en medianas y 89 en compañías grandes.
   De los que sus percepciones son de $20 000 a $39 999, 11 trabajan por su cuenta, 10 son empleados en empresas pequeñas, 45 en medianas y 104 en compañías grandes.
   De los que ganan $40 000 o más, 10 trabajan por su cuenta, 13 son empleados en empresas pequeñas, 50 en medianas y 107 en compañías grandes.

   Examine la hipótesis de que no existe relación entre el nivel de ingreso de los representantes comerciales y el nivel de su empleo (trabajando por su cuenta o empleados en empresas pequeñas, medianas o grandes). Realice la prueba al nivel 0.05.
6. La encuesta mencionada en el ejercicio 5 incluyó preguntas respecto a la edad del vendedor y el grado de presión que soporta el representante de ventas en relación con

su trabajo. Las edades y las presiones laborales se clasifican en forma cruzada en la tabla siguiente.

Edad (años)	*Grado de presión (número de vendedores)*		
	Bajo	*Medio*	*Alto*
Menor de 25	20	18	22
25–39	50	46	44
40–59	58	63	59
60 y mayor	34	43	43

Examine si existe alguna relación entre la edad y el grado de presión de trabajo. Utilice el nivel 0.01.

RESUMEN

Las pruebas de hipótesis acerca de una media poblacional, dos medias o más de dos medias, descritas en los capítulos del 8 al 12, exigen que los datos estén cuando menos en el nivel de intervalo. Además se formuló la suposición de que las poblaciones de las cuales se seleccionaron las muestras estaban distribuidas normalmente. Si los datos están al nivel nominal u ordinal y no puede cumplirse el supuesto de normalidad, es posible usar la *distribución ji cuadrada* como estadístico de prueba.

Se presentaron dos aplicaciones de la ji cuadrada: 1) la *prueba de bondad de ajuste,* y 2) clasificación cruzada de datos en una *tabla de contingencia.* Como lo indica el nombre, el objetivo de la prueba de bondad de ajuste es examinar cuán bien ajusta un conjunto de frecuencias observadas en un conjunto de frecuencias esperadas. El otro tipo de problemas donde se aplica la ji cuadrada se refiere a dos características de una persona. Los dos rasgos pueden ser la edad y la habilidad para conducir el automóvil o la afiliación religiosa y el grado de prejuicios. La hipótesis nula es que no existe relación entre los dos rasgos. Utilizando el procedimiento de prueba de hipótesis en cinco pasos, se toma una decisión acerca de la hipótesis nula, se acepta o rechaza.

El procedimiento de pruebas de hipótesis en cinco pasos es el siguiente: 1) Se establecen las hipótesis nula y alternativa. 2) Se selecciona un nivel de significación. 3) Se decide acerca del estadístico de prueba adecuado (ji cuadrada). 4) Se llega a una regla de decisión. 5) Se selecciona una muestra de la población y las frecuencias observadas, f_0, se comparan con las frecuencias esperadas, f_e. Con base en la regla de decisión y el valor calculado de X_2, la hipótesis nula se acepta o rechaza.

Recapitulación

I. Prueba de bondad de ajuste.
   A. Se aplica una prueba de bondad de ajuste para determinar si un conjunto de frecuencias observadas se ajusta a un conjunto de frecuencias coincidentes esperadas. Puede usarse para todos los niveles de datos: nominal, ordinal, de intervalo y de razón. No es necesario hacer suposiciones acerca de la distribución de la población de origen.
   B. El procedimiento es:
      1. Se establece H_0 y H_1.
      2. Se selecciona un nivel de riesgo, generalmente 0.10, 0.05 o 0.01.

3. La fórmula para calcular ji cuadrada es

$$\chi^2 = \sum\left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\right]$$

con $k - 1$ grados de libertad, donde k es el número de categorías.
4. La regla de decisión se basa en $k - 1$ grados de libertad y el nivel de significación seleccionado.
5. Se escoge una muestra de la población; χ^2 se calcula y su magnitud se compara con el valor crítico, con objeto de llegar a una decisión respecto a H_0.

II. Análisis de tablas de contingencia.
A. Sirve para probar si están relacionadas o no dos características. Las dos que posee una persona pueden ser afiliación política y punto de vista de la política actual enfocada a reducir el déficit federal.
B. El procedimiento es:
1. Clasificación cruzada de las dos características en una tabla de contingencia.
2. Determinación de la frecuencia esperada, f_e para una casilla (o celda) específica:

$$\text{Frecuencia esperada} = \frac{(\text{Total por renglón})(\text{Total por columna})}{\text{Gran total}}$$

3. Se determinan los grados de libertad para la tabla de contingencia por (renglones − 1)(columnas − 1).
4. Cálculo de la ji cuadrada para luego llegar a una decisión.

III. Características de la distribución ji cuadrada.
A. El valor de ji cuadrada siempre es positivo.
B. Existe una familia de distribuciones ji cuadrada. La forma de la distribución cambia para cada número de grados de libertad.
C. Las distribuciones de la estadística ji cuadrada tienen sesgo positivo, pero conforme aumenta el número de grados de libertad, la distribución se aproxima a la normal.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Una muestra de empleados de Carter Industries, interrogados respecto a la aceptación de un nuevo plan de pensión reveló lo siguiente:

	Opinión sobre el nuevo plan de pensiones				
Edad	*Superior*	*Muy bueno*	*Bueno*	*Regular*	*Insatisfactorio*
20-29	19	27	25	52	81
30-39	10	17	15	29	41
40-49	51	40	31	21	27
50 y mayor	142	81	16	9	8

¿Existe alguna relación entre la edad de un empleado y su opinión del nuevo plan? Pruebe al nivel 0.05. Use el procedimiento de cinco pasos para la prueba de hipótesis.

8. Una muestra de saldos insolutos en las cuentas de Southwestern Charge al primero de septiembre, se organizó en la siguiente distribución de frecuencias.

Monto del saldo insoluto	*Número de cuentas*
Menor de $20	13
desde $20 pero menor de $40	10
desde $40 pero menor de $60	15
desde $60 pero menor de $80	14
desde $80 pero menor de $100	9
desde $100 pero menor de $150	12
mayor de $150	11

Se va a probar, al nivel de riesgo 0.01, la hipótesis de que los saldos insolutos están distribuidos uniformemente en las siete categorías indicadas.

a. Establezca las hipótesis nula y alternativa.
b. Muestre, en forma gráfica, la regla de decisión.
c. Llegue a una decisión.

9. Suponga que desea probar si existe alguna relación entre los logros académicos (promedio final de calificaciones en la universidad) de un graduado en administración de empresas y su nivel de ingresos. La hipótesis nula es: no hay relación entre los logros académicos y el nivel de ingresos. H_1 establece que existe relación. Para esta prueba se seleccionó el nivel de significación 0.05.

   Se decidió clasificar los niveles de logros académicos de los graduados en administración de empresas en tres grupos: superior al promedio, promedio e inferior al promedio, que representan las puntuaciones finales de calificación 3.0–4.0, 2.5–2.29999 y 2.0–2.4999, respectivamente (se necesita 2–0 para la graduación y 4.0 indica que el alumno sólo obtuvo calificaciones A en la universidad).

   Los ingresos de los 751 considerados se clasificaron en cuatro niveles: bajo, medio bajo, medio alto y alto. Las respuestas de los 751 graduados se registraron en una tabla.

Logros académicos	*Nivel de ingresos*				
	Bajo	*Medio inferior*	*Medio superior*	*Alto*	*Total*
Superior al promedio	22	31	31	8	92
Promedio	67	80	73	17	237
Inferior al promedio	124	161	122	15	422

Fuente: Robert D. Mason, Alumni Study (Toledo, Ohio: Universidad de Toledo, Colegio de Administración de Empresas).

¿Existe alguna relación entre los logros académicos y el nivel de ingresos? Aplique el procedimiento de prueba de hipótesis en cinco pasos.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. En 1969, el Selective Service System (de Estados Unidos) llevó a cabo un sorteo para determinar el orden (o secuencia) en que los jóvenes serían llamados a filas en los servicios armados de Estados Unidos. El Selective Service System creó medidas complicadas para asegurar que las fechas de nacimiento se seleccionarán en forma aleatoria, y se asignará una secuencia de números. Desde entonces muchos críticos

han afirmado que el sorteo no fue aleatorio. Argumentan que aquellos jóvenes con fechas de nacimiento a finales de año, tienden a tener números más bajos en el sorteo y en consecuencia, tienen más probabilidad de ser reclutados.

La tabla siguiente muestra los resultados del sorteo de 1969. La primera columna de la izquierda muestra los días del mes; los 12 meses están alineados en la parte superior. Los números en el cuerpo de la tabla indican la secuencia de reclutamiento. Obsérvese que el número 001 aparece en el renglón 14 en la columna de septiembre: todos los que nacieron el 14 de septiembre fueron reclutados primero. Cuando se concluyó con ese grupo de hombres, todos los que nacieron el 24 de abril fueron reclutados (porque tienen el número 002). Después fueron reclutados los nacidos el 30 de diciembre, y así sucesivamente.

Fecha	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1	305	086	108	032	330	249	093	111	225	359	019	129
2	159	144	029	271	298	228	350	045	161	125	034	328
3	251	297	267	083	040	301	114	261	049	244	348	157
4	215	210	275	081	276	020	279	145	232	202	266	165
5	101	214	293	269	364	028	188	054	082	024	310	056
6	224	347	139	253	155	110	327	114	006	087	076	010
7	306	091	122	147	035	085	050	168	008	234	051	012
8	199	181	213	312	321	366	013	048	184	283	097	105
9	194	338	317	219	197	335	277	106	263	342	080	043
10	325	216	323	218	065	206	284	021	071	220	282	041
11	329	150	136	014	037	134	248	324	158	237	046	039
12	221	068	300	346	133	272	015	142	242	072	066	314
13	318	152	259	124	295	069	042	307	175	138	126	163
14	238	004	354	231	179	356	331	198	001	294	127	026
15	017	089	169	273	130	180	322	102	113	171	131	320
16	121	212	166	148	055	274	120	044	207	254	107	096
17	235	189	033	260	112	073	098	154	255	288	143	304
18	140	292	332	090	278	341	190	141	246	005	146	128
19	058	025	200	336	075	104	227	311	177	241	203	240
20	280	302	239	345	183	360	187	344	063	192	185	135
21	186	363	334	062	250	060	027	291	204	243	156	070
22	337	290	265	316	326	247	153	339	160	117	009	053
23	118	057	256	252	319	109	172	116	119	201	182	162
24	059	236	258	002	031	358	023	036	195	196	230	095
25	052	179	343	351	361	137	067	286	149	176	132	084
26	092	365	170	340	357	022	303	245	018	007	309	173
27	355	205	268	074	296	064	289	352	233	264	047	078
28	077	299	223	262	308	222	088	167	257	094	281	123
29	349	285	362	191	226	353	270	061	151	229	099	016
30	164		217	208	103	209	287	333	315	038	174	003
31	211		030		313		193	011		079		100

Para continuar, los varones nacidos el 8 de octubre tienen el número de sorteo 283. Esto significa que el suministro nacional de hombres nacidos en los otros 282 días tendría que concluir antes de llamar al servicio a los nacidos el 8 de octubre.

Un examen rápido de los números del sorteo parece indicar que los varones nacidos en los últimos tres o cuatro meses del año tienen números bajos y más probabilidad de ser reclutados. Para examinar esta aseveración un poco más, se pueden organizar los

números del sorteo en una tabla de contingencia de 3 por 4. Los números del sorteo pueden agruparse en bajo, medio y alto, y los meses separarse por trimestres. Interprete los resultados.

2. Los tiempos de servicio de cada uno de los magistrados adjuntos de la Suprema Corte de Estados Unidos se dieron en un capítulo anterior. Los datos aproximados se organizaron en la siguiente distribución de frecuencias. La media del número de años de servicio es 15.68 años, y la desviación estándar 9.57 años. ¿Estos datos pueden pertenecer a una población normal? Lleve a cabo una prueba apropiada. (Sugerencia: use la distribución normal estándar para determinar la proporción de magistrados adjuntos que deben aparecer en cada clase. Se necesitará calcular la probabilidad de pertenecer a una clase, obteniendo primero el valor z para los límites de clase.)

Años de servicios	*Frecuencia*
Hasta 5	12
Más de 5 y hasta 10	18
Más de 10 y hasta 15	12
Más de 15 y hasta 20	16
Más de 20 y hasta 25	11
Más de 25 y hasta 30	7
Más de 30 y hasta 35	8
Más de 35	1
Total	85

EXAMEN CAPITULO 16

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. En años recientes, 55% de los automóviles fabricados y vendidos en Estados Unidos fueron producidos por General Motors, 25% por Ford, 15% por Chrysler y 5% por los demás fabricantes (Honda, etc.). Una muestra registrada de las ventas de los automóviles construidos en Estados Unidos, la última semana, reveló que 174 fueron manufacturados por Chrysler, 275 por Ford, 330 por GM y 21 por todos los demás. Pruebe al nivel 0.05 la hipótesis de que no ha habido cambio en el patrón de ventas.

2. Doscientos hombres de varios niveles gerenciales seleccionados al azar fueron entrevistados respecto a su interés o preocupación por los temas ambientales. La respuesta de cada persona se registró en una de tres categorías: sin interés, algo de interés y gran interés. Los resultados fueron:

Nivel directivo	*Sin interés*	*Algo de interés*	*Gran preocupación*
Gerencia superior	15	13	12
Gerencia media	20	19	21
Supervisor	7	7	6
Jefe de grupo	28	21	31

Utilizando el nivel 0.01, determine si hay alguna diferencia en las respuestas con respecto al nivel gerencial.

Autoexámenes

16-1 1. Frecuencias observadas.
2. Seis (seis días de la semana).
3. 10. (total de frecuencias observadas) 6 = 60 6 = 10.
4. 5; $k - 0.1 = 6 - 1 = 5$.
5. 15.086 (de la tabla de ji cuadrada del apéndice I).
6. Cálculo:

$$\chi^2 = \sum\left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\right] = \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} = 0.8$$

7. Aceptada.
8. El ausentismo está distribuido uniformemente durante toda la semana. Las diferencias observadas se deben a variación del muestreo.

16-2 χ^2 resultó ser de 14.01, valor obtenido por

f_0	f_e	$f_0 - f_e$	$(f_0 - f_e)$	$\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$
30	32	−2	4	4/32 = 0.13
110	113	−3	9	9/113 = 0.08
86	87	−1	1	1/87 = 0.01
23	24	−1	1	1/24 = 0.04
5	2	3	9	9/2 = 4.50
5	4	1	1	1/4 = 0.25
4	1	3	9	9/1 = 9.00
		0		14.01

El valor crítico de χ^2 para $k - 1 = 7 - 1 = 6$ grados de libertad y el nivel 0.05 es 12.592. La χ^2 calculada (14.01) es mayor que este valor crítico, de modo que se rechaza la hipótesis nula. Existe diferencia entre el conjunto de frecuencias observadas y el conjunto de frecuencias esperadas.

16-3 1. $\chi^2 = 7.26$, valor obtenido por

f_0	f_e	$f_0 - f_e$	$(f_0 - f_e)$	$\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$
30	32	−2	4	0.13
110	113	−3	9	0.08
86	87	−1	1	0.01
23	24	−1	1	0.04
14	7	7	49	7.00
		0		7.26

2. El valor crítico de χ^2 para $k - 1 = 5 - 1 = 4$ grados de libertad y el nivel 0.05 es 9.488. El valor calculado de 7.26 es menor que 9.488, de modo que la hipótesis nula de que no existe diferencia entre los resultados de la muestra y los resultados esperados se acepta al nivel de significación 0.05.
3. Sí.

16-4 1. Tabla de contingencia.
2. No existe relación entre el nivel de educación y la frecuencia de las actividades sociales.
3. Se calcula $\chi^2 = 58.83$. Como es mayor que el valor crítico de 9.488, se rechaza la hipótesis nula. Cálculo de χ^2:

f_0	f_e	f_0	f_e	f_0	f_e	*Total*	%
20	6	10	12	10	22	40	10
30	24	50	48	80	88	160	40
10	30	60	60	130	110	200	50
60	60	120	120	220	220	400	100

$$\chi^2 = \frac{(20-6)^2}{6} + \frac{(10-12)^2}{110} + \cdots + \frac{(130-110)^2}{110}$$
$$= 32.67 + 0.33 + \cdots + 3.64$$
$$= 58.83$$

4. Existe una relación entre el nivel de educación y la frecuencia de las actividades sociales.

Examen capítulo 16

1. H_0: No ha habido cambio en el patrón de ventas.
   H_1: Sí ha habido cambio.
   El valor de la ji cuadrada (88.950) está en la región de rechazo (a la derecha de 7.815).

	f_0	f_e	$f_0 - f_e$	$\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$
GM	330	440	– 110	27.500
Ford	275	200	75	28.125
Chrysler	174	120	54	24.300
Todos los demás	21	40	– 19	9.025
	800	800	0	88.950

2. Como se indica en los cálculos siguientes, el valor de ji cuadrada es aproximadamente 1.550, que es menor que el valor crítico de 16.812. En consecuencia, se acepta la hipótesis nula que establece que no existe diferencia significativa en las respuestas con respecto al nivel gerencial. En otras palabras, no hay relación entre el nivel gerencial y el grado de preocupación por los temas ambientales. El valor crítico de 16.812 se determinó consultando el apéndice I para (renglones – 1) (columnas – 1) = (4 – 1)(3 – 1) = 6 grados de libertad.

Nivel directivo	*Sin interés*		*Algo de interés*		*Gran interés*		*Total*	
	f_0	f_e	f_0	f_e	f_0	f_e	*Número*	*Porcentaje*
Gerencia superior	15	(14)	13	(12)	12	(14)	40	20
Gerencia media	20	(21)	19	(18)	21	(21)	60	30
Supervisor	7	(7)	7	(6)	6	(7)	20	10
Jefe de grupo	28	(28)	21	(24)	31	(28)	80	40
	70	(70)	60	(60)	70	(70)	200	100

$$\chi^2 = \frac{(15-14)^2}{14} + \frac{(13-12)^2}{12} + \frac{(12-14)^2}{14} + \frac{(20-21)^2}{21} + \cdots = 1.550$$

17

Métodos no paramétricos: análisis de datos ordenados por rango

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Realizar una prueba de signo y explicar sus aplicaciones.
2. Describir y aplicar la prueba *U* de Mann-Whitney a datos de nivel ordinal.
3. Aplicar el análisis de variancia en un sentido, de Kruskal-Wallis por prueba de rangos a datos de nivel ordinal.
4. Describir la prueba de rango con signo de Wilcoxon por pares ajustados, o coincidentes, y sus aplicaciones.

En la introducción del capítulo 16 se trataron las pruebas de hipótesis no paramétricas, o libres de distribución. Se subrayó que la prueba de ji cuadrada para bondad de ajuste es muy útil para el nivel *nominal* de medición. Su objetivo es determinar si un conjunto observado de frecuencias, f_0, difiere en forma significativa, de otro conjunto correspondiente de frecuencias esperadas, f_e. En forma similar, si se tiene interés en la relación entre dos características, como la edad de un individuo y su preferencia musical, se lleva cuenta de la información en una tabla de contingencia y se usa la distribución ji cuadrada como estadístico de prueba. En estos dos tipos de problemas no es necesario suponer, por ejemplo, que la población de interés tiene distribución normal, como se hizo en las pruebas de hipótesis en los capítulos 8 a 12.

Este capítulo es una continuación de las pruebas de hipótesis diseñadas especialmente para datos no paramétricos. Sin embargo, en vez de aplicarse a datos de nivel nominal, como la prueba ji cuadrada, estos ensayos exigen que las respuestas sean cuando menos de *nivel ordinal.* Esto es, resulta imperativo que las respuestas se ordenen por rangos de bajo a alto. Un caso de ordenación por rango es el de los títulos de funcionarios administrativos. En una administración se jerarquizan, por ejemplo, como vicepresidente adjunto, vicepresidente, vicepresidente ejecutivo y presidente. Un vicepresidente tiene rango más alto que un vicepresidente adjunto; un vicepresidente ejecutivo tiene rango superior que un vicepresidente, etc.

En este capítulo se considerarán cuatro tipos de pruebas libres de distribución que necesitan ordenación por rango: prueba de signo, prueba *U* de Mann-Withney, análisis de variancia por prueba de rangos de Kruskal-Wallis y prueba de rangos con signo por pares ajustados, o coincidentes, de Wilcoxon.

PRUEBA DE SIGNO

La **prueba de signo** es una de las pruebas no paramétricas más simples. Como lo indica su nombre, se basa en el signo de una diferencia: positivo para una diferencia positiva, y negativo para una diferencia negativa. Por ejemplo, si unas ventas aumentaron de $34 698 en el mes de octubre a $51 276 en noviembre, ello corresponde a un signo positivo. Si una producción bajó de 98 000 unidades en el primer trimestre, a 51 000 en el segundo, ello se registra con signo negativo. En una prueba de signo, no se toma en cuenta la magnitud de la diferencia.

La prueba de signo tiene muchas aplicaciones, y una de ellas es en los experimentos de "antes y después". Como ilustración, supóngase que se hace una evaluación de un nuevo programa de afinación de motores de automóvil. Antes de la operación se registran las millas recorridas por galón de gasolina, y se registran de nuevo después de la afinación. En teoría, si tal afinación no fue efectiva, en forma aproximada la mitad de los automóviles probados mostraría un aumento en las millas por galón, y la otra mitad, una disminución. El signo "+" se asignaría al aumento, el signo "–" a la disminución.

Un experimento sobre la preferencia hacia un producto ilustrará otro uso de la prueba de signo. Una empresa tiene en el mercado dos clases de café envasado

en tarros de 4 onzas, descafeinado y normal. El departamento de investigación de mercado desea determinar si los bebedores de café prefieren el descafeinado o el normal. A treinta personas se les dio dos tazas pequeñas, sin marca alguna, y se les preguntó su preferencia. La elección por el descafeinado puede codificarse como "+" y la preferencia por el normal como "–". En cierto sentido los datos son de nivel ordinal, porque el bebedor de café puede dar a su producto preferido el rango superior: la otra clase sería de rango inferior. Como en el caso anterior, si los consumidores no tienen preferencia, se puede esperar que la mitad de los bebedores de café prefieran el descafeinado, y la otra mitad, el normal.

Muestras pequeñas

Si el número en la muestra es igual a o menor que 20, se considera que la muestra es pequeña. Con un ejemplo puede mostrarse mejor la aplicación de la prueba del signo. Se usará un experimento de "antes y después".

* Ejemplo

La dirección de la compañía Samuelson Chemicals recomendó realizar un programa de entrenamiento en computación en la planta para los gerentes, con el objeto de mejorar su conocimiento sobre el uso de computadoras en contabilidad, mantenimiento, producción y otras operaciones. Algunos gerentes opinaron que el programa sería valioso; otros discordaron y dijeron que no tendría valor alguno. A pesar de las objeciones, se anunció que las sesiones de computación principiarían el primer día del mes.

Se eligió al azar una muestra de 15 gerentes. El nivel general de capacidad de cada uno en cuanto a la computación lo determinó un grupo de expertos antes que principiara el programa. Su capacidad y comprensión se evaluaron como sobresalientes, excelentes, buenas, aceptables o deficientes (véase la tabla 17-1). Después

TABLA 17-1

Capacidad antes y después del programa de capacitación en computación

	Nombre	*Antes*	*Después*	*Signo de diferencia*
	J. A. Guerra	Bueno	Sobresaliente	+
	Angélica Padilla	Aceptable	Excelente	+
	Modesto Gómez	Excelente	Bueno	–
Eliminado del análisis	Miguel Ferreyra	Deficiente	Bueno	+
	~~Saúl Casas~~	~~Excelente~~	~~Excelente~~	~~0~~
	Elia Andrade	Bueno	Sobresaliente	+
	Guillermo González	Deficiente	Aceptable	+
	Jesús Molina	Excelente	Sobresaliente	+
	Mario Cuevas	Bueno	Deficiente	–
	Jesús Rodríguez	Deficente	Bueno	+
	Laura González	Bueno	Sobresaliente	+
	Javier Rodríguez	Aceptable	Excelente	+
	Martha Figueroa	Bueno	Aceptable	–
	J. Luis Rocha	Bueno	Sobresaliente	+
	Leticia Castañeda	Deficiente	Bueno	+

del programa de entrenamiento de tres meses, el mismo grupo de expertos evaluó de nuevo a cada gerente. Las dos evaluaciones (antes y después) se muestran junto con el signo de la diferencia. El signo "+" indica mejoría y el signo "–" señala que la capacidad declinó después del programa de entrenamiento.

Se tiene interés en determinar si dicho programa en la planta fue efectivo para mejorar la capacidad de los gerentes en materia de computación. Esto es, ¿tales gerentes son más aptos después del programa que antes?

✔ Solución

Paso 1. Como es el procedimiento usual, se establecen las hipótesis nula y alternativa. A continuación se muestran las hipótesis que se han de probar.

Hipótesis	*Significado*
Nula—$H_0 : p = 0.50$	No hay cambio en la capacidad como resultado del programa de entrenamiento en computación en la planta.
Alternativa—$H_1 : p > 0.50$	Se incrementa la capacidad en computación de los gerentes.

Si se acepta la hipótesis nula, se mostrará que los escépticos están en lo correcto: el programa de entrenamiento no produjo cambio alguno en el nivel de aptitud en computación.

La distribución binomial o binómica expuesta en el capítulo 16 se usa como estadístico de prueba. Es apropiada porque la prueba de signo cumple los requisitos binomiales, que son:

1. Sólo hay dos resultados posibles, un "éxito" o un "fracaso". Un gerente aumentó su capacidad en computación (éxito) o no lo hizo (fracaso).
2. Para cada ensayo se supone que la probabilidad de éxito es 0.50. La probabilidad de fracaso también es 0.50. Por tanto, H_0 es $p = 0.50$.
3. El número total de ensayos es fijo (15 en este experimento).
4. Cada ensayo es independiente. Esto significa que el aprovechamiento de José Luis en el curso de tres meses no está relacionado con el aprovechamiento de Leticia Castañeda.

Paso 2. Seleccionar un nivel de significación. Se escoge el nivel 0.10.

Paso 3. Decidir cuál será el estadístico de prueba. Será el número de signos positivos que resultaron en el experimento (11).

Paso 4. Plantear una regla de decisión. Se inscribieron en el curso de computación quince gerentes, pero Saúl Casas no mostró aumento o disminución en aptitud, de modo que se le eliminó de la prueba; entonces $n = 14$. Consultando la distribución

binomial de probabilidad en el apéndice A, para $n = 14$ y una probabilidad de 0.50, se tiene la distribución mostrada en la tabla 17-2. El número de éxitos está en la columna 1, la probabilidad de éxito en la columna 2 y la probabilidad acumulada en la columna 3.

TABLA 17-2

Distribución probabilística binomial para $n = 14$, $p = 0.50$

(1) Número de éxitos	*(2) Probabilidad de éxito*		*(3) Probabilidad acumulada*	
0	0.000		1.000*	
1	0.001		0.999	
2	0.006		0.998	
3	0.022		0.992	
4	0.061		0.970	
5	0.122		0.909	
6	0.183		0.787	
7	0.209		0.604	
8	0.183		0.395	
9	0.122		0.212	
10	0.061	↑	0.0.90	
11	0.022	Se suma hacia arriba	0.029	←0.000 + 0.001 + 0.006 + 0.022
12	0.006		0.007	
13	0.001		0.001	
14	0.000		0.000	

* La ligera diferencia se debe al redondeo.

Recuérdese que se seleccionó el nivel de significación 0.10. Para llegar a la regla de decisión, se pasa a las probabilidades acumuladas de la columna 3. Se lee de abajo hacia arriba y se encuentra la *probabilidad acumulada más cercana sin exceder el nivel de significación (0.10).* Esta probabilidad acumulada es 0.090. El número de éxitos (signos positivos) en la columna 1 que corresponde a 0.090 es 10. En consecuencia, la regla de decisión es: si el número de signos positivos en la muestra es 10 o más, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa. (Si tal prueba hubiera sido de una extremidad, con la región de rechazo en la cola inferior, se habrían determinado las probabilidades acumuladas sumando las probabilidades de éxito en la columna 2 desde arriba hacia abajo.)

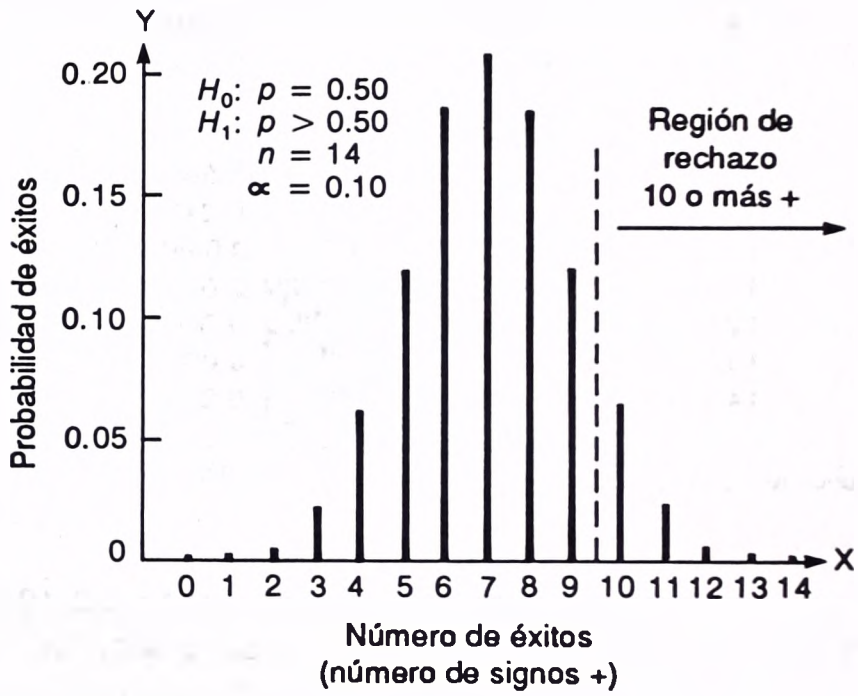
¿Qué procedimiento se sigue para la prueba con dos colas? Se combinan (suman) las probabilidades de éxito en las dos extremidades hasta llegar tan cerca de α como sea posible sin excederla. En este ejemplo, α es 0.10. La probabilidad de 3 o menos éxitos es 0.029, determinada por 0.000 + 0.001 + 0.006 + 0.022. La probabilidad de 11 o más éxitos también es 0.029. Sumando las dos probabilidades se tiene 0.058. Esto es lo más cercano posible a 0.10 sin excederlo. (Si se incluyeran las probabilidades de 4 y 10 éxitos, el total sería 0.180, lo cual excede

a 0.10). Por tanto, la regla de decisión para una prueba de dos colas sería rechazar la hipótesis nula si hay 3 o menos signos positivos, u 11 o más signos positivos.

Como se explicó en el capítulo 9, una prueba de hipótesis puede ser de una o de dos colas. Si en la hipótesis alternativa aparecen términos como *mayor que* o *aumentado,* la prueba es de *una cola.* La hipótesis alternativa en este problema es $p > 0.50$, lo cual indica que es aplicable la prueba de una cola. Además, el signo (>) apunta hacia la derecha, de modo que la región de rechazo está en la extremidad de la derecha. Esto se muestra en el diagrama 17-1.

DIAGRAMA 17-1

Regiones de aceptación y de rechazo, $n = 14$, $p = 0.50$



Paso 5. Once de los 14 gerentes considerados en el curso de computación aumentaron su aptitud computacional. El número 11 está en la región de rechazo, que principia en 10, de modo que H_0 se rechaza. El curso de computación en tres meses aumentó la capacidad de los gerentes. El curso sí fue eficaz. En realidad, se afirma que 11 de 14 personas mejoraron su capacidad y que este gran número de éxitos probablemente *no se debe al azar.*

Cabe observar que si la hipótesis alternativa no da una dirección (por ejemplo, $H_0 : p = 0.50$ y $H_1 : p \neq 0.50$), la prueba de hipótesis es de *dos colas.* En tales casos habrá dos regiones de rechazo: una en la cola inferior y otra en la superior. Si $\alpha = 0.10$ y la prueba es de dos colas, el área en cada extremidad es 0.05, ya que ($\alpha/2 = 0.10/2 = 0.05$). Esto se ilustra en el autoexamen 17-1.

AUTOEXAMEN 17-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Volviendo al problema de la empresa de café relacionado con una prueba de consumidores para determinar la preferencia hacia el descafeinado o el normal.

$$H_0 : p = 0.50 \qquad n = 12$$
$$H_1 : p \neq 0.50 \qquad \alpha = 0.10$$

1. ¿Esta prueba de hipótesis es de una o de dos colas?
2. Muestre en un diagrama la regla de decisión.
3. Denotando la preferencia del consumidor por el café descafeinado como "+", y la preferencia por el café normal como "–", se determinó que dos consumidores preferían el descafeinado. ¿Cuál es su decisión? Explique su respuesta.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Se supone que una compañía de televisión está considerando dos series de aventuras del tipo "western" para la próxima temporada. Una es "Solitario" y la otra es "Ganadero". Sólo una de ellas saldrá al aire. Para evaluar cuál tendrá preferencia se seleccionaron al azar 20 críticos que asistieron a una primera exhibición de un episodio de cada programa. La hipótesis nula que se probará es: no hay diferencia en la elección por una u otra serie. La hipótesis alternativa es: existe preferencia por una de las series. Las hipótesis se probarán al nivel 0.10.
   a. ¿Se usará una prueba de una o de dos colas?
   b. Al contar las preferencias se usará el signo "+" si el crítico prefiere "Solitario", y el signo "–" si prefiere "Ganadero". La cuenta de los signos "+" revela que 12 de los críticos prefieren "Solitario", a 7 les gustó "Ganadero" y 1 estuvo indeciso. Formule con palabras la regla de decisión, y represéntela en un diagrama.
   c. ¿Qué conclusión daría a la televisora? Explique su respuesta.
2. Se supone que Merrill Lynch desea otorgar un importante contrato de suministro de plumas de punto fino para uso en sus oficinas en el país. Dos proveedores, Bic y Pilot, han presentado las propuestas o licitaciones más bajas. Para determinar la preferencia de los empleados de oficina, de servicios y otros, se realizará una prueba de elección personal usando una muestra seleccionada al azar de 20 personas. Se aplicará un nivel de significación de 0.05.
   a. Si la hipótesis alternativa establece que se prefiere Bic en vez de Pilot, ¿la prueba del signo que se realizará será de una o de dos colas? Explique su respuesta.
   b. Conforme cada elemento de la muestra indica su preferencia a los investigadores, se anota el signo "+" si prefiere Bic o el signo "–" si prefiere Pilot. La cuenta de los signos "+" reveló que 12 empleados prefieren Bic, 5 prefieren Pilot y 3 quedaron indecisos. ¿Cuál es el valor de n?
   c. Exprese en palabras la regla de decisión y represéntela en un diagrama.
   d. ¿A qué conclusión se llega respecto a la preferencia por las plumas? Explique su respuesta.

3. Muchos corredores de valores con poca experiencia se resisten a hacer presentaciones ante personas de edad, banqueros y otros grupos. Al percibir esta falta de confianza en ellos mismos, la dirección hizo arreglos para que un grupo muestra de tales corredores asistiera a un seminario para lograr la autoconfianza y contrató a una organización capacitadora para que impartiera un curso de tres semanas. Antes de la primera sesión, los instructores midieron el nivel de confianza de cada participante y volvieron a medirlo otra vez después del seminario. Los niveles de autoconfianza "antes" y "después" para los 14 asistentes al curso se muestran a continuación. La autoconfianza se clasificó como negativa, baja, alta y muy alta.

Corredor	*Antes de seminario*	*Después del seminario*
J. M. Martín	Negativa	Baja
T. D. Jaimes	Negativa	Negativa
A. D. Horacio	Baja	Alta
T. A. Juárez	Muy alta	Baja
J. J. Cortina	Baja	Alta
D. A. Servín	Baja	Alta
C. B. Salas	Negativa	Alta
F. M. Ortega	Baja	Muy alta
C. C. Fernández	Baja	Alta
A. A. Ugalde	Negativa	Baja
M. R. Marcos	Baja	Alta
P. A. Arista	Negativa	Baja
B. K. Paredes	Baja	Alta
N. S. Watson	Baja	Muy alta

El objetivo de dicho estudio es verificar la efectividad de la organización capacitadora para elevar la autoconfianza de ese personal. Esto es, ¿el nivel de autoconfianza fue más alto después del seminario que antes?

a. Establezca las hipótesis nula y alternativa.
b. Usando el nivel de significación 0.05, exprese la regla de decisión con palabras o en un diagrama.
c. Llegue a conclusiones sobre el seminario ofrecido por la citada organización.

4. Una compañía de alimentos de bajas calorías tiene desayunos, comidas y cenas. Quien se afilie a su club recibirá dos paquetes de alimentos al día. La firma asegura que se puede comer lo que se desee como tercer alimento, y aún así perder cuando menos cinco libras de peso durante el primer mes. A quienes participan se les pesa antes de comenzar el programa y de nuevo al final del primer mes. La experiencia de una muestra aleatoria de 11 participantes es:

Nombre	*Cambio en el peso*
Fragoso	Pérdida
Tenorio	Pérdida
Landeros	Aumento
Ruíz	Pérdida
Silva	Sin cambio
Contreras	Pérdida
Hernández	Pérdida
Carrillo	Pérdida
Higuera	Pérdida
Hidalgo	Pérdida
Jiménez	Pérdida

Se desea verificar si se pierde peso como resultado del programa de esa organización.
a. Establezca H_0 y H_1.
b. Usando el nivel de significación 0.05, ¿cuál es la regla de decisión?
c. ¿Cuál sería la conclusión respecto al programa en cuestión?

Muestras grandes

Si el número de pares utilizables de la muestra es mayor que 20, se considera que la muestra es "grande". Algunos investigadores consideran una muestra de 11 o más como grande, pero aquí se usará un límite de 20.

En vez de aplicar una distribución binomial a problemas que comprenden muestras grandes y la prueba de signo, se usará la distribución normal de probabilidad. Tanto np como $n(1 - p)$ deben ser mayores que 5 para que sea aplicable la prueba.

La media de una distribución normal es

$$\mu = 0.50n$$

La desviación estándar es

$$\sigma = 0.50\sqrt{n}$$

El estadístico de prueba z es

$$z = \frac{(X \pm 0.50) - \mu}{\sigma}$$

Si el número de signos + o – *es mayor que* n/2, se usa la siguiente forma del estadístico de prueba:

$$z = \frac{(X - 0.50) - \mu}{\sigma} + \frac{(X - 0.50) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}}$$

Si el número de tales signos es *menor que* n/2, el estadístico de prueba z es:

$$z = \frac{(X + 0.50) - \mu}{\sigma} + \frac{(X + 0.50) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}}$$

En las fórmulas anteriores, X es el número de signos + o –. El valor + 0.50 o – 0.50 es el *factor de corrección de continuidad,* presentado en el capítulo 7. Abreviando, se aplica cuando una distribución continua tal como la distribución normal (la cual se está utilizando) se emplea para aproximar una distribución discreta (la binomial).

* Ejemplo

Una empresa de refrescos embotellados ha encomendado al departamento de investigación de mercado poner a prueba un nuevo producto. Se consideran dos versiones: una bebida más bien dulce y otra algo amarga. Se va a hacer una prueba formada por una muestra de 64 consumidores. Cada uno catará la bebida dulce

(marcada A) y la amarga (designada B) indicando su preferencia. ¿Cómo se efectuará la prueba de hipótesis y qué bebida deberá lanzarse al mercado?

✔ Solución

Paso 1. Establecer las hipótesis nula y alternativa.

$H_0 : p = 0.50$ No hay preferencia.
$H_1 : p \neq 0.50$ Hay preferencia.

Paso 2. Seleccionar un nivel de significación. Es el nivel 0.05.

Paso 3. Seleccionar el estadístico de prueba. Es z.

$$z = \frac{(X \pm 0.50) - \mu}{\sigma}$$

donde $\mu = 0.50n$ y $\sigma = 0.50\sqrt{n}$.

Paso 4. Determinar una regla de decisión. Consultando el apéndice D (Areas Bajo la Curva Normal) para una prueba de dos colas los valores críticos son + 1.96 y – 1.96. Recuérdese que para tal prueba se divide alfa entre dos y se asigna una mitad a cada extremidad. Esto es, $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$. Continuando, $0.5000 - 0.025 = 0.4750$. Investigando para 0.4750 en el cuerpo de la tabla y leyendo el valor z en el margen izquierdo, se determina 1.96, el valor crítico. En consecuencia, no se rechaza H_0 si el valor calculado de z está entre + 1.96 y – 1.96. De otra forma, se rechaza H_0 y se acepta H_1.

Paso 5. Calcular z y comparar después el valor calculado con el valor crítico de 1.96. Adoptar una decisión respecto a H_0.

Se asignó "+" a la preferencia por A y "–" a la preferencia por B. De la muestra de 64, se tiene que 46 prefirieron A. En consecuencia, hay 46 signos +. Puesto que 46 es *mayor que* $n/2 = 64/2 = 32$, se usa esta versión de la fórmula para z:

$$z = \frac{(X - 0.50) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}}$$
$$= \frac{(46 - 0.50) - 0.50(64)}{0.50\sqrt{64}} = 3.375$$

El valor calculado de z igual a 3.375 está en la región más allá de 1.96. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula de que no hay diferencia al nivel 0.05. Se concluye que la preferencia por cada una de las dos bebidas sobre la otra no es la misma.

AUTOEXAMEN 17-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

$H_0 : p = 0.50 \quad H_1 : p > 0.50$ nivel 0.05 $n = 100$

Para una prueba de "antes y después", un "+" indica que un atleta aumentó de peso después de ingerir dosis muy grandes de vitaminas selectas. Un "–" indica pérdida de peso. Ochenta atletas aumentaron de peso. ¿Puede decirse que las vitaminas son eficaces para incrementar el peso de los atletas? Explique usted su procedimiento y su decisión.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Un restaurante anunció que en la noche del jueves el menú consistirá en platillos inusitados para gourmets, como calamar, liebre, caracoles, salmón ahumado y ensalada especial. Como parte de una encuesta más amplia, se preguntó a una muestra de 81 clientes regulares si preferían el menú normal o el menú para gourmets. Utilizando la prueba del signo y el nivel 0.02, pruebe si a los clientes les agradó más el menú anterior que el normal. Justifique su conclusión.
6. Los trabajadores de ensamblaje en una industria de computadoras arman sólo uno o dos subensambles y los insertan en un bastidor. Los directores de la compañía creen que los trabajadores sentirían más satisfacción por su trabajo si armaran todos los subensambles y probaran la computadora completa. Seleccionan una muestra de 25 empleados para experimentar con la idea. Después de un programa de entrenamiento, se preguntó a cada trabajador su preferencia. A veinte les agradó la acción propuesta. La hipótesis alternativa es que a los obreros les gusta más armar la unidad completa en vez de armar uno o dos subensambles solamente. Al nivel 0.05, use la prueba de signo para llegar a una decisión. Explique los pasos que siguió para llegar a una decisión.

Prueba de una hipótesis con respecto a una mediana

La mayoría de las pruebas de hipótesis que hasta ahora se han realizado comprenden la media poblacional o una proporción. La prueba de signo es una de las pocas que pueden servir para probar el valor de una mediana. Recuérdese del capítulo 3 que la mediana es el valor arriba del cual queda la mitad de las observaciones, y abajo del cual se encuentra la otra mitad. Para salarios (por hora) de \$7, \$9, \$11 y \$18 (dólares), la mediana es \$10. La mitad de los salarios son superiores a \$10 por hora y la otra mitad menores que \$10.

A fin de realizar una prueba de hipótesis, a un valor superior al de la mediana le corresponde signo +. A un valor inferior al de la mediana se le asigna signo –. Si un valor es igual a la mediana, se elimina del análisis. El procedimiento es idéntico al seguido en los casos de muestra pequeña y de muestra grande.

✱ Ejemplo

Una gran cadena de tiendas desea probar la hipótesis de que la mediana de una nota de venta de abarrotes es $23 (dólares). Una muestra aleatoria de 102 notas reveló que 60 de ellas eran superiores a $23, 40 eran menores que $23, y 2 fueron exactamente iguales a $23. Pruebe al nivel 0.10 que la mediana es $23.

✔ Solución

$$H_0 : \text{mediana} = \$23$$
$$H_1 : \text{mediana} \neq \$23$$

Esta es una prueba de dos colas porque la hipótesis alternativa no establece una dirección (ya sea menor que o mayor que $23).

El valor crítico es ± 1.645, determinado por medio de $\alpha/2 = 0.10/2 = 0.05$. Se halla $0.5000 - 0.05 = 0.4500$. Encuentre 0.4500 en el apéndice D y lea el valor crítico de z en el margen izquierdo. Es 1.645.

$$\mu = 0.50n = 0.50(100) = 50$$
$$\sigma = 0.50\sqrt{n} = 0.50\sqrt{100} = 5$$

Se utiliza la versión siguiente de la fórmula para z porque 60 es mayor que $n/2$, ya que $100/2 = 50$.

$$z = \frac{(X - 0.50) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}} = \frac{(60 - 0.50) - 0.50(100)}{0.50\sqrt{100}} = 1.90$$

Puesto que 1.90 está en el área más allá de 1.645, la hipótesis nula se rechaza al nivel 0.10. La mediana no es $23.

AUTOEXAMEN 17-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Realice una prueba de hipótesis acerca de la mediana del ingreso que perciben ingenieros de control de calidad en la industria automovilística. Las hipótesis son: H_0 : mediana = $52 000 (dólares); H_1 : mediana $52 000. Se probará al nivel 0.05. Una muestra de 100 ingenieros reveló que 54 tenían ingresos superiores a $52 000, y el resto tenía ingresos menores que $52 000. ¿Cuál es su decisión?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Se afirma que la mediana del ingreso anual de programadores en computación, cuando menos con cinco años de experiencia, es $40 000 (dólares). Esta afirmación es rebatida por los programadores, que dicen que la mediana del ingreso anual es mayor que $40 000 (dólares). Para resolver la controversia, se seleccionó una muestra aleatoria

de 205 programadores. Se encontró que 170 tenían ingresos superiores a $40 000, 5 ganaban $40 000 exactamente, y los restantes tenían ingresos inferiores a $40 000.
a. Establezca las hipótesis nula y alternativa.
b. Usando el nivel 0.05, enuncie (en palabras) la regla de decisión.
c. Haga los cálculos necesarios y exprese sus conclusiones.

8. Una compañía aeronáutica afirma que la mediana del precio de un boleto de viaje redondo a un cierto lugar es de $503 (dólares). Esta afirmación fue puesta en duda por la Asociación de Agencias de Viajes. Para resolver el asunto, se seleccionó una muestra aleatoria de 400 boletos de viaje redondo. De éstos, 160 boletos costaron menos de $503.
a. Decida acerca de las hipótesis nula y alternativa, nivel de significación y demás condiciones.
b. Tome una decisión respecto a la controversia.

PRUEBA *U* DE MANN-WHITNEY

La llamada **prueba *u* de Mann-Whitney** para la significación es especialmente útil cuando se seleccionan dos conjuntos aleatorios *independientes* de observaciones muestrales, son por lo menos de *nivel ordinal;* esto es, los datos deben ser tales que puedan ordenarse en rangos de alto a bajo (o de bajo a alto).

El objetivo expreso de tal prueba de Mann-Whitney es *determinar si las dos muestras independientes provienen o no de la misma población.*

Además de su aplicación en problemas que comprenden datos a nivel ordinal, muchos investigadores prefieren usar la prueba de Mann-Whitney en vez de la prueba *t* de Student: 1) en casos donde hay duda sobre si el nivel de medición es en verdad de intervalo, y 2) cuando las variancias de la población no son iguales.

Si la mayor de las dos muestras tiene 20 o menos observaciones, se enfoca como *muestra pequeña.* En otro caso, se considera que las muestras son grandes.

Muestras pequeñas

Supóngase que existe interés en determinar si hay diferencia en la aptitud mecánica entre los trabajadores de sexo masculino o femenino en una línea industrial de ensamble. Para resolver el asunto, se seleccionaron al azar nueve hombres y cinco mujeres y se sometió a cada persona a una prueba de aptitud mecánica. En este problema se aplica la prueba no paramétrica de Mann-Whitney (propuesta por Mann y Whitney en 1947), en vez de la prueba paramétrica *t* de Student presentada en el capítulo 11. ¿La razón? No se desea suponer 1) que los registros de la aptitud mecánica están distribuidos en forma normal, o bien 2) que las variancias de la población son iguales.

Se siguen los cinco pasos usuales para llegar a una decisión respecto a las diferencias observadas en la aptitud mecánica de los dos grupos.

Paso 1: Hipótesis nula y alternativa

H_0: Las distribuciones de las aptitudes mecánicas de hombres y mujeres son las mismas.
H_1: Las distribuciones no son las mismas.

Debido a la forma como se enuncia la hipótesis alternativa se sabe que es aplicable una prueba de dos colas.

Paso 2: Nivel de significación Se decidió que $\alpha = 0.05$.

Paso 3: Prueba estadística La prueba *U* de Mann-Whitney es la apropiada porque los datos (registros de la prueba de aptitud mecánica) pueden considerarse por rangos para el objetivo de la prueba. También debe observarse que las muestras son independientes, requisito previo para el uso de la prueba *U* de Mann-Whitney. Esto es, la aptitud mecánica de un hombre en ninguna forma afecta la aptitud de una mujer.

Paso 4: Regla de decisión Los valores críticos para el estadístico *U* se encuentran en el apéndice J. A continuación se muestra una parte de la tabla del apéndice.

Recuérdese que nueve hombres y cinco mujeres se sometieron a la prueba de aptitud mecánica, de modo que $n_1 = 9$ y $n_2 = 5$. Se recorre horizontalmente la parte superior de la tabla hasta localizar el número 9. Luego se baja por esa columna hasta el renglón con el número 5 a la izquierda. Se encuentra el número 7, o sea, el valor crítico.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2								0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3					0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4				0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5			0	1	2	3	5	6	$\boxed{7}$	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6			1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7			1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34

Debe observarse que el apéndice J está dividido en dos tablas. La superior es para el nivel 0.025 (una cola) o el nivel 0.05 (dos colas). La interior es para el nivel 0.05 (una cola) o el 0.10 (prueba de dos colas). Se tiene, por tanto, cierta limitación en la selección del valor de α.

Ahora se analiza para la regla de decisión. La hipótesis nula se *rechaza* si el valor calculado, denotado por *U*, es 7 *o menor*. De otra forma, se aceptará. (Obsérvese que esto es precisamente lo contrario al procedimiento seguido en la toma de decisión de la mayoría de otras pruebas de significación.) La regla de decisión se muestra en forma esquemática:

Región de rechazo	Región de aceptación
0	7

Valor crítico

Paso 5: La decisión Los nueve hombres y las cinco mujeres se sometieron a una prueba de aptitud mecánica y las puntuaciones originales de la prueba variaron

desde un máximo de 1 600 hasta un mínimo de 600 (véase la tabla 17-3). Con referencia a las puntuaciones, la más alta (1 600) la obtuvo un hombre y tiene el rango 1. La siguiente marca más alta, 1 500, también la obtuvo un hombre y tiene el rango 2. La siguiente marca, 1 400, la obtuvo una mujer y tiene el rango 3. Otra mujer calificó en el 4, o bien cuarto, un hombre en el quinto, una mujer en el sexto y así sucesivamente. Aparentemente los rangos se distribuyen de manera uniforme entre los dos sexos. (Las puntuaciones podrían haberse ordenado por rango de menor a mayor, en vez de mayor a menor.)

TABLA 17-3

Puntuaciones y rangos de hombres y mujeres en la prueba de aptitudes mecánicas

Hombres		*Mujeres*	
Puntuación	*Rango*	*Puntuación*	*Rango*
1 500	2	1 400	3
1 600	1	1 200	6
670	13	780	12
800*	10.5	1 350	4
1 100	8	890	9
800*	10.5		34
1 320	5		
1 150	7		
600	14		
	71		

* Observe que hay dos puntuaciones de 800, que tendrían los rangos 10 y 11. El empate se resolvió asignando a cada puntuación la media aritmética del rango, 10.5. Si hubiera habido valores iguales entre los rangos 6, 7 y 8, a cada uno se le habría asignado la media aritmética del rango, 7. Si hay un gran número de valores iguales, por lo general se aplica un factor de corrección. Esto es un poco complicado y no se analizará en este texto introductorio. [Véase S. Siegel, Nonparametric Statistics (Nueva York: McGraw-Hill, 1956), págs 123-25.]

Se calculan dos estadísticos, U y U', por medio de

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \Sigma R_1 \qquad U' = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \Sigma R_2$$

donde:

n_1 es el tamaño de una muestra. Hay nueve hombres, de modo que $n_1 = 9$.

n_2 es el tamaño de otra muestra. Hay cinco mujeres, por lo que $n_2 = 5$.

ΣR_1 es la suma de los rangos para la muestra denotada como 1. La suma de los rangos de los varones es 71.

ΣR_2 es la suma de los rangos para la muestra denotada como 2. La suma de los rangos de las mujeres es 34.

Sustituyendo los valores apropiados, se tiene:

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \Sigma R_1 \qquad U' = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \Sigma R_2$$

$$= (5)(9) + \frac{9(9+1)}{2} - 71 \qquad = (5)(9) + \frac{5(5+1)}{2} - 34$$

$$= 19 \qquad = 26$$

Como comprobación:

$$\begin{aligned} U' &= n_1 n_2 - U \\ &= (5)(9) - 19 \\ &= 26 \text{ (igual que lo calculado antes)} \end{aligned}$$

El menor valor calculado para U, 19 en este problema, sirve para llegar a la decisión de rechazar o aceptar la hipótesis nula, es decir, que no hay diferencia en la distribución de los rangos altos y bajos entre las dos muestras. El valor 19 calculado para U es mayor que el valor crítico de 7, así la regla de decisión ordena que se acepte la hipótesis nula al nivel 0.05. No hay diferencia entre las aptitudes mecánicas de los hombres y mujeres que trabajan en la línea de ensamble.

A continuación se ilustra un caso claramente definido donde se rechaza la hipótesis nula. Por ejemplo, supóngase que las puntuaciones de la prueba de aptitud mecánica hubieran dado como resultado los conjuntos de puntuaciones que se muestran en la tabla 17-4. Un examen superficial de los rangos (que se han ordenado de más alto a más bajo) lleva a la conclusión que hay dos poblaciones separadas, una de hombres y otra de mujeres. Los rangos bajos están asociados a marcas de hombres, en tanto que los rangos altos son de las mujeres. Cualesquiera de los

TABLA 17-4

Puntuaciones y rangos de hombres y mujeres en la prueba de aptitudes mecánicas

Hombres		*Mujeres*	
Puntuación	*Rango*	*Puntuación*	*Rango*
1 200	8	1 600	1
1 190	9	1 580	2
1 175	10	1 450	3
1 160	11	1 310	4
1 097	12	1 275	5
940	13	1 250	6
800	14	1 230	7
790	15		
670	16		
650	17		
620	18		

cálculos para U o U' decididamente será menor que el valor crítico, originando así, como sería de esperar, que se rechace H_0. (Tal vez se desee verificar esta afirmación.)

AUTOEXAMEN 17-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En una firma se imparte, bajo el auspicio de una organización, un curso sobre los principios de administración, a un grupo de subgerentes y supervisores. Las muestras aleatorias de las puntuaciones obtenidas son:

Grupo 1: Subgerentes: 121, 180, 122, 160, 141, 97, 212, 186.
Grupo 2: Supervisores: 128, 197, 180, 126, 167, 99, 147.

Se sabe que la población de puntuaciones no se distribuye normalmente. Por tanto, no puede aplicarse la prueba t de Student y se usa una prueba U de Mann-Whitney de dos colas y nivel 0.05:

1. Establezca H_0 y H_1.
2. ¿Cuál es el valor crítico? Muestre las regiones de aceptación y rechazo (tenga cuidado).
3. Asigne rangos a las puntuaciones de menor a mayor (cuidado con los valores iguales), calcule U y U' y tome una decisión.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. Dos grupos de músicos profesionales, de rock y country-western, están en estudio. Un aspecto considera las edades de quienes se hallan en cada grupo. No puede asegurarse que las dos poblaciones de edades sean normales. Por tanto, se aplica la prueba U de Mann-Whitney a la muestra de edades. Las de los músicos de rock seleccionadas al azar para el estudio son: 28, 16, 42, 29, 31, 22. 50, 42, 23 y 25. Las de los músicos de country-western son: 26, 42, 65, 38, 29, 32, 59, 42, 27, 41, 46 y 18.

   Pruebe al nivel 0.05 que los músicos del género country-western son de mayor edad que los de rock. (Al decir *de mayor edad* se entiende una prueba de una cola. Asegúrese de usar la tabla inferior del apéndice J para el valor crítico, porque corresponde a prueba de una cola usando el nivel 0.05.)

10. Se enseña un procedimiento de ensamble a un grupo de personas empleando la secuencia de pasos ya conocida. Se enseña a otro grupo usando una técnica experimental. Los tiempos (en segundos) necesarios para ensamblar la unidad para las dos muestras fueron:

    Grupo que usa los pasos conocidos: 41, 36, 42, 39, 36, 48.
    Grupo que usa la técnica experimental: 21, 27, 36, 20, 19, 21, 39, 24, 22.

    Con la prueba U de Mann-Whitney y el nivel 0.05 de riesgo, pruebe la afirmación de que el grupo experimental necesitó de menos tiempo para ensamblar la unidad. Como es usual, enuncie las hipótesis nula y alternativa, y la regla de decisión, calcule U y U' y adopte una decisión.

Muestras grandes

Conforme aumentan los tamaños de las dos muestras independientes, la distribución del estadístico U tiende hacia la distribución normal. Por tanto, si una de las muestras excede de 20 observaciones, se aplica una forma de la prueba z. (Algunos investigadores aplican la aproximación normal si ambos tamaños de muestra son iguales o mayores que 10.) El estadístico de prueba z es:

$$z = \frac{\Sigma R_1 - \Sigma R_2 - \left[(n_1 - n_2)\dfrac{n_1 + n_2 + 1}{2}\right]}{\sqrt{n_1 n_2\left[\dfrac{n_1 + n_2 + 1}{3}\right]}}$$

✱ Ejemplo

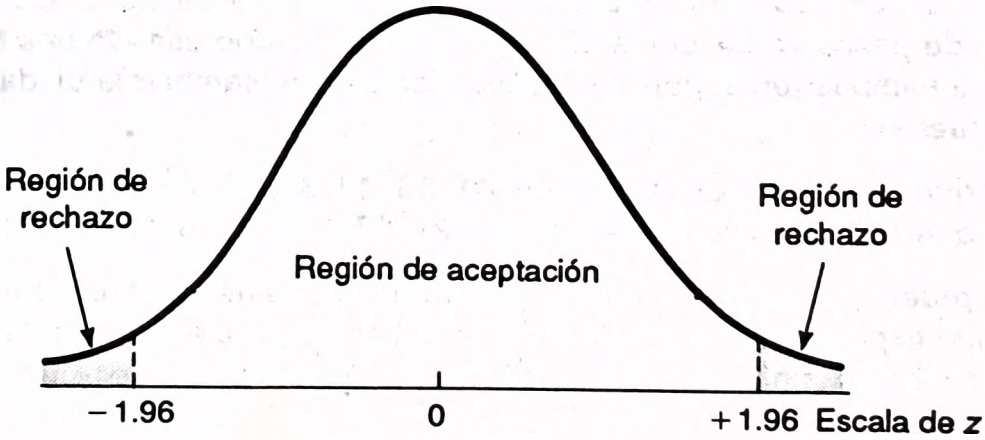
Continuando con el mismo tipo de problema, supóngase que 20 mujeres y 15 hombres se someten a una prueba de aptitud mecánica. Las calificaciones de tal aptitud se clasificaron en los siguientes rangos.

Rangos para las mujeres					*Rangos para los hombres*		
7	33	39	16	19	26	6	38
20	1	2	37	29	10	14	24
27	9	5	23	31	30	17	40
28	13	36	15	18	3	22	25
4	21	8	11	35	32	34	12

¿Existe alguna diferencia significativa en la aptitud mecánica entre mujeres y hombres?

✔ Solución

H_0 establece que no hay diferencia en las aptitudes mecánicas de mujeres y varones. Se emplea una prueba de dos colas y el nivel 0.05. El valor crítico de z es 1.96, tomado del apéndice D. Las áreas de aceptación y rechazo serían como sigue:



El número en cada muestra y la suma de los rangos son:

Rangos para las mujeres					*Rangos para los hombres*		
7	33	39	16	19	26	6	38
20	1	2	37	29	10	14	24
27	9	5	23	31	30	17	40
28	13	36	15	18	3	22	25
4	21	8	11	35	32	34	12
$n_1 = 25$			$\Sigma R_1 = 487$		$n_2 = 15$		$\Sigma R_2 = 333$

Se sustituyen los valores apropiados en la fórmula de z y se tiene

$$z = \frac{\Sigma R_1 - \Sigma R_2 - \left[(n_1 - n_2)\dfrac{n_1 + n_2 + 1}{2}\right]}{\sqrt{n_1 n_2\left[\dfrac{n_1 + n_2 + 1}{3}\right]}}$$

$$= \frac{487 - 333 - \left[(25 - 15)\dfrac{25 + 15 + 1}{2}\right]}{\sqrt{(25)(15)\left[\dfrac{25 + 15 + 1}{3}\right]}}$$

$$= -0.71$$

El valor calculado de z (– 0.71) queda entre – 1.96 y + 1.96, de modo que se acepta la hipótesis nula de que no existe diferencia al nivel 0.05.

¿ES POSIBLE APLICAR PRUEBAS QUE NECESITAN MEDICION ORDINAL A DATOS DE NIVEL MAS ELEVADO?

Recuérdese que la prueba de Mann-Whitney necesita un nivel ordinal de medición (datos que pueden ordenarse por rangos). Antes de exponer otras dos pruebas que necesitan medición ordinal, debe observarse que dichas pruebas y otras más (no descritas en este libro) pueden aplicarse a datos de niveles de intervalo y de razón. Esto se debe a que tales datos los pueden convertir en mediciones a nivel ordinal, ordenándolos en forma ascendente y asignando a cada número un rango, principiando con 1. Por ejemplo, los siguientes son los pesos en libras de cuatro jugadores de futbol americano: 260, 311, 255, 288. Los pesos se pueden ordenar de menor a mayor (255, 260, 288, 311) y asignarles los rangos 1, 2, 3 y 4. Después pueden aplicarse las pruebas de Mann-Whitney y otras (que se exponen a continuación).

Sin embargo, no se permite realizar pruebas paramétricas que necesitan cuando menos datos de nivel de intervalo (tales como ANOVA y t de Student) en datos de nivel ordinal. Esto se debe a que los rangos 1, 2, 3, 4, . . . no pueden ser convertidos a niveles de medición de intervalo o de razón. Por ejemplo, no es posible convertir el orden de llegada 1, 2 y 3 en la carrera de Indianápolis 500, a valores en millas por hora.

En resumen:

1. Se pueden aplicar pruebas que necesitan medición a nivel ordinal, como la prueba de Mann-Whitney, a problemas que comprenden datos a niveles de intervalo o razón.
2. No pueden aplicarse pruebas paramétricas, como la prueba *t*, a nivel ordinal (por rangos) de medición.
3. Si se tiene medición a niveles de intervalo o de razón, y si se cumplen ciertas consideraciones especificadas, como normalidad de la población, debe realizarse una prueba paramétrica.
4. Si se tiene medición a niveles de intervalo o de razón y si no se pueden cumplir la consideración de normalidad y otras más, hay que usar una prueba libre de distribución, como alguna de las descritas en este capítulo.

PRUEBA DE KRUSKAL-WALLIS: ANALISIS DE VARIANCIA POR RANGOS

El procedimiento de análisis de variancia (ANOVA) expuesto en el capítulo 12 sirve para determinar si son iguales tres o más medias poblacionales. Los datos fueron a niveles de intervalo o razón, se supuso que las poblaciones estaban normalmente distribuidas y que eran iguales las desviaciones estándares de dichas poblaciones. ¿Qué pasaría si los datos fueran de escala ordinal y/o las poblaciones no fueran normales? Afortunadamente, W. H. Kruskal y W. A. Wallis elaboraron una prueba no paramétrica de significación, en 1952, que sólo necesita datos a nivel ordinal (por rangos). Tal prueba no exige suposiciones respecto a la forma de las poblaciones. La prueba se conoce como **análisis de variancia de un sentido por rangos de Kruskal-Wallis.**

Para que sea aplicable dicha prueba de Kruskal-Wallis, las muestras seleccionadas de la población deben ser *independientes*. Por ejemplo, si las muestras de tres grupos (ejecutivos, personal directivo medio y supervisores) se van a entrevistar y seleccionar, las respuestas de un grupo (digamos, los ejecutivos) en ninguna forma pueden influir en las respuestas de otros.

Para la prueba de Kruskal-Wallis, 1) se combinan todos los valores de las muestras, 2) se ordenan los valores de menor a mayor, y 3) los valores ordenados se reemplazan por rangos *principiando con 1 para el valor más bajo*. Un ejemplo aclara el procedimiento.

* Ejemplo

Se va a llevar a cabo un seminario de administración para un gran número de ejecutivos de manufactura, finanzas y comercio. Antes de programar las sesiones del seminario, el director del seminario se interesó en determinar si los tres grupos tenían conocimientos semejantes sobre los principios de administración o geren-

ciales. Se planea tomar muestras de los ejecutivos de manufactura, finanzas y comercio, y aplicar una prueba a cada uno. Si no existe diferencia entre las tres distribuciones, el director del seminario impartirá una sola sesión. Sin embargo, si se encuentra diferencia en las puntuaciones, se impartirán sesiones separadas.

Se utilizará la prueba de Kruskal-Wallis en vez de ANOVA porque el director del seminario no desea suponer que 1) las poblaciones de las puntuaciones sobre principios gerenciales se distribuyen en forma normal, o 2) las variancias poblacionales son iguales.

✔ Solución

El primer paso en la prueba de hipótesis es establecer las hipótesis nula y alternativa.

H_0: Son iguales las distribuciones de las puntuaciones sobre principios de administración para las poblaciones de ejecutivos en manufactura, finanzas y comercio.
H_1: No todas las distribuciones son iguales.

El director del seminario selecciona 0.05 como nivel de riesgo.

El estadístico de prueba usado para la prueba de Kruskal-Wallis se denota por H. Su fórmula es:

$$\boxed{H = \frac{12}{N(N+1)}\left[\frac{(\Sigma R_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma R_2)^2}{n_2} + \cdots + \frac{(\Sigma R_k)^2}{n_k}\right] - 3(N+1)}$$

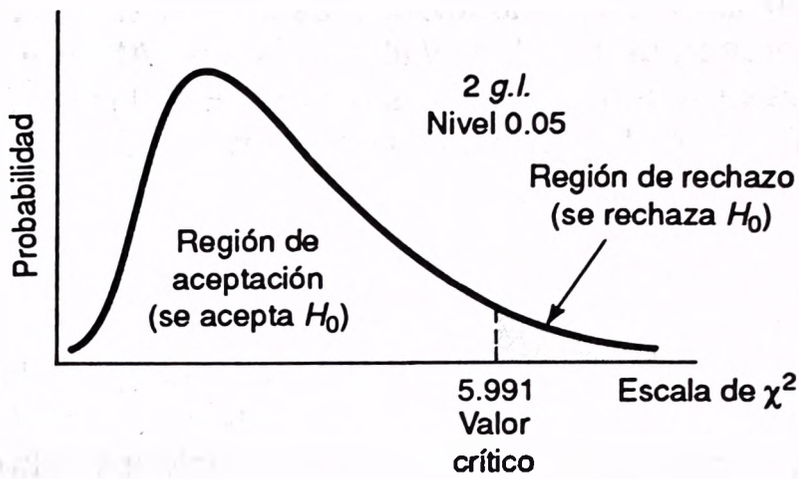
con $k - 1$ grados de libertad (k es el número de poblaciones) donde

$\Sigma R_1, \Sigma R_2, \ldots, \Sigma R_k$ son las sumas de los rangos de las muestras 1, 2, . . . , k.
$n_1, n_2, \ldots, n_k$ son los tamaños de muestras 1, 2, . . . , k.
N es el número combinado de observaciones para todas las muestras.

La distribución del estadístico de muestra H está muy cercana a la distribución ji cuadrada con $k - 1$ grados de libertad *si cada tamaño de muestra es de 5 por lo menos.* Por tanto, se usará ji cuadrada al plantear la regla de decisión. En este problema hay tres poblaciones, una de ejecutivos en manufactura, otra de ejecutivos en finanzas, y una tercera de ejecutivos en comercio. De modo que hay $k - 1$, o sea $3 - 1 = 2$ grados de libertad. Véase la tabla de ji cuadrada de valores críticos del apéndice I. El valor crítico para 2 grados de libertad y el nivel de riesgo de 0.05 es 5.991. En el diagrama 17-2 se muestra la regla de decisión. Se acepta H_0 si el valor calculado de H es menor que o igual a 5.991. Se rechaza H_0 si el valor calculado de H es mayor que 5.991.

DIAGRAMA 17-2

Regiones de aceptación y de rechazo, 2 grados de libertad, nivel 0.05



El paso siguiente consiste en seleccionar muestras de las tres poblaciones. Se seleccionan muestras de siete ejecutivos de manufactura, ocho de finanzas y seis de comercio. Sus puntuaciones en la prueba se registran en la tabla 17-5.

TABLA 17-5

Puntuaciones en la prueba sobre principios gerenciales para los ejecutivos de manufactura, finanzas y comercio

Ejecutivos de manufactura		*Ejecutivos de finanzas*		*Ejecutivos de comercio*
51	Menor →	14		89
32		31		20
17	← Segundo menor	63	Empate	60
69		87		72
86		20		56
62		28		22
96		77		
		97		

Considerando las puntuaciones de una sola población, *la puntuación 14 es la más baja y se le asigna rango 1*. La puntuación 17 es la segunda más baja y se le asigna el rango 2. Hay dos puntuaciones de 20. Para resolver el empate, se asigna a cada puntuación el rango 3.5, determinado por (3 + 4)/2. La puntuación siguiente, 22, recibe el rango 5. Este proceso continúa hasta que todas las puntuaciones queden jerarquizadas. Las puntuaciones, los rangos y las sumas de los rangos para cada una de las tres muestras se enlistan en la tabla 17-6.

TABLA 17-6

Puntuaciones, rangos y suma de rangos de las puntuaciones en la prueba sobre principios de administración

Ejecutivos de manufactura		*Ejecutivos de finanzas*		*Ejecutivos de comercio*	
Puntuación	*Rango*	*Puntuación*	*Rango*	*Puntuación*	*Rango*
51	9	14	1	89	19
32	8	31	7	20	3.5
17	2	68	13	60	11
69	14	87	18	72	15
86	17	20	3.5	56	10
62	12	28	6	22	5
96	20	77	16		
		97	21		
$\Sigma R_1 = 82$		$\Sigma R_2 = 85.5$		$\Sigma R_3 = 63.5$	
$n_1 = 7$		$n_2 = 8$		$n_3 = 6$	

Despejando H:

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left[\frac{(\Sigma R_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma R_2)^2}{n_2} + \frac{(\Sigma R_3)^2}{n_3}\right] - 3(N+1)$$

$$= \frac{12}{21(21+1)}\left[\frac{(82)^2}{7} + \frac{(85.5)^2}{8} + \frac{(63.5)^2}{6}\right] - 3(21+1)$$

$$= \frac{12(2546.394)}{462} - 66$$

$$= 0.1401$$

Como el valor calculado de H (0.1401) es menor que el valor crítico de 5.991, la hipótesis nula se acepta al nivel 0.05. No hay diferencia entre los ejecutivos de manufactura, finanzas y comercio con respecto a su conocimiento de los principios de administración o gerenciales. Desde un punto de vista práctico, el director del seminario debe considerar ofrecer una sola sesión que incluya ejecutivos de las tres áreas.

El sistema MINITAB ofrece la prueba de Kruskal-Wallis. Los datos de los tres grupos de ejecutivos se introducen en la columna C1 y el código que identifica el grupo, en C2. El nivel "1" se refiere a los ejecutivos de manufactura, el "2" a los de finanzas y el "3" a los de comercio. Obsérvese en el listado siguiente que el valor de H (0.141) es el mismo que se calculó antes.

Recuérdese del capítulo 12 que para aplicar la técnica del análisis de variancia se supone que: 1) las tres o más poblaciones de interés se distribuyen normalmente, 2) esas poblaciones tienen desviaciones estándares iguales (entra 1:) y 3) las

```
MTB > set c1
DATA > 51,32,...,22
DATA > END
MTB > set c2
DATA > 1,1,...,3
DATA > END
MTB > kruskal c1 c2

LEVEL     NOBS     MEDIAN     AVE. RANK     Z VALUE
    1        7      62.00          11.7        0.37
    2        8      49.50          10.7       -0.18
    3        6      58.00          10.6       -0.19
OVERALL     21                     11.0

H = 0.1401
H(ADJ.FOR TIES) = 0.1402
```

muestras seleccionadas de cada una de las poblaciones son aleatorias e independientes, esto es, no están relacionadas. Si tales suposiciones se cumplen, es aplicable la distribución *F* como estadístico de prueba. Si estas tres suposiciones no pueden cumplirse, se aplica la prueba libre de distribución de Kruskal y Wallis.

Para mostrar la similitud entre los dos enfoques, se resolverá un problema usando MINITAB. Primero se resolverá aplicando el análisis de variancia (ANOVA) y empleando después el de Kruskal-Wallis. Como ejemplo, una compañía aplica un sistema para evaluar el rendimiento a fin de año. Todos los gerentes y ejecutivos están incluidos. Empleados clave evalúan su rendimiento como excelente, bueno, aceptable o deficiente.

El departamento de investigación planea realizar un estudio minucioso del sistema de evaluación y hacer recomendaciones para mejorarlo. Una de las interrogantes que se van a examinar es: ¿El aumento de sueldo otorgado a un empleado clave afecta su evaluación de fin de año? En forma lógica sería de esperar que, en general, los empleados que recibieron un aumento importante en su sueldo evalúen al gerente o ejecutivo como "excelente". Parecería también que quienes evaluaron el rendimiento como "deficiente" probablemente recibieron el aumento salarial más bajo.

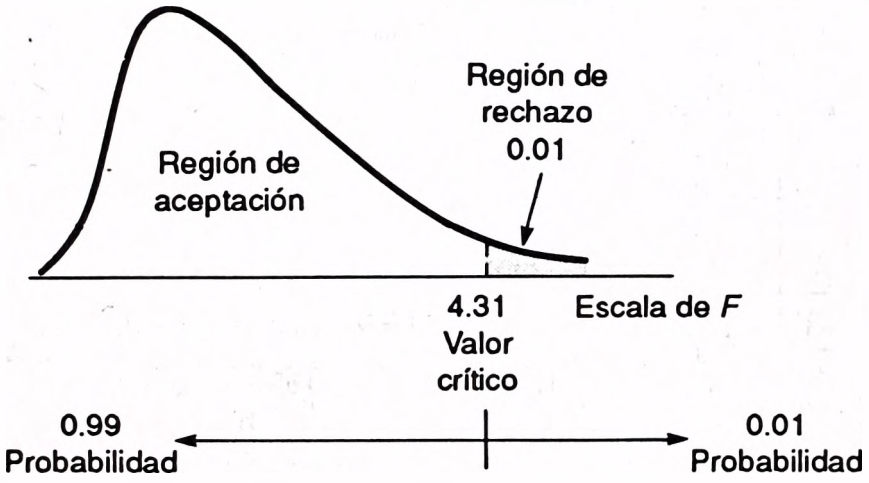
Las evaluaciones del director de la empresa se seleccionaron para estudiarlas. Se escogió una muestra aleatoria de 42. Seis empleados evaluaron su rendimiento como excelente, 19 lo calificaron como bueno, y así sucesivamente. Las evaluaciones (excelente, bueno, aceptable y deficiente) y los aumentos al sueldo semanal de los 42 de la muestra se indican en la tabla siguiente. Por ejemplo, el número en la esquina superior izquierda de la tabla indica que el empleado clave recibió un aumento de $85 (dólares) a la semana, y evaluó el rendimiento del director general como excelente.

Evaluación de los empleados y sus incrementos de sueldo

Excelente	*Bueno*		*Regular*	*Deficiente*
$85	$80	$78	$73	$81
77	70	75	71	85
74	78	73	70	76
77	72	80	79	81
70	74	82	73	79
74	77	73	76	70
	79	74	76	79
	78	76	68	
	82	91	80	
		78	78	

La cuestión que se ha de examinar es si los aumentos de sueldo otorgados a los empleados están relacionados con las opiniones que tienen del director o ejecutivo que se evalúa. Si se acepta que se cumplen las consideraciones subyacentes de la prueba ANOVA, puede presentarse a continuación una representación gráfica de la regla de decisión para la prueba *F* y el nivel de significación de 0.01.

Areas de aceptación y de rechazo, nivel de significación 0.01

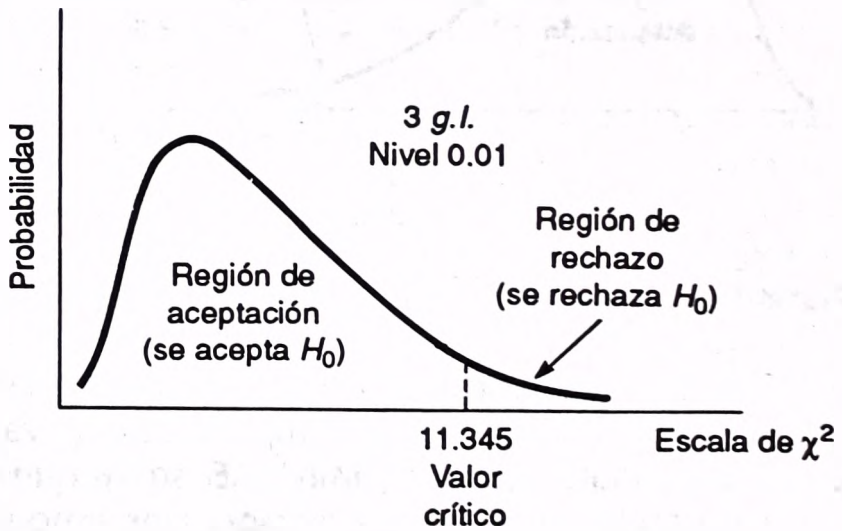


Por tanto, se aceptará la hipótesis nula de que las tasas no están relacionadas con los aumentos de sueldo otorgados a los empleados si el valor calculado de *F* es de 4.31 o menos. Del siguiente listado MINITAB se ve que el valor calculado para *F* es 1.44, y queda en la región de aceptación. Como no se puede rechazar la hipótesis nula, se concluye que las evaluaciones de los empleados y los aumentos de sueldo otorgados no tienen relación alguna. En apariencia, la magnitud del aumento no influye en la evaluación del personal sobre el rendimiento del director general.

En el sistema MINITAB, los aumentos de sueldo se introducen en la columna C1 y los códigos de grupo (excelente, bueno, aceptable y deficiente) en C2.

```
MTB > oneway c1 c2

ANALYSIS OF VARIANCE ON rating
SOURCE    DF      SS      MS      F
groups     3    91.5    30.5   1.44
ERROR     38   805.1    21.2
TOTAL     41   896.6

                                  INDIVIDUAL 95 PCT CI'S FOR MEAN
                                  BASED ON POOLED STDEV
LEVEL    N    MEAN   STDEV   ---+---------+---------+---------+-----
    1    6  76.167   5.037      (-----------*-----------)
    2   19  77.368   4.705                 (------*------)
    3   10  74.400   4.033   (---------*---------)
    4    7  78.714   4.716                 (----------*----------)
                                  ---+---------+---------+---------+-----
POOLED STDEV = 4.603            72.0      75.0      78.0      81.0
```

Sin embargo, supóngase que se llega a la conclusión de que no se cumplen alguna o todas las consideraciones para la distribución F. En estas circunstancias se aplica la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis. Para el nivel de significación 0.01, se grafica la regla de decisión en el diagrama siguiente (el valor crítico de 11.345 se encuentra en el apéndice I para el nivel 0.01 y $k - 1$ grados de libertad, donde k es el número de poblaciones; $k - 1 = 4 - 1 = 3$ grados de libertad).



Recuérdese del análisis anterior que la prueba de Kruskal-Wallis aplica la distribución ji cuadrada como estadístico de prueba y el valor calculado se designa por H. Una vez ajustados por los empates, se calculó H como 4.728 (véase el listado MINITAB siguiente).

```
MTB > kruskal c1 c2

LEVEL      NOBS     MEDIAN     AVE. RANK     Z VALUE
                6     75.50          19.2       -0.50
     2         19     78.00          22.9        0.66
     3         10     74.50          15.7       -1.71
     4          7     79.00          28.1        1.55
OVERALL        42                    21.5

H = 4.697
H( ADJ. FORTIES ) = 4.728
```

De nuevo, no se rechazará la hipótesis nula porque 4.728 < 11.345. Esto confirma la conclusión anterior de que las cuatro poblaciones (evaluaciones de excelente, bueno, aceptable y deficiente) son idénticas. Repitiendo, las evaluaciones de rendimiento en el trabajo no están relacionadas con la magnitud de los aumentos salariales a los empleados.

AUTOEXAMEN 17-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

El gerente regional del banco Statewide Financial está interesado en el índice de cambios o movimiento de las cuentas personales de cheques en cuatro de los bancos filiales. Se pregunta si hay o no diferencia en los índices de movimiento entre los cuatro bancos filiales. (El índice de movimiento es la rapidez con la que el dinero de una cuenta se deposita y retira. Una cuenta extremadamente activa puede tener un índice de 300; pero si sólo se giran uno o dos cheques, el índice puede ser de aproximadamente 30.) Los índices de movimiento de las muestras seleccionadas de los cuatro bancos filiales son:

Filial Englewood	*Filial West Side*	*Filial Great Northern*	*Filial Sylvania*
208	91	302	99
307	62	103	116
199	86	319	189
142	91	340	103
91	80	180	100
296			131

Usando el nivel 0.01 y la prueba de Kruskal Wallis, determine si hay diferencia en los índices de movimiento de las cuentas personales de cheques entre las cuatro filiales.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

11. Un fabricante de motores fuera de borda para embarcaciones inventó un proceso de recubrimiento con pintura epóxica para protección contra la corrosión de las componen-

tes del escape de gases. Los ingenieros quieren determinar si las distribuciones de los tiempos de duración de la pintura son iguales para las condiciones: agua salada, agua dulce sin vegetación y agua dulce con gran concentración herbácea. En el laboratorio se realizaron pruebas activadas de duración y se registraron los tiempos de duración de la pintura antes de que empezara a desprenderse.

Agua salada	*Agua dulce*	*Agua dulce con vegetación*
167.3	160.6	182.7
189.6	177.6	165.4
177.2	185.3	172.9
169.4	168.6	169.2
180.3	176.6	174.7

Aplicando la prueba de Kruskal-Wallis y el nivel 0.01, determine si la duración de la pintura es la misma para las tres condiciones del agua.

12. La National Turkey Association desea experimentar con tres mezclas de alimento para polluelos de pavo.
Como no se tiene experiencia respecto a las tres mezclas, no pueden hacerse suposiciones respecto a la forma de la distribución de los pesos de las aves. La prueba de Kruskal-Wallis debe aplicarse para probar si los pesos de los pavos son iguales después de alimentarlos durante un intervalo específico de tiempo. A cinco pavipollos se les dio el alimento A; a seis, el alimento B, y a cinco, el alimento C. Pruebe al nivel 0.05 si son iguales los promedios de peso de las aves que comieron los alimentos A, B y C.

Peso (en libras)		
Alimento A	*Alimento B*	*Alimento C*
11.2	12.6	11.3
12.1	10.8	11.9
10.9	11.3	12.4
11.3	11.0	10.6
12.0	12.0	12.0
	10.7	

PRUEBA DE WILCOXON DE RANGOS CON SIGNO DE PARES AJUSTADOS PARA DIFERENCIAS

La prueba *t* de pares expuesta en el capítulo 11 se emplea si puede suponerse que las diferencias entre dos conjuntos de observaciones en *pares* se aproximan a una distribución normal. Si no puede cumplirse esta consideración, debe aplicarse la prueba no paramétrica de Frank Wilcoxon (1945). Se conoce como **prueba de Wilcoxon de rangos con signo de pares ajustados para diferencias.** Se necesita cuando menos que los datos estén a escala ordinal y que las dos muestras se relacionen (por pares).

* Ejemplo

Supóngase que la sección de ingeniería de la compañía Computer Technologies ha ideado un procesador de palabras experimental, fundamentalmente nuevo. Sin

embargo, uno de los vicepresidentes tiene ciertas dudas de que aun después de un periodo de transición, el número de palabras por minuto que pueda lograr un empleado en la captura de datos difiera en forma significativa con respecto al logrado, utilizando el modelo actual. Se planea seleccionar al azar un grupo de empleados de captura de datos para verificar su rendimiento con el modelo actual. Luego se proporcionará a cada uno el nuevo procesador de palabras y después de unas cuantas semanas se registrará otra vez su rendimiento. De esta forma se obtendrá para cada operador un par de datos ajustados, o coincidentes. Para este tipo de experimento se dice que cada persona *actúa bajo su propio control.* ¿Cómo puede emplearse la prueba de Wilcoxon a fin de probar la diferencia en la velocidad de captura entre los modelos anterior y nuevo?

✔ Solución

Como antes, el primer paso en la prueba de hipótesis es establecer las hipótesis nula y alternativa.

H_0 No hay diferencia en la velocidad de captura usando el modelo anterior y empleando el nuevo modelo experimental.

H_1 Hay diferencia entre las dos velocidades de captura.

Como no está especificada la dirección (como en "la velocidad alcanzada con el nuevo procesador de palabras es mayor que con el modelo anterior"), se aplicará una prueba de dos colas.

La hipótesis nula se probará al nivel 0.01. Con objeto de probar la hipótesis, 29 operadores seleccionados al azar se someten a una prueba con el modelo actual. Después se asigna cada operador a uno de los procesadores experimentales. Luego de un periodo de entrenamiento, los operadores se someten a otra prueba. La tabla 17-7 muestra los resultados y las diferencias.

Los pasos que son necesarios para finalmente aceptar o rechazar la hipótesis nula son:

1. Calcular la diferencia entre el número de palabras por minuto capturadas con el modelo actual y el número tecleado con el modelo experimental, para cada uno de los 29 operadores. Las diferencias se muestran en la columna 4 de la tabla 17-7.
2. En adelante sólo se considerarán los cambios positivos y negativos. Esto es, si la diferencia entre las palabras capturadas por minuto con el modelo actual y las capturadas con el nuevo procesador es cero, estos datos no se toman en cuenta (porque sólo interesa clasificar por rango las diferencias reales). Siete de los 29 operadores no mostraron cambio en la velocidad al teclear. Por tanto, $N = 22$, obtenido de $29 - 7$.
3. Ordenar las *22* diferencias *absolutas,* éstas ya ordenadas se muestran en la columna 1 de la tabla 17-8.

TABLA 17-7

Número de palabras por minuto escritas con el procesador actual y con el modelo nuevo (29 capturistas)

(1) *Número de operador*	*(2)* *Velocidad con el procesador actual*	*(3)* *Velocidad con el procesador experimental*	*(4)* *Diferencia (3) − (2)*
1	43	49	6
2	91	92	1
3	33	32	−1
4	54	54	—
5	45	65	20
6	55	90	35
7	65	64	−1
8	90	85	−5
9	53	56	3
10	70	70	—
11	76	74	−2
12	87	87	—
13	32	64	32
14	99	104	5
15	87	87	—
16	80	77	−3
17	88	88	—
18	23	32	9
19	75	90	15
20	54	51	−3
21	43	49	6
22	23	90	67
23	56	78	22
24	56	57	1
25	70	70	—
26	76	78	2
27	45	60	15
28	76	80	4
29	54	54	—

4. A cada una de las 22 diferencias absolutas se le clasifica por rango, principiando con 1 y terminando con 22. (Véase la columna 1 de la tabla 17-8.)
5. Observe que hay cuatro diferencias de 1 (columna 1), que tienen asignados los rangos 1, 2, 3 y 4 (columna 2). Para resolver este empate, después se calcula el promedio de esos cuatro rangos: $(1 + 2 + 3 + 4)/4 = 10/4 = 2.5$ (columna 3). Además, el promedio de rango para las diferencias de 2 es 5.5, se obtiene $(5 + 6)/2$. El promedio de los rangos de las diferencias de 3 es 8, y así sucesivamente. (Véase la tabla 17-8.)

TABLA 17-8

Cálculos para el valor T calculado para la prueba de Wilcoxon

(1) *Diferencias absolutas en orden de menor a mayor*	*(2)* *Rango*	*(3)* *Rangos asignados, con sus signos correctos*	
1	1	– 2.5	
1	2	– 2.5	
1	3	2.5	
1	4	2.5	
2	5	– 5.5	
2	6	5.5	
3	7	– 8	
3	8	– 8	
3	9	8	
4	10	10	La suma de los rangos negativos
5	11	– 11.5	es – 38.
5	12	11.5	La suma de los rangos positivos
6	13	13.5	es + 215.
6	14	13.5	
9	15	15	
15	16	16.5	
15	17	16.5	
20	18	18	
22	19	19	
32	20	20	
35	21	21	
67	22	22	

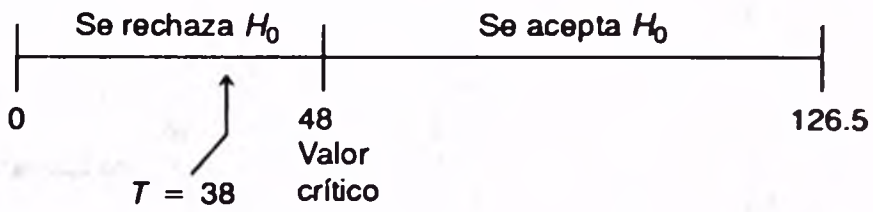
6. A cada rango asignado en la columna 3 se le da el signo de la diferencia original. Por ejemplo, dos de las cuatro diferencias de 1 son negativas. En consecuencia, dos de los cuatro rangos asignados de 2.5 tienen signo negativo. El rango de 10 es positivo porque es positiva la diferencia correspondiente, 4.
7. Todos los rangos negativos de la columna 3 se suman (– 38) y todos los rangos positivos se suman también (+ 215). *La menor de las dos sumas* (sin tomar en cuenta el signo) es 38. Al valor 38 se le denomina *T* calculada. En realidad, no es necesario sumar los rangos positivos, ya que puede apreciarse que la suma de los negativos es menor que la suma de los positivos. No obstante, puede hacerse una verificación de los cálculos sumando, (sin tomar en cuenta el signo) los rangos asignados negativos

y los rangos asignados positivos. Tal suma debe ser igual a la de los rangos que aparece en la columna 2. En este caso 38 + 215 = 253, que es igual a la suma de la columna 2.

Recuérdese que la suma de los rangos negativos es 38 y la suma de los positivos es 215. Si cualquier mejora en el aprovechamiento se compensara exactamente con una pérdida de aprovechamiento, cada una de las dos sumas de rangos sería aproximadamente 126.5, que se obtiene de 253/2.

El valor crítico de Wilcoxon, del apéndice K para $N = 22$ en el nivel de significación 0.01 para una prueba de dos colas, es 48. Esto indica que un valor calculado T mayor de 48 y hasta 126.5 inclusive, podría deberse al azar; es decir, que un valor calculado T mayor que 48, pero igual o menor que 126.5 indicaría que la suma de los rangos positivos y negativos *no* se aleja significativamente de cero.

Una representación esquemática de la regla de decisión es como sigue:



Puesto que el valor calculado T de 38 es menor que el valor crítico T de 48, la hipótesis nula que establece que no hay diferencia en las velocidades de captura al emplear el modelo actual y el modelo experimental se *rechaza* a nivel 0.01. H_1 se acepta. Tan grande desequilibrio (– 38 y + 215) impide aceptar la hipótesis nula.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

13. Un supervisor ha sugerido un nuevo procedimiento para una línea de ensamble. Con objeto de probar si el nuevo método es o no superior, se seleccionó una muestra aleatoria de 15 operarios. Primero se determinó la producción según el sistema antiguo, y después se introdujo el nuevo procedimiento. Al transcurrir un periodo adecuado de adaptación, se evaluó otra vez la producción. Los resultados fueron:

	Producción	
Empleado	*Sistema antiguo*	*Método nuevo*
A	60	64
B	40	52
C	59	58
D	30	37
E	70	71
F	78	83

AUTOEXAMEN 17-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En un cierto lapso se lleva un registro de la producción de cada operador de máquina. Se sugirieron ciertos cambios en el procedimiento de producción y se escogieron 11 operadores como grupo experimental de prueba para determinar si tienen valor o no los nuevos métodos. Las producciones antes y después de los nuevos procedimientos se muestran a continuación:

Operador	*Producción anterior*	*Producción posterior*
S.M.	17	18
D.J.	21	23
M.D.	25	22
B.B.	15	25
M.F.	10	28
A.A.	16	16
U.Z.	10	22
Y.U.	20	19
U.T.	17	20
Y.H.	24	30
Y.Y.	23	26

1. ¿Cuántos pares utilizables se presentan? Esto es, ¿cuál es el valor de *N*?
2. Aplicando la prueba de Wilcoxon de rangos con signo, determine si en realidad los nuevos procedimientos incrementan o no la producción. Utilice el nivel 0.05 y una prueba de una cola.

	Empleado	
Sistema antiguo	*Método nuevo*	*Producción*
G	43	46
H	40	52
I	87	84
J	80	80
K	56	57
L	21	21
M	99	108
N	50	56
O	56	62

Muestre, usando la prueba de Wilcoxon de rangos con signo y al nivel 0.05, que la producción según el nuevo método es mayor que con el método anterior.

a. Establezca las hipótesis nula y alternativa.
b. Enuncie la regla de decisión.
c. Adopte una decisión considerando la hipótesis nula.

14. Se ha sugerido que la producción diaria de un subensamble puede aumentarse con la instalación de un mejor alumbrado portátil y sonido musical de fondo, además de proporcionar café y rosquillas gratuitamente durante el día. La gerencia convino en ensayar el método por un tiempo limitado. En las pruebas con un grupo pequeño de operarios, se registraron las producciones por semana con los números de subensambles que se indican:

Empleado	*Registro de producción anterior*	*Producción después de instalar iluminación, música, etc.*
JD	23	33
SB	26	26
MD	24	30
RCF	17	25
MF	20	19
UHH	24	22
IB	30	29
WWJ	21	25
OP	25	22
CD	21	23
PA	16	17
RRT	20	15
AT	17	9
QQ	23	30

Utilizando la prueba de Wilcoxon de rangos con signo, determine si los cambios sugeridos tienen valor o no, esto es, si se incrementa o no la producción.

a. Establezca la hipótesis nula.
b. Decida cuál será la hipótesis alternativa.
c. Determine cuál será el nivel de significación.
d. Enuncie la regla de decisión.
e. Calcule T y tome una decisión.

RESUMEN

En las pruebas de hipótesis acerca de una media poblacional, de dos medias o de más de dos medias, se hicieron ciertas consideraciones en los capítulos anteriores. Una consideración fue que las poblaciones de las cuales se seleccionaron las muestras están distribuidas normalmente. Las pruebas no paramétricas, como la *prueba U de Mann-Whitney* y la *prueba de Wilcoxon* están libres de distribución, lo cual implica que están libres de consideraciones. Estas pruebas son apropiadas cuando las poblaciones no están distribuidas en forma normal. Pueden aplicarse cuando las mediciones están por lo menos al nivel ordinal.

La *prueba de signo* es muy apropiada para experimentos de "antes y después", y para experimentos sobre preferencia de productos.

La prueba U de Mann-Whitney exige que la información esté cuando menos a escala ordinal (porque para efectuarla las observaciones deben tener rango). Si la mayor de dos pruebas independientes tiene 20 o menos observaciones, se sigue un enfoque de muestra pequeña. Se calculan dos valores, U y U'. El menor de los dos se compara con el valor

crítico para llegar a una decisión. Si una de las muestras es mayor que 20, se sigue el enfoque de muestra grande, con z, la distribución normal estándar como estadístico de prueba.

La prueba U de Mann-Whitney está estructurada para probar si existe diferencia entre dos poblaciones. El *análisis de varianza por rangos de Kruskal-Wallis* prueba la diferencia entre más de dos medias poblacionales. Su estadístico de prueba es H, que se aproxima a ji cuadrada.

La prueba Wilcoxon para diferencias exige que las dos muestras estén cuando menos al nivel ordinal de medición, y que los datos sean por pares.

Recapitulación

I. Prueba de signo.
   A. No es necesario hacer consideraciones respecto a la forma de las dos poblaciones.
   B. Es muy útil para experimentos "antes y después", pruebas de preferencia de productos y pruebas de hipótesis con respecto a la mediana.
   C. Tanto las muestras pequeñas como grandes usan signos positivos y negativos. Para muestras pequeñas el número de signos positivos o negativos es el estadístico de prueba y el valor crítico se obtiene de la distribución binomial. En muestras grandes y en pruebas con respecto a la mediana se emplea la distribución normal como estadístico de prueba. La fórmula para z es:

$$z = \frac{(X \pm 0.50) - 0.50n}{0.50\sqrt{n}}$$

II. Prueba U de Mann-Whitney.
   A. Se necesitan dos muestras independientes seleccionadas al azar y mediciones cuando menos a nivel ordinal.
   B. Muestras pequeñas.
      1. Las muestras se consideran pequeñas si la mayor de las dos muestras tiene 20 o menos observaciones.
      2. El procedimiento es: se asignan rangos a todos los datos de menor a mayor, o viceversa. Después se calculan U y U'.

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \Sigma R_1$$

$$U' = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \Sigma R_2$$

donde:

n_1 y n_2 son los tamaños de las dos muestras.
ΣR_1 es la suma de los rangos de una muestra.
ΣR_2 es la suma de los rangos de la otra muestra.

El valor *menor* calculado, U o U', sirve para llegar a una decisión respecto a aceptar o rechazar la hipótesis nula. En el apéndice J se dan los valores críticos.

   C. Muestras grandes.
      1. Las muestras se consideran grandes si la mayor de las dos muestras tiene 21 o más observaciones.

2. El procedimiento es: se asignan rangos a todos los datos de menor a mayor, o viceversa. Luego se calcula z.

$$z = \frac{\Sigma R_1 - \Sigma R_2 - \left[(n_1 - n_2)\dfrac{n_1 + n_2 + 1}{2}\right]}{\sqrt{n_1 n_2\left[\dfrac{n_1 + n_2 + 1}{3}\right]}}$$

III. Análisis de variancia por rangos en un sentido de Kruskal-Wallis.
   A. No se necesitan consideraciones respecto a la forma de las poblaciones. Para aplicar la prueba, debe ser posible ordenar por rangos la información y las muestras deben ser independientes.
   B. Se utiliza para probar si tres o más poblaciones son idénticas.
   C. Se combinan todos los valores y se asignan rangos principiando con el más bajo, al cual se le asigna el rango 1. Se suman los rangos de cada muestra y se sustituyen en la fórmula siguiente:

$$H = \frac{12}{N(N + 1)}\left[\frac{(\Sigma R_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma R_2)^2}{n_2} + \cdots + \frac{(\Sigma R_k)^2}{n_k}\right] - 3(N + 1)$$

IV. Prueba de Wilcoxon de rangos con signo para pares ajustados, o coincidentes.
   A. Los datos cuando menos deben estar en escala ordinal y las dos muestras deben estar relacionadas. Una forma de lograr esto consiste en dejar que cada persona actúe según su propio control, lo cual significa que la misma persona (o elemento) está en la muestra 1 y en la muestra 2.
   B. Se usa ampliamente en situaciones de "antes y después".
   C. Procedimiento.
      1. Se asignan rangos a las diferencias absolutas debidas al método anterior y el método nuevo.
      2. Se reconocen los empates y se otorgan signos apropiados a los rangos.
      3. Se efectúan las sumas de los rangos positivos y negativos.
      4. Sin tomar en cuenta los signos, la menor de las dos sumas es el valor T calculado.
      5. Consultando el valor crítico en el apéndice K, se acepta o se rechaza H_0.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

15. Se va a llevar a cabo un proyecto de investigación que compromete con responsabilidades a la comunidad. El objetivo es determinar si las mujeres tienen más conciencia sobre la comunidad antes del matrimonio, o después de cinco años del mismo. Se aplicó una prueba para medir la conciencia comunitaria a una muestra de mujeres antes del matrimonio, y se aplicó la misma prueba después de cinco años del mismo. Los registros de las pruebas son:

Nombre	*Antes del matrimonio*	*Después del matrimonio*
Isabel	110	114
Julia	157	159
Susana	121	120
Catalina	96	103

Nombre	*Antes del matrimonio*	*Después del matrimonio*
María	130	139
Carla	186	196
Lisa	116	116
Sandy	160	140
Paola	149	142

Se prueba al nivel 0.05. H_0 es: no hay diferencia en la conciencia comunitaria antes y después del matrimonio. H_1 es: hay diferencia.

16. ¿Existe alguna diferencia en las tasas anuales de divorcio en los distritos predominantemente rurales en tres regiones geográficas del suroeste, sureste y noroeste de Estados Unidos? Se prueba al nivel 0.05. Las tasas anuales de divorcio por millar de habitantes en distritos seleccionados al azar son:

    Suroeste: 5.9, 6.2, 7.9, 8.6, 4.6
    Sureste: 5.0, 6.4, 7.3, 6.2, 8.1, 5.1
    Noroeste: 6.7, 6.2, 4.9, 8.0, 5.5

17. Se han de comparar los tiempos muertos (periodos de inactividad) durante el turno diurno de ocho horas y el turno nocturno. Un estudio de los tiempos reveló los siguientes tiempos muertos (en minutos) en periodos de ocho horas.

    Turno diurno: 92, 103, 116, 81, 89
    Turno nocturno: 96, 114, 80, 82, 88, 91

    ¿Existe diferencia en el tiempo muerto entre los dos turnos? Realice la prueba al nivel 0.05.

18. Se investigará la actividad de ejecutivos en casas de bolsa, en las áreas de servicios, construcción pesada y transporte aéreo. Se seleccionaron muestras de cada una de estas industrias y se expresó como índice el número de veces que un ejecutivo hizo movimientos durante un periodo de 10 años. Un índice de cero indicaría que no hubo movimiento, en tanto que un índice de 100 indicaría movimiento casi constante de una ubicación a otra o de una empresa a otra. Los índices de los cuatro grupos son:

Mercado de valores	*Servicios*	*Construcción pesada*	*Transporte aéreo*
4	3	62	30
17	12	40	38
8	40	81	46
20	17	96	40
16	31	76	21
	19		

No se puede suponer que los registros están distribuidos en forma normal. Por tanto, debe usarse una prueba no paramétrica. Usando el nivel 0.05, determine si los registros de actividad de las cuatro poblaciones son idénticas.

19. La South Carolina Real State Association afirma que el valor mediano de las rentas de condominios de tres recámaras en el área metropolitana es de $1 200 (dólares) mensuales. Para verificar esto, se seleccionó al azar una muestra de 149 unidades. De las 149, 5 se rentan exactamente en $1 200 mensuales, y 75 en más de $1 200. Al nivel 0.05, pruebe la afirmación de que dicho valor de las rentas es mayor que $1 200.

a. Enuncie H_0 y H_1.
b. Exprese la regla de decisión.
c. Realice los cálculos necesarios para llegar a una decisión.

20. El Citrus Council desea confirmar si los consumidores prefieren jugo de naranja simple, o bien con un poco de pulpa. Se seleccionó al azar una muestra de 212 consumidores. Cada persona de la muestra cató el contenido de una pequeña taza, sin marcar, con un jugo, y después probó el otro. Doce consumidores dijeron que no tenían preferencia, 40 prefirieron el jugo simple, y al resto le agradó más el jugo con pulpa. Pruebe al nivel 0.05 que las preferencias por el producto simple y por el producto con pulpa, son iguales.
21. Una gran cadena de tiendas departamentales, Cornwall & Hudson, desea manejar una sola marca de componentes de alta calidad para equipos de sonido estereofónico. La lista se ha reducido a dos marcas, Fisher y Pioneer. Para ayudar en la toma de decisión, se reunió a un grupo de 16 expertos en audio. Se reprodujo un pasaje musical usando componentes Fisher (marcados A). Después se reprodujo el mismo pasaje usando componentes Pioneer (marcados B). Un signo + en la tabla siguiente indica la preferencia de una persona por los componentes Fisher, un signo – indica preferencia por Pioneer, y un 0 significa que no hubo preferencia.

Experto															
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
+	–	+	–	+	+	–	0	–	+	–	+	+	–	+	–

Realice una prueba de hipótesis en el nivel de significación 0.10, para determinar si existe alguna diferencia en la preferencia entre las dos marcas.

EXAMEN CAPITULO 17

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para los ejercicios 1–11, anote la letra que corresponde a la respuesta correcta.

1. Si no se pueden cumplir las consideraciones para la prueba *t* por pares (capítulo 11), la alternativa no paramétrica es:
   a. La prueba de Mann-Whitney.
   b. La prueba de Kruskal-Wallis.
   c. La prueba de Wilcoxon.
   d. La prueba de signo.
2. Las pruebas no paramétricas presentadas en este capítulo necesitan que las poblaciones de interés estén distribuidas en forma normal, y que las observaciones estén cuando menos en escala de intervalo.
   a. Cierto.
   b. Falso.
3. La prueba *U* de Mann-Whitney exige que las observaciones estén por pares. (Un ejemplo de datos por pares puede ser la puntuación que obtuvo un solicitante antes de asistir a la academia de policía y la que obtiene al final del curso.)

a. Cierto.
b. Falso.

4. De entre las pruebas no paramétricas descritas en este capítulo, ¿cuál es la que necesita cuando menos cinco muestras de cada población y un nivel ordinal de medición?
   a. Prueba de Mann-Whitney.
   b. Prueba de Kruskal-Wallis.
   c. Prueba de Wilcoxon.
   d. Prueba de signo.
5. ¿Cuál de las pruebas siguientes no es libre de distribución?
   a. Prueba de Mann-Whitney.
   b. Prueba *t* de Student.
   c. Prueba de Kruskal-Wallis.
   d. Prueba de Wilcoxon.
   e. Ninguna de las opciones es correcta.
6. La región de rechazo para la prueba de Kruskal-Wallis:
   a. Está sólo en la cola de valores altos.
   b. Está sólo en la cola de valores bajos.
   c. Puede estar en una u otra colas.
   d. No se identifica en estas proposiciones.
7. Si se rechaza la hipótesis nula para la prueba de Kruskal-Wallis, esto indica que:
   a. No hay diferencia entre los dos grupos.
   b. No hay diferencia entre el conjunto de observaciones de "antes" y el conjunto de observaciones "después".
   c. Las distribuciones no son iguales.
   d. Ninguna de las opciones anteriores.
8. El estadístico para la prueba de Mann-Whitney es:
   a. z.
   b. t.
   c. H.
   d. U.
   e. Ninguna de dichas opciones.
9. Para la prueba de Kruskal-Wallis, los rangos se determinan combinando todos los grupos y clasificando por rango todos los valores, empezando con 1.
   a. Cierto.
   b. Falso.
10. Para la prueba de Wilcoxon:
   a. Debe haber un conjunto esperado de frecuencias, f_e, y un conjunto observado de frecuencias, f_0.
   b. Se necesitan pares de datos.
   c. Debe haber tres o más poblaciones.
   d. Los datos deben estar cuando menos a escala de intervalo.
   e. Ninguna de las opciones es correcta.
11. La prueba de signo es no paramétrica y apropiada para experimentos "antes y después", así como para pruebas de preferencias de consumidores.
   a. Cierto.
   b. Falso.
12. La producción horaria de una muestra de empleados antes de asistir a un curso especial y después de terminarlo:

	Producción	
Empleado	*Antes del curso*	*Después del curso*
Frank Unati	21	26
Sue Marker	29	28
Athru Noble	20	20
Jean Sobecki	39	47
Agnes Locker	25	30
George Taoka	44	48
Dan Obet	18	27
Mirmie Gladen	33	36
Yando Larkin	31	34
Nastir Ufasse	45	48
Gladys Rollins	36	41

Pruebe al nivel 0.05 que el curso especial incrementó en forma significativa la producción.

13. Se compararán las tasas de homicidios en ciudades grandes, pequeñas y áreas rurales. Se seleccionan muestras de las tres áreas. Las tasas están dadas por millar de habitantes.

Ciudades grandes	*Ciudades pequeñas*	*Areas rurales*
6.7	7.8	12.6
5.2	7.1	8.4
11.2	12.2	8.2
8.6	9.6	4.9
5.5	5.2	11.7
	6.8	7.1

Suponiendo que las tasas no se distribuyen en forma normal, aplique una prueba no paramétrica. Utilice el nivel 0.01 para determinar si existe alguna diferencia entre las distribuciones de las tasas de homicidios para los tres grupos.

14. Se desea probar si hay una disminución en la edad promedio de los viajeros en vuelos internacionales. La hipótesis nula es H_0: mediana = 37.0 años. Una muestra de 410 viajeros reveló que 208 tenían menos de 37 años, 10 tenían exactamente 37 años, y el resto tenían más de 37. Usando el nivel 0.10, ¿ha disminuido el valor mediano de las edades de los viajeros internacionales?

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

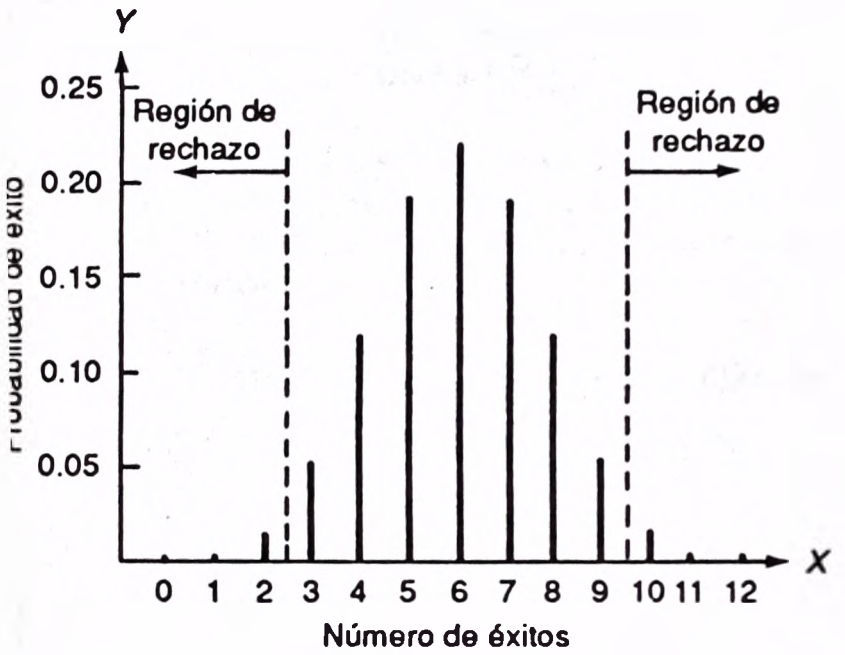
1. En el problema 1 sobre aplicación de los conceptos del capítulo 16, se dio cierta información sobre un sorteo. Se supone que cada mes es un tratamiento y que los números del sorteo son rangos. Utilice la prueba de Kruskal-Wallis para determinar si los números del sorteo son aleatorios. Comente los resultados.
2. En el problema 2 sobre aplicación de los conceptos del capítulo 12, se dio información respecto a los ingresos anuales de supervisores de reclusos liberados condicionalmente. Considere que no se puede suponer que la información proviene de poblaciones normales. Realice una prueba adecuada para determinar si las poblaciones de ingresos son idénticas.

3. En el problema 2, sobre aplicación de los conceptos del capítulo 11, se presentó información respecto al número de home runs logrados por los más destacados bateadores de las ligas Americana y Nacional, desde 1960 hasta 1987. Se supone que la distribución de las diferencias entre los bateadores sobresalientes de las dos ligas no es normal. ¿Habrá alguna diferencia en el número de home runs producidos entre las ligas? Se usa el nivel de significación 0.05.

Autoexámenes

17-1 1. Dos colas porque H_1 no enuncia una dirección.

2.



3. Se rechaza H_0. y se acepta H_1. Hay una preferencia. Sumando, 0.000 + 0.003 + 0.016 = 0.019. Esta es la probabilidad acumulada más alta pero no excede de 0.050, que es la mitad del nivel de significación.

17-2 Como 80 es mayor que $n/2 = 100/2 = 50$, se usa:

$$z = \frac{(80 - 0.50) - 0.50(100)}{0.50\sqrt{100}} = \frac{29.5}{5} = 5.9$$

Puesto que 5.9 queda en la cola más allá de 1.645 (apéndice D), se rechaza H_0. Las vitaminas son eficaces.

17-3 Se acepta H_0: mediana = \$52 000. Puesto que 54 es mayor que $n/2 = 100/2 = 50$, se usa

$$z = \frac{(54 - 0.50) - 0.50(100)}{0.50\sqrt{100}} = \frac{3.5}{5} = 0.70$$

Como 0.70 está en la región de aceptación entre 0 y 1.645, se acepta H_0.

17-4 1. H_0: No hay diferencia entre las dos distribuciones de las puntuaciones. H_1: Existe diferencia entre las distribuciones de las puntuaciones.

2. 10.

3.

Grupo 1		*Grupo 2*	
Puntuación	*Rango*	*Puntuación*	*Rango*
121	3	128	6
180	11.5	197	14
122	4	180	11.5
160	9	126	5
141	7	167	10
97	1	99	2
212	15	147	8
186	13		
	63.5		56.5

$$U = (8)(7) + \frac{8(8+1)}{2} - 63.5$$
$$= 28.5$$
$$U' = (8)(7) + \frac{7(7+1)}{2} - 56.5$$
$$= 56 + 28 - 56.5$$
$$= 27.5$$

El menor de los dos valores (27.5) queda en la región de aceptación. Se acepta H_0. No hay diferencia entre las distribuciones de los dos grupos de puntuaciones. Como verificación se tiene que:

$$U' = (8)(7) - 28.5 = 27.5$$

17-5

Rangos			
Englewood	*West Side*	*Great Northern*	*Sylvania*
17	5	19	7
20	1	9.5	11
16	3	21	15
13	5	22	9.5
5	2	14	8
18			12

$\Sigma R_1 = 89$ $\Sigma R_2 = 16$ $\Sigma R_3 = 85.5$ $R_4 = 62.5$
$n_1 = 6$ $n_2 = 5$ $n_3 = 5$ $n_4 = 6$

H_0: Las distribuciones son las mismas.
H_1: Las distribuciones no son las mismas.

$$H = \frac{12}{22(22+1)}\left[\frac{(89)^2}{6} + \frac{(16)^2}{5} + \frac{(85.5)^2}{5} + \frac{(85.5)^2}{6}\right] - 3(22+1)$$
$$= 0.0237154(3484.459) - 69$$
$$= 13.635$$

El valor crítico de ji cuadrada para $k - 1 = 4 - 1 = 3$ grados de libertad es 11.345. Como el valor calculado de 13.635 es mayor que 11.345, se rechaza la hipótesis nula. Se concluye que las distribuciones no son iguales.

17-6 1. $N = 10$.
2.

Antes	*Después*	*Diferencia*	*Diferencias absolutas ordenadas*	*Rangos*	*Rangos con signo*
17	18	+1	1	1	−1.5
21	23	+2	1	2	+1.5
25	22	−3	2	3	+3
15	25	+10	3	4	−5
10	28	+18	3	5	+5
16	16	—	3	6	+5
10	22	+12	6	7	+7
20	19	−1	10	8	+8
17	20	+3	12	9	+9
24	30	+6	18	10	+10
23	26	+3			

La suma de los rangos con signo negativo es −6.5; la suma de los positivos es 48.5. Del apéndice K, prueba de una cola, $N = 10$, el valor crítico es 10. Puesto que 6.5 es menor que 10, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alternativa. Los nuevos procedimientos incrementan la producción.

Examen capítulo 17

1. c.
2. Falso. Sólo se necesita escala ordinal. No se necesitan consideraciones acerca de normalidad.
3. Falso. Las muestras deben ser independientes.
4. b.
5. b.
6. a.
7. c.
8. d.
9. a.
10. b.
11. a.
12. H_0: No hay diferencia en la producción antes del curso y después del curso.

    H_1: El curso incrementó significativamente la producción (prueba de una cola).

    H_0 *(no hay diferencia)* H_1 *(incremento importante)*

Antes del curso	*Después del curso*	*Diferencia*	*Diferencias absolutas por rango*	*Rangos asignados con sus signos correctos*
21	26	− 5	1	+ 1
29	28	+ 1	3	− 3
20	20	0	3	− 3
39	47	− 8	3	− 3
25	30	− 5	4	− 5
44	48	− 4	5	− 7
18	27	− 9	5	− 7
33	36	− 3	5	− 7
31	34	− 3	8	− 9
45	48	− 3	9	− 10
36	41	− 5		

Suma de los rangos negativos = − 54, suma de los rangos positivos = + 1. Valor calculado de T = + 1. Valor crítico al nivel 0.05 = 10, donde N = 10. Se rechaza H_0. El curso aumentó significativamente la producción.

13. H_0: Hay diferencia en las distribuciones de las tasas de homicidios en los tres grupos.

    H_1: Hay una diferencia en las distribuciones de las tasas de homicidios en los tres grupos.

Grandes ciudades		*Ciudades pequeñas*		*Areas rurales*	
Tasa	*Rango*	*Tasa*	*Rango*	*Tasa*	*Rango*
6.7	5	7.8	9.0	12.6	17.0
5.2	2.5	7.1	7.5	8.4	11.0
11.2	14.0	12.2	16.0	8.2	10.0
8.6	12.0	9.6	13.0	4.9	1.0
5.5	4.0	5.2	2.5	11.7	15.0
ΣR_1 =	37.5	6.8	6.0	7.1	7.5
		ΣR_2 =	54.0	ΣR_3 =	61.5
n_1 =	5	n_2 =	6	n_3 =	6

$$H = \frac{12}{17(17+1)}\left[\frac{(37.5)^2}{5} + \frac{(54)^2}{6} + \frac{(61.5)^2}{6}\right] - 3(17+1)$$

$$= \frac{12}{306}[281.25 + 486 + 630.375] - 54$$

$$= 0.0392[1397.625] - 54$$

$$= 0.79$$

$N = 17$; el valor crítico de ji cuadrada al nivel 0.01 y 2 grados de libertad es 9.210. El valor calculado de H es 0.79. Como 0.79 es menor que 9.210, se acepta la hipótesis nula.

14. H_0: mediana = 37; H_1: mediana < 37. El valor crítico de z es 1.28 (prueba de una cola; consúltese en el apéndice D para 0.5000 − 0.10 = 0.4000). Puesto que 208 es mayor que $n/2 = 400/2 = 200$, entonces:

$$z = \frac{(208 - 0.50) - 0.50(400)}{0.50\sqrt{400}} = \frac{7.50}{10} = 0.75$$

Como 0.75 está en el área de la curva normal entre 0 y 1.28, no se rechaza H_0. El valor mediano de edad no ha cambiado. Permanece en 37.

Repaso de los capítulos 16 y 17

Esta parte es un repaso de los conceptos principales y los términos presentados en los capítulos 16 y 17. En el capítulo 16 se inició el estudio de las pruebas *no paramétricas* o *libres de distribución* con la descripción de la prueba de *ji cuadrada para la bondad de ajuste*. Tal prueba es aplicable a un conjunto de frecuencias observadas, f_0, y al correspondiente conjunto esperado de frecuencias, f_e, para probar cuán bien ajustan los conjuntos. La prueba comprende sólo una característica de un individuo, tal como educación. Si se tiene interés en dos características, como la relación entre el nivel educativo y el ingreso, los datos se registran en clasificación cruzada en una tabla de contingencia y se aplica la prueba de ji cuadrada. Para estas dos pruebas no se necesita considerar la forma de la población, pues sólo se necesita que los datos sean de nivel nominal.

El capítulo 17 presentó cuatro pruebas no paramétricas, pero éstas exigen que los datos sean, cuando menos, de nivel ordinal. Esto es, los datos deben ser ordenados por rangos de menor a mayor. Las pruebas presentadas fueron: *prueba de signo, prueba U de Mann-Whitney, prueba de Kruskal-Wallis de análisis de variancia* y *prueba de Wilcoxon de rangos con signo.*

GLOSARIO

Capítulo 16

Distribución ji cuadrada Es una con estas características: 1) Su valor sólo puede ser positivo. 2) Hay una familia de distribuciones ji cuadrada, una para cada grado de libertad. 3) Las distribuciones tienen sesgo positivo, pero conforme aumenta el número de grados de libertad, la distribución se aproxima a la distribución normal.

Prueba ji cuadrada para bondad de ajuste Es una cuyo objetivo es determinar cuán bien se ajusta un conjunto observado de frecuencias a un conjunto esperado de éstas. Considera sólo una característica, como la edad de una persona o el color de un automóvil.

Tabla de contingencias Si dos características, como educación e ingreso se registran en clasificación cruzada en una tabla, ésta se denomina tabla de contingencias. La prueba de ji cuadrada se aplica para determinar si las dos características están relacionadas.

Nivel nominal de medición Es el nivel de medición más "bajo". Tales datos sólo se pueden clasificar en categorías y no hay ningún orden particular para éstas. Por ejemplo, no importa si las categorías masculino y femenino se enlistan en ese orden, o femenino

primero y masculino después. Las categorías son mutuamente excluyentes, lo que significa obviamente que un individuo no puede ser masculino y femenino al mismo tiempo.

Pruebas no paramétricas o libres de distribución Pruebas de hipótesis que comprenden datos de niveles nominal y ordinal. No es necesario hacer consideraciones respecto a la forma de la población de origen; esto es, no tiene que suponerse que la población está normalmente distribuida.

Capítulo 17

Análisis de variancia por rangos en un sentido de Kruskal-Wallis Prueba que se emplea cuando no pueden cumplirse las consideraciones del análisis paramétrico de variancia (ANOVA). Su objetivo es probar si tres o más poblaciones son iguales o no. De nuevo, los datos deben estar al menos en escala ordinal.

Prueba U de Mann-Whitney Prueba no paramétrica que exige datos cuando menos al nivel ordinal de medición. Esto es, los datos deben poder ser ordenados por rangos. La prueba se utiliza cuando no pueden verificarse las consideraciones para la prueba paramétrica *t* de Student. El objetivo es determinar si es posible considerar que dos muestras independientes provienen de la misma población.

Prueba de signo Puede usarse para datos nominales. Los cálculos son mínimos tanto para el caso de muestras pequeñas como el de muestras grandes. La prueba de signo sirve para determinar, por ejemplo, si hay preferencia hacia uno de dos productos, y si es mayor el rendimiento después de un experimento que antes de éste. También sirve dicho ensayo para probar una hipótesis acerca de la mediana.

Prueba de rangos con signo de pares igualados de Wilcoxon Es otra prueba no paramétrica que exige datos cuando menos de nivel ordinal. Su objetivo es hallar si hay diferencia entre dos conjuntos de observaciones puestas en pares igualados (relacionados). Se emplea cuando no pueden cumplirse las consideraciones exigidas por la prueba t de pares.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Para una prueba de ji cuadrada, ¿qué significan f_0 y f_e a qué corresponden?
2. ¿Qué ejemplifica lo siguiente?

Afiliación política	*Contribución a la campaña (en dólares)*		
	$1–$99	*$100–$1 000*	*$1 000 y más*
Republicanos	42	87	342
Demócratas	596	302	116
Socialistas	42	49	36
Todos los demás	19	17	11

3. Refiérase al ejercicio 2. ¿Qué estadístico de prueba se usaría para determinar si existe alguna relación entre la afiliación política y el monto de una contribución?
4. Véase el ejercicio 2. ¿Cuántos grados de libertad hay?

5. Refiérase al ejercicio 2. Suponga que el valor calculado de χ^2 es 11.248 y se usa el nivel 0.05. ¿Debe aceptarse o rechazarse la hipótesis nula?
6. Para una prueba de bondad de ajuste, el valor calculado de ji cuadrada es 8.403, y el valor crítico, 5.991. Se usa el nivel 0.05. ¿Se acepta o se rechaza la hipótesis nula?
7. Refiérase al ejercicio 6. ¿Cuál es la hipótesis nula?
8. ¿Qué nivel de medición se necesita para las pruebas paramétricas de hipótesis descritas en los capítulos 11 y 12?
9. ¿Qué nivel de medición se necesita para la prueba de bondad de ajuste?
10. ¿Qué nivel de medición se necesita para la prueba *U* de Mann-Whitney?
11. ¿Cuál es el objetivo de la prueba *U* de Mann-Whitney?
12. ¿Qué consideraciones se hacen acerca de la forma de las poblaciones al usar la prueba de Kruskal-Wallis?
13. ¿Cuál es el objetivo de la prueba de Kruskal-Wallis?
14. ¿Cuál es el objetivo de la prueba de Wilcoxon de rangos con signo?
15. De las cuatro pruebas no paramétricas del capítulo 17 (pruebas de signo, de Mann-Whitney, de Kruskal-Wallis y de Wilcoxon), ¿cuál es la que trata con tres o más muestras?
16. Refiérase al ejercicio 15. ¿Cuál prueba trata de datos por pares?
17. Véase el ejercicio 15. ¿Pueden aplicarse esas pruebas a datos de niveles de intervalo y de razón?
18. Para una prueba *U* de Mann-Whitney, la hipótesis alternativa es: las mujeres tienen mejor percepción visual que los hombres. ¿Puede aplicarse una prueba de una cola, o bien, de dos colas?
19. La distribución ji cuadrada para 5 grados de libertad está distribuida aproximadamente en forma normal. ¿Es cierta esta afirmación?
20. ¿Cómo se determinan los grados de libertad para una prueba de bondad de ajuste?
21. Utilizando un ejemplo simple, describa los pasos seguidos para probar una hipótesis que comprende la mediana.

18

Números de índice

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Explicar por qué se gastan anualmente millones para elaborar y publicar índices.
2. Elaborar índices ponderados y no ponderados.
3. Elaborar índices de precio, calidad, valor y de aplicación especial.
4. Explicar cómo se elabora y utiliza un índice de precios al consumidor.
5. Citar las aplicaciones especiales del índice de precios al consumidor para determinar el ingreso real, realizar ventas deflacionarias y determinar el poder adquisitivo del dinero.

En este capítulo se examinará un medio estadístico muy útil denominado **índice**. Muchos índices, como el índice de precios al consumidor, reciben considerable atención; por ejemplo, en los noticiarios de televisión, en la primera plana de los periódicos, en el *Wall Street Journal* y en otras publicaciones dedicadas a negocios. Veamos una ilustración:

> Los precios al consumidor se elevaron en mayo a 117.5% del promedio de 1982-84 que fue 117.1% en abril . . . Este fue el menor incremento en tres meses desde que los precios de la ropa se nivelaron después de un alza brusca a principios de este año, según informó el Departamento de Trabajo . . . Aunque muchos economistas esperan todavía que la inflación se acelere más adelante en este año, el informe de mayo indica que los aumentos de precios al nivel del consumidor permanecerán moderados en los próximos meses, excepto por un salto previsto en el precio de los alimentos.[1]

SIGNIFICADO DE LOS NUMEROS INDICE

Número índice Relación en porcentaje que mide el cambio de un tiempo a otro en precio, cantidad, valor o algún otro elemento de interés.

✱ Ejemplo

El uso principal de un número índice en la administración y los negocios es evaluar el cambio porcentual de un tiempo a otro. Para ilustrar esto, el salario promedio por hora en la industria de manufactura en 1980 era de $7.27 (dólares), de acuerdo con datos de la Oficina de Estadísticas Laborales. En abril de 1986 fue de $10.12.[2] ¿Cuál es el índice salarial en dicha industria en abril de 1988 con base en 1980?

✔ Solución

Es 139.2, valor calculado por:

$$\frac{\text{Salarios en abril de 1988}}{\text{Salarios en 1980}} \times 100 = \frac{\$10.12}{\$7.27} \times 100 = 139.2$$

lo que indica que el salario (por hora) en la industria de manufactura en 1988 comparado con 1980 fue 139.2%, o sea que aumentó 39.2% durante ese periodo, lo que resulta de 139.2 − 100.0.

✱ Ejemplo

La oficina del Censo (de Estados Unidos) informa que la población rural bajó de 30 529 000 en 1930, a 5 100 000 en 1988.[3] ¿Cuál es el índice para 1988 basado en 1930?

---

[1] *The Wall Street Journal*, junio 22 de 1988, pág. 1.
[2] U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, pág. 85.
[3] U.S. Bureau of the Census, *Current Population Reports*, series P-27, núm. 56.

✔ Solución

El índice es 16.7, valor obtenido.

$$\frac{\text{Población en 1988}}{\text{Población en 1930}} \times 100 = \frac{5\,100\,000}{30\,529\,000} \times 100 = 16.7$$

Esto indica que la población rural en 1988 comparada con 1930 fue 16.7%; o sea que tal población disminuyó 83.3% durante el periodo de 58 años, lo que resulta de 100.0 − 16.7.

✱ Ejemplo

Para ilustrar la elaboración de un índice comparando una cosa con otra, considérense los datos siguientes. La Administración Nacional de Seguridad en Carreteras (de Estados Unidos), reportó que en 1988 la tasa de fallecimientos por accidentes en vehículos de motor en Estados Unidos fue de 22 por cada 100 000 habitantes. En Italia fue de 16 por 100 000. ¿Cuál es dicha tasa en Italia comparada con la de Estados Unidos, expresada como número índice?

✔ Solución

El índice relativo para Italia es 72.7, calculado por:

$$\frac{\text{Tasa de mortalidad para Italia}}{\text{Tasa de mortalidad para E.U.}} \times 100 = \frac{16}{22} \times 100 = 72.7$$

lo que indica que la tasa de defunciones en Italia es 72.7% de la de Estados Unidos, o sea que la tasa en Italia es 27.3% menor que la de Estados Unidos.

Obsérvese en los enunciados anteriores que:

1. El índice de los salarios en manufactura de 139.2 y el índice de la tasa de defunciones por accidentes en vehículos de motor de 72.7, son en realidad porcentajes. El signo de % algunas veces se omite.
2. Cada número índice tiene una **base**. Hasta hace poco el **periodo base** para la mayoría de los índices compilados y publicados por el gobierno de Estados Unidos fue 1967, lo que se indica "1967 = 100". Sin embargo, esta política cambió y los índices tienen ahora diferentes periodos base. Como ejemplos, el índice de precios al consumidor tiene ahora un periodo base de 1982–84. Los índices de importación y exportación de Estados Unidos tienen 1977 como periodo base. El índice de precios a los fabricantes utiliza 1982 = 100, y la razón de paridad, la cual es un índice (el cociente de los precios recibidos de los agricultores a los precios pagados por los mismos), todavía tiene 1910–14 como periodo base.
3. El **número base** de la mayoría de los índices es 100.0. En consecuencia, cuando se calcula el índice de los salarios (por hora) en manufactura para 1988 con base en 1980, se divide $10.12 (dólares) entre $7.27 y luego se multiplica el cociente 1.392 por 100. Esto da el índice de 139.2, el cual es de fácil interpretación: el promedio de los salarios en manufactura aumentó 39.2% de 1980 a 1988. No

hay razón, sin embargo, por la que 10, 50, 1 000 o cualquier otro número no pueda usarse como número base. De hecho, la New York Stock Exchange tiene (diciembre 31, 1965) = 50 como índice. La Standard & Poor's Corporation Index utiliza 1941–43 como el periodo base y 10 como base, expresado 1941–43 = 10.

4. La mayoría de los índices de negocios y económicos se evalúan a la unidad de porcentaje, como 312 o bien 96, o se redondean a décimos de 1%, como 97.5 o bien 178.6.

AUTOEXAMEN 18-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. El promedio de los salarios (por hora) en minería en abril 1988 fue $12.44. En 1979, $8.49.[4] Exprese el promedio de salarios en 1988 como un índice usando el de 1979 como base (denominador). Interprete el resultado.

2. De acuerdo con *Fortune,* las ventas anuales de algunas empresas industriales seleccionadas fueron:[5]

Rango	*Compañía*	*Ventas (en millones de dólares)*
1	GM	101 781.9
2	Exxon	76 416.0
3	Ford	71 643.4
4	IBM	54 217.0
10	Chrysler	26 257.7

a. Exprese las ventas anuales de General Motors en forma de índice usando las ventas de International Business Machines como base (denominador). Interprete el resultado.

b. Exprese las ventas anuales de Chrysler como un índice usando las ventas de IBM como base. Interprete el resultado.

¿POR QUE CONVERTIR DATOS A INDICES?

La compilación de números índice, como los índices de precios al productor (IPP), no es una innovación reciente. A un italiano, G. R. Carli, se le reconoce como el creador de los primeros números índice en 1764. Los incorporó en un informe que elaboró respecto a las fluctuaciones de precios en Europa de 1500 a 1750. En Estados Unidos no se utilizó ningún enfoque sistemático para recopilar e informar datos, presentado como índice, antes de 1900. El índice del costo de vida (llamado ahora índice de precios al consumidor) se introdujo en 1913 y desde entonces la lista de los índices utilizada va en aumento constante.

¿Por qué convertir los datos a índices? Un índice es una forma conveniente de expresar un cambio en un grupo heterogéneo de elementos. Por ejemplo, el índice de precios al consumidor (IPC), abarca cerca de 400 elementos, incluyendo pelotas de golf, podadoras de césped, hamburguesas, servicios funerarios y honorarios de

[4] U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review,* junio de 1988, pág. 87.

[5] *Fortune,* julio de 1988, pág. D32.

dentistas. Los precios se expresan en dólares por libra, caja, yarda y otras muchas unidades. Sólo por la conversión de los precios de tantos y tan diversos artículos en un número índice cada mes, pueden mantenerse informados el gobierno federal y otros organismos preocupados por la inflación, acerca del movimiento global de los precios al consumidor.

La conversión de los datos a índices también facilita la estimación de la tendencia en una serie compuesta por números excepcionalmente grandes. Por ejemplo, supóngase que en 1989 las ventas al menudeo fueron por $185 679 432 621.87 (dólares) y las ventas en 1982 fueron por $185 500 000 000.00. El aumento de $179 432 621.87 parece significativo. No obstante, si las ventas totales se expresan como un índice, basado en las ventas de 1982, el aumento sería, ¡menos de un décimo de 1%!

$$\frac{\text{Ventas totales al menudeo en 1989}}{\text{Ventas totales al menudeo en 1982}} = \frac{\$185\ 679\ 432\ 621.87}{\$185\ 500\ 000\ 000.00} \times 100 = 100.09$$

TIPOS DE NUMEROS INDICE

Un índice puede clasificarse como un **índice de precios,** un **índice de cantidad** (o volumen), un **índice de valor** o un **índice especial.** A continuación se presentan algunos ejemplos de los cuatro tipos de índices que se publican en forma regular.

Indices de precios

Indice de precios al consumidor. En realidad hay dos índices de precios al consumidor, uno para todos los consumidores urbanos y otro para los empleados de servicios urbanos y de oficina. También hay otros índices para mostrar los cambios en los precios de alimentos, transportes y otros (1982–84 = 100).

Indice de precios del productor. Mide el cambio en el promedio de los precios recibidos en los mercados primarios de Estados Unidos por los productores de bienes o satisfactores, en todas las etapas de manufactura (1982 = 100).

Indices de precios de importación y exportación en Estados Unidos. Estos se presentan en la publicación *Monthly Labor Review* (1977 = 100).

Indices de cantidad o volumen de producción

Indices de cantidades de producción del Federal Reserve Board. Además, hay índices de producción de grupos de mercado y de industrias. Se publican mensualmente en *Survey of Current Business* (1977 = 100).

Indices de valores

Contratos de valores de construcción otorgados en 50 estados.

Indice publicitario de McCann-Erickson. Subdividido en redes de televisión, televisoras locales, revistas, noticiarios y periódicos, este índice se informa mensualmente en el *Survey of Current Business.*

Indices especiales

Hay varios índices que reflejan la actividad económica global en Estados Unidos. El gobierno federal da a conocer un índice o lista de los principales indicadores económicos. Incluye una diversidad de indicadores económicos tales como precios de acciones comunes, nuevos pedidos de plantas y equipo y permisos de construcción otorgados. Otro índice parecido, el Forbes, combina producción, ventas en tiendas departamentales y varios otros indicadores de empresas o negocios.

ELABORACION DE LOS NUMEROS INDICE

Básicamente se usan dos métodos para elaborar índices: el *no ponderado* y el *ponderado*.

Indices no ponderados

Los **índices no ponderados** también se llaman *índices simples*. Para ilustrar la elaboración de un índice simple de precios se considera el precio de las llantas para remolque de lancha A78-10 en los años seleccionados (véase la tabla 18-1) que se ha convertido a número índice. Los índices en esta primera ilustración a veces se llaman *relativos*. El periodo base es 1970; esto es, 1970 = 100.

TABLA 18-1

Indices de precios de llantas para remolques, 1965-1990

Año	*Precio de las llantas*	*Indice (1970 = 100)*
1965	$18	$\frac{18}{20} \times 100 = 90.0$
1970	20	$\frac{20}{20} \times 100 = 100.0$
1971	22	$\frac{22}{20} \times 100 = 110.0$
1972	23	$\frac{23}{20} \times 100 = 115.0$
1990	38	$\frac{38}{20} \times 100 = 190.0$

El precio del periodo base se indica como p_0, y un precio distinto al del periodo base, se denomina *periodo dado* y se denota por p_n. Para calcular el índice simple de precios (relativo) P de un periodo dado:

$$\boxed{P = \frac{p_n}{p_0}(100)}$$

Para 1990 el índice de precios para la llanta de remolque es 190.0.

$$P = \frac{\$38}{\$20}(100) = 190.0$$

Al interpretar esto puede decirse que el precio de las llantas aumentó 90% respecto al periodo base de 1970 a 1990.

Si los años 1970–71 se hubieran seleccionado como periodo base (es decir, 1970–71 = 100), la media aritmética de los dos precios ($20 y $22) sería el valor representativo en el año base. Los precios $20, $22 y $23 se promediarían si 1970–72 se hubiera seleccionado como base. El precio medio sería $21.67. Los índices producidos usando estos tres periodos base se muestran en la tabla 18-2. (Obsérvese que cuando 1970–72 = 100, por lógica los números índice para 1970, 1971 y 1972 promedian 100.0.)

TABLA 18-2

Precios de las llantas para remolque convertidos a índices usando tres distintos periodos base

Año	*Precio de la llanta*	*Indice de precio (1970 = 100)*	*Indice de precio (1970-71 = 100)*	*Indice de precio (1970-72 = 100)*
1965	$18	90.0	$\frac{18}{21} \times 100 = 85.7$	$\frac{18}{21.67} \times 100 = 83.1$
1970	20	100.0	$\frac{20}{21} \times 100 = 95.2$	$\frac{20}{21.67} \times 100 = 92.3$
1971	22	110.0	$\frac{22}{21} \times 100 = 104.8$	$\frac{22}{21.67} \times 100 = 101.5$
1972	23	115.0	$\frac{23}{21} \times 100 = 109.5$	$\frac{23}{21.67} \times 100 = 106.2$
1990	38	190.0	$\frac{38}{21} \times 100 = 181.0$	$\frac{38}{21.67} \times 100 = 175.4$

AUTOEXAMEN 18-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los promedios de sueldos (por hora) en el comercio al menudeo para periodos seleccionados son:

Año	*Salarios promedio*
1968	$2.16
1969	2.30
1970	2.44
1988 (Abr)	6.27

Fuente: *Monthly Labor Review*, junio 1988, pág. 85.

1. Usando 1968 como periodo base, determine un número índice para abril de 1988 que pudiera llamarse con certeza índice del promedio de los sueldos en esa actividad. Interprete el resultado.
2. Usando el promedio de 1968 y 1969 (esto es, 1968–69 = 100), determine el índice para abril de 1988.
3. ¿Cuál es el índice para 1968 usando 1970 = 100? Interprete el resultado.

Un problema un poco más complejo consiste en determinar un índice de precios de alimentos. Se supone para este ejemplo que la familia representativa consume sólo tres clases de alimentos: leche, pan y aguacates. Con el procedimiento para calcular índices simples, se encuentra que el índice no ponderado de precios de alimentos en 1990 (véase la tabla 18-3) es 122.9 (1977 = 100). El índice para 1990 se calculó dividiendo el total de los precios para 1990 entre el total para 1977.

TABLA 18-3

Cálculo de un índice de precios de alimentos usando el método simple no ponderado

Artículo	*Precio en 1977* p_0	*Precio en 1990* p_n
Leche (litro)	$0.64	$0.61
Pan (hogaza)	0.65	0.59
Aguacate (pieza)	0.50	1.00
Total	$1.79	$2.20

El índice de precios es:

$$P = \frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_0}(100) = \frac{\$2.20}{\$1.79}(100) = 122.9$$

Sin embargo, el índice no ponderado de precio de 122.9, parece ilógico porque las dos clases principales de alimento *bajaron* de precio de 1977 a 1990; sólo aumentó el precio de los aguacates. La mayoría de los consumidores comen aguacates con poca frecuencia. En consecuencia, parece que los precios de la leche y el pan ameritan más ponderación (importancia) que el precio de los aguacates.

También, el método simple para calcular un índice, ilustrado en el problema anterior, no cumple la *prueba de unidades*. Esto significa que si las clases se cotizaran en unidades diferentes, la respuesta sería diferente de 122.9. Por ejemplo, si el precio de la leche se cotizara en galones en vez de litros y si los aguacates se cotizaran por caja en lugar de unitariamente, el índice de precio no sería 122.9. Por ser inadecuado, el método simple de agregación rara vez se usa en la práctica real para este tipo de problemas. En su lugar se aplica el método ponderado descrito en la siguiente sección.

INDICES PONDERADOS

Los dos métodos para calcular un **índice ponderativo de precios** son el de **Laspeyres** y el de **Paasche**. Difieren sólo con respecto al periodo usado para la ponderación. El método de Laspeyres emplea periodos base ponderados, el método de Paasche usa ponderaciones de los años actuales.

Indice de precio de Laspeyres

A fines del siglo XVIII Etienne Laspeyres ideó un método para determinar un índice ponderativo usando *periodos-base ponderados.* Al aplicar su método, un índice ponderativo de precio se calcula por:

$$P = \frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}(100)$$

✱ Ejemplo

Los precios de tres alimentos para 1977 y 1990, y las cantidades adquiridas por un consumidor representativo en 1977 son:

Artículo	*Precio en 1977* p_0	*Cantidad consumida en 1977* q_0	*Precio de 1990* p_n
Leche (litro)	$0.64	100	$0.61
Pan (hogaza)	0.65	1 000	0.59
Aguacate (pieza)	0.50	1	1.00

¿Cuál es el índice ponderado de precio para 1990 con 1977 = 100?

✔ Solución

Se determina primero la cantidad total gastada en alimentos por el consumidor representativo en el periodo base de 1977. La cantidad total gastada en las tres clases de alimentos fue $714.50 (véase la tabla 18-4). Con objeto de medir el efecto del precio, *se supone que la cantidad de alimento consumido no cambió entre el periodo base (1977) y 1990.* En consecuencia, para encontrar cuánto ha gastado

TABLA 18-4

Cálculo de un índice ponderado de precios (1977 = 100)

Artículo	*Precio en 1977* p_0	*Cantidad consumida en 1977* q_0	p_0q_0	*Precio en 1990*	p_nq_0
Leche (litro)	$0.64	100	$ 64.00	$ 0.61	$ 61.00
Pan (hogaza)	0.65	1 000	650.00	0.59	590.00
Aguacate (pieza)	0.50	1	0.50	1.00	1.00
				$714.50	$652.00

el consumidor representativo en 1990, se multiplican los precios de 1990 por las cantidades correspondientes consumidas en 1977. El total es $652.00.

El índice ponderado de precio para 1990 es 91.3, que se obtiene por:

$$P = \frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}(100) = \frac{\$652.00}{\$714.50}(100) = 91.3$$

Interpretación El precio promedio de alimentos *bajó* cerca de 8.7% de 1977 a 1990. El método ponderativo da una respuesta más lógica (91.3) que el índice no ponderado (122.9), el cual indica un *aumento* de cerca del 23% en el precio de alimentos.

Obsérvese que el método ponderado, también llamado *método ponderado de agregación*, utiliza las cantidades consumidas en el periodo base q_0 como ponderaciones. Se supone que no cambian los hábitos de alimentación del consumidor representativo de 1977 a 1990. En consecuencia, *sólo fluctúa el precio,* causando la baja del índice de 100 en el periodo base, a 91.3 en 1990.

AUTOEXAMEN 18-3

Las respuestas se dan al final del capítulo

Se va a elaborar un índice de precios de ropa para 1989 con base en 1982. Los precios de 1982 y 1989 y las cantidades consumidas en 1982, se muestran a continuación.

Artículo	*Precio en 1982*	*Cantidad vendida en 1982*	*Precio en 1989*
Vestidos (unidad)	$35	500	$65
Zapatos (par)	40	1 200	90

1. Suponiendo que el número vendido permanece constante, esto es, que se vendió el mismo número en 1989 y en 1982, ¿cuál es el índice ponderado de precio para 1989 usando 1982 como base?
2. Interprete el resultado.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Los precios promedio de compra y el monto del préstamo hipotecario normal de casas nuevas para un periodo reciente de cuatro años son:

Año	*Precio de compra*	*Monto del préstamo*
1981	$90 400	$65 300
1982	94 600	69 800
1983	92 800	69 500
1988 abril	110 500	84 200

Fuente: *Federal Reserve Bulletin*, febrero de 1985, pág. A32, junio de 1988, pág. A49.

a. Usando 1981 como periodo base, ¿cuál es el precio de compra de una casa nueva para 1988? Interprete el resultado.
b. Con 1981–82 = 100, ¿cuál es el índice de la cantidad del préstamo hipotecario usual para 1988? Interprete el resultado.

2. Los sueldos (por hora) en industrias manufactureras de artículos durables para diciembre 1979 y abril 1988 son:

	Salarios por hora	
Grupo manufacturero	*diciembre 1979*	*abril 1988*
Productos de madera	$6.24	$ 8.48
Muebles y accesorios	5.26	7.81
Piedra, arcilla y vidrio	7.11	10.40
Instrumentos y productos relacionados	6.50	9.85

Fuente: *Monthly Labor Review*, febrero de 1981, tabla 17; junio de 1988, pág. 85.

a. Convierta dichos salarios o sueldos de abril 1988 a índices para cada uno de los cuatro grupos, empleando diciembre 1979 = 100.
b. Interprete los resultados.

3. Los precios de la fruta y las cantidades consumidas de 1983 a 1990 son:

Fruta	*Precio en 1983*	*Cantidad consumida en 1983*	*Precio en 1990*
Plátanos (libra)	$0.23	100	$0.35
Toronjas (unidad)	0.29	50	0.27
Manzanas (libra)	0.35	85	0.35
Fresas (canasta)	1.02	8	1.69
Naranjas (saco)	0.89	6	0.99

a. Suponiendo que las cantidades de fruta consumida no cambiaron entre 1983 y 1990, determine los índices ponderados de precio usando el método de Laspeyres para 1990 (1983 = 100).
b. Interprete los resultados.

4. Los precios y cantidades de artículos producidos en una fábrica pequeña de estampados para enero 1985 y los precios de esos artículos para enero 1990 son:

	Enero de 1985		
Artículo	*Precio*	*Cantidad producida*	*Precio en enero de 1990*
Rondana	$0.07	17 000	$0.10
Chaveta	0.04	125 000	0.03
Perno de estufa	0.15	40 000	0.15
Tuerca hexagonal	0.08	62 000	0.05

a. Suponiendo que los volúmenes producidos no cambiaron de enero 1985 a enero 1990, determine el índice ponderado de precio para enero 1990, usando enero 1985 como periodo base.
b. Interprete los resultados.

Indice de cantidad (o volumen) de Laspeyres

El método de Laspeyres para ponderar también se emplea para calcular un *índice ponderado de cantidad.* El procedimiento es similar al método para realizar un índice ponderado de precio, excepto que los *precios de año base* se usan como ponderaciones en lugar de las cantidades del año base. La fórmula para obtener un índice ponderado de cantidad o volumen, designado por Q, es

$$\boxed{Q = \frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_0 q_0}(100)}$$

✱ Ejemplo

Los precios de minerales seleccionados en 1983 y las cantidades extraídas en 1989 son:

Producto	*Precio en 1983* p_0	*Cantidad extraída en 1983* q_0	*Cantidad extraída en 1989* q_n
Petróleo (barriles)	$ 2	100	110
Carbón (tonelada)	20	10	9
Azufre (vagón tanque)	15	90	80
Granito (bloque)	60	5	5

¿Cuál es el índice del volumen extraído en 1989 utilizando el año 1983 como el periodo base?

✔ Solución

Se puede intentar sumar las cantidades de 1989 y dividir ese total entre el de las cantidades de 1983. Por supuesto, es imposible sumar barriles, toneladas, vagones tanques y bloques. En consecuencia, las cantidades tienen que convertirse a un denominador común usando los precios de 1983.

Se supone en el cálculo del índice de cantidad que los precios de 1983 aún prevalecen en 1989, esto es, el precio de cada producto permanece constante. En conclusión, cualquier cambio en el índice de cantidad *sólo se debe a la cantidad extraída.* En este problema tal cantidad descendió en 7.3% de 1983 a 1989. (Véanse los cálculos en la tabla 18-5.)

$$Q = \frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_0 q_0}(100) = \frac{\$1\,900}{\$2\,050}(100) = 92.7$$

TABLA 18-5

Cálculo del índice ponderado de la cantidad de minerales extraídos en 1989, usando el método de Laspeyres (1983 = 100)

Mineral	*Precio en 1983* p_0	*Cantidad extraída en 1983* q_0	p_0q_0	*Cantidad extraída en 1989* q_n	p_0q_n
Petróleo (barriles)	$ 2	100	$ 200	110	$ 220
Carbón (tonelada)	20	10	200	9	180
Azufre (vagón tanque)	15	90	1 350	80	1 200
Granito (bloque)	60	5	300	5	300
			$2 050		$1 900

AUTOEXAMEN 18-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Los precios al mayoreo y los volúmenes producidos de productos agrícolas son:

1. Usando el método de Laspeyres, calcule un índice para el volumen de la producción agrícola de 1989 (1975 = 100).
2. Interprete el índice.

	Precio		*Producción*	
Artículo	*1975*	*1989*	*1975*	*1989*
Trigo (bushel)	$ 2.00	$ 4.00	100	700
Huevos (docena)	0.30	0.20	1 000	800
Puerco (100 lb)	60.00	70.00	50	110

Indice de precios de Paasche

Varios años después de que Laspeyres introdujo el concepto de usar como ponderaciones las cifras del periodo base, Paasche sugirió un procedimiento similar, excepto que las ponderaciones del año actual se sustituyeron por ponderaciones del periodo base. La fórmula de Paasche para un índice ponderado de precios usando las cifras de año actual como ponderaciones es:

$$P = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}(100)$$

El índice ponderado del precio usando la fórmula de Paasche se ilustra en la tabla 18-6. Los datos son los mismos que se usaron antes, pero se han agregado las cantidades consumidas en 1990.

$$P = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}(100) = \frac{\$655}{\$714}(100) = 91.7$$

TABLA 18-6

Cálculo del índice ponderado de precios para 1990 usando la fórmula de Paasche (1977 = 100)

Producto	*Precio en 1977* p_0	*Precio en 1990* p_n	*Cantidad consumida en 1990* q_n	p_0q_n	p_nq_n
Leche (litro)	\$0.64	\$0.61	200	\$128	\$122
Pan (hogaza)	0.65	0.59	900	585	531
Aguacate (pieza)	0.50	1.00	2	1	2
				\$714	\$655

La interpretación del índice de precios (91.7) usando el método de Paasche es la siguiente: una canasta alimentaria seleccionada en 1990 cuesta 8.3% menos que las mismas a los precios de 1977, calculado por medio de 100.0 − 91.7.

El método de Paasche tiene la ventaja de usar las cifras de consumo actual como ponderaciones; esto es, el patrón de consumo está siempre actualizado. Sin embargo, el método plantea un problema práctico. El índice debe revisarse cada año usando nuevas ponderaciones del año presente. Por ejemplo, si el método de Paasche se utiliza para calcular los índices de precios al productor, tendría que determinarse cada año el consumo de aproximadamente 2 800 artículos con objeto de ponderar los precios del año base y del año presente. En consecuencia, el método de Laspeyres es de uso más común (con cierta modificación).

INDICE DE VALOR

Un **índice de valor,** como el índice de las ventas de una tienda de departamentos, necesita para su elaboración los precios del año base, las cantidades del año base, los precios del año presente y las cantidades del año presente. Su fórmula es:

$$\boxed{V = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_0}(100)}$$

✱ Ejemplo

Supóngase que los precios y cantidades vendidas de ropa en 1982 y 1989 fueron:

Artículo	*Precio en 1982* p_0	*Cantidad vendida en 1982 (en miles)* q_0	*Precio en 1989* p_n	*Cantidad vendida en 1989 (en miles)* q_n
Corbatas (unidad)	$ 1	1 000	$ 2	900
Trajes (unidad)	30	100	40	120
Zapatos (par)	10	500	8	500

¿Cuál es el índice de valor para 1989 usando 1982 como periodo base?

✔ Solución

La ventas totales en 1989 fueron por $10 600 000 y la cifra equivalente en 1982 es $9 000 000 (véase la tabla 18-7). En consecuencia, el índice de valor para 1989, usando 1982 = 100, es 117.8. El valor de las ventas de ropa fue 117.8% de las ventas en 1982. En otras palabras, el incremento en las ventas de ropa subieron 17.8% de 1982 a 1989.

$$V = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_0}(100) = \frac{\$10\ 600\ 000}{\$9\ 000\ 000}(100) = 117.8$$

TABLA 18-7

Elaboración de un índice de valor para 1989 (1982 = 100)

Artículo	*Precio en 1982* p_0	*Cantidad vendida en 1982 (en miles)* q_0	p_0q_0 *(miles)*	*Precio en 1989* p_n	*Cantidad vendida en 1989 (en miles)* q_n	p_nq_n *(miles)*
Corbatas (unidad)	$ 1	1 000	$1 000	$ 2	900	$ 1 800
Trajes (unidad)	30	100	3 000	40	120	4 800
Zapatos (par)	10	500	5 000	8	500	4 000
			$9 000			$10 600

AUTOEXAMEN 18-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

El número de artículos producidos por Houghton Products en 1983 y 1989 y los precios al mayoreo son:

1. Encuentre el índice del valor de producción para 1989 usando 1983 como periodo base.
2. Interprete el índice.

	Precio		*Número producido*	
Artículo producido	*1983*	*1989*	*1983*	*1989*
Pasadores (caja)	$ 3	$4	10 000	9 000
Compuesto para corte (libra)	1	5	600	200
Acopladores (unidad)	10	8	3 000	5 000

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Los precios y los niveles de producción de granos en 1977 y 1989 son:

Cereal	*Precio en 1977*	*Cantidad producida en 1977 (en millones de bushels)*	*Precio en 1989*	*Cantidad producida en 1989 (en millones de bushels)*
Avena	$1.52	200	$1.87	214
Trigo	2.10	565	2.05	489
Maíz	1.48	291	1.48	203
Cebada	3.05	87	3.29	106

   a. Usando 1977 como periodo base y el método de Laspeyres, determine el índice ponderado de las cantidades de cereales o granos producidas en 1989.
   b. Usando 1977 como base, encuentre el índice del valor de los granos producidos en 1989.

6. La Johnson Wholesale Company manufactura una variedad de productos. Los precios y las cantidades producidas en 1974 y 1989 son:

Producto	*Precio en 1974*	*Precio en 1989*	*Cantidad producida en 1974*	*Cantidad producida en 1989*
Motor pequeño (unidad)	$23.60	$28.80	1 760	4 259
Compuesto limpiador (galón)	2.96	3.08	86 450	62 949
Clavos (libra)	0.40	0.48	9 460	22 370

   a. Usando 1974 como periodo base y el método de Laspeyres, determine el índice ponderado de las cantidades producidas en 1989.
   b. Usando 1974 como periodo base, determine el índice del valor de los artículos producidos en 1989.

INDICES ESPECIALES

Los **índices para uso especial** por lo general emplean una combinación de indicadores de administración y económicos, como ventas, empleo y precios de acciones comunes. Como se mencionó, el gobierno federal compila y publica un índice de los indicadores económicos principales. *Forbes* hace lo mismo. El índice Forbes es una medida de la actividad económica de Estados Unidos compuesta de ocho elementos igualmente ponderativos: producción industrial total, nuevas demandas de compensación por desempleo, costo de los servicios relativos a todos los precios al consumidor, el nivel de nuevos pedidos de productos duraderos en comparación con los inventarios de fabricantes, total de ventas al menudeo, nuevos inicios de obras de construcción de casas, ingreso personal y total de créditos instituidos al consumidor. Para medir estos ocho elementos, *Forbes* inspecciona 10 series de datos del gobierno de Estados Unidos, incluyendo el índice de precios al consumidor y los créditos instituidos al consumidor emitidos por la Federal Reserve Board.

El nivel más bajo de la actividad económica en Estados Unidos desde 1973, medido por el índice Forbes, fue en 1975, cuando el índice permaneció aproximadamente en 106.[6] Sin embargo, se ha movido hacia arriba desde 1982 y el índice está ahora por encima de 190. Al comentar las razones de esta tendencia ascendente en la economía, Forbes señaló: "los fabricantes han estado aprovechando los beneficios de una economía nacional relativamente fuerte y la mejoría del mercado de exportación. Pero las condiciones pueden ser más severas si el dólar continúa fortaleciéndose. Por el momento la economía parece sana".

La elaboración de un índice de uso especial diseñado para medir la actividad general de los negocios se muestra usando los datos de la tabla 18-8. Obsérvese que a cada serie se le asignan ponderaciones, con base en el criterio estadígrafo, y que las series están en unidades diferentes, como dólares, cargas de vagón o camión y así sucesivamente. Esta ponderación es algo diferente de la ponderación *Forbes,* la cual aplica valores relativos iguales a los elementos.

TABLA 18-8

Datos para calcular el índice de actividad empresarial general

	Ventas en tiendas departamentales (en miles de millones de dólares)	*Indice de empleo (1967 = 100)*	*Cargas en camión (en millones)*	*Exportaciones (en miles de toneladas)*
Ponderación	(0.40)	(0.30)	(0.10)	(0.20)
1977	$20	100	50	500
1987	41	110	30	900
1989	44	125	18	700

[6] Forbes, agosto 8 de 1988, pág. 32.

Para evaluar el índice de actividad general de negocios para el año 1989 usando 1977 = 100, cada cifra de 1989 se expresa primero como relativa, usando la cifra del periodo base como denominador. Como ejemplo, las ventas en tiendas de departamentos en 1989 se convierten en cifras relativas por medio de ($44/$20) × 100 = 220. Después las cifras relativas se ajustan con las ponderaciones apropiadas. Para la cifra relativa de tiendas de departamentos, 220 × 0.40 = 88.0.

El índice de la actividad general de empresas de 1989 es 157.1. Se interpreta que la actividad de negocios aumentó 57.1% desde el periodo base (seleccionado arbitrariamente como 1977) hasta 1989.

Ventas en tiendas departamentales:	$\left(\frac{\$44}{\$20}\right)100 \times 0.40 =$	88.0
Empleos:	$\left(\frac{125}{100}\right)100 \times 0.30 =$	37.5
Cargas en camiones:	$\left(\frac{18}{50}\right)100 \times 0.10 =$	3.6
Exportaciones:	$\left(\frac{700}{500}\right)100 \times 0.20 =$	28.0
		157.1

AUTOEXAMEN 18-6

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Como lo hace un estadígrafo, usted desea calcular y publicar cada año un índice de uso especial, que planea denominar *Índice de actividad empresarial.* Tres series parecen promisorias como bases para el índice, y son el precio del algodón, el número de automóviles nuevos vendidos y la tasa de movimiento del dinero (publicada por el banco local). En forma arbitraria decide que el movimiento de dinero debe tener una ponderación de 60%; el número de automóviles nuevos vendidos, de 30%; y el precio del algodón, de 10%.

1. Elabore el *Índice de actividad empresarial* para 1981 (el periodo base) y 1990.

Año	*Precio del algodón (por libra)*	*Número de automóviles vendidos*	*Tasa de movimiento del dinero (un índice)*
1991	$0.20	100 000	80
1990	0.50	80 000	120

2. Interprete los índices.

INDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

Con frecuencia se ha mencionado anteriormente el índice de precios al consumidor (IPC). Mide los cambios en los precios de una canasta fija de artículos y servicios en el mercado, de un periodo a otro. En enero 1978 el Bureau of Labor Statistics (de Estados Unidos) inició la publicación de dos índices IPC para dos grupos de población. Un índice para los consumidores urbanos, que cubre el 80% de la población total, y otro índice para los empleados de servicios urbanos y de oficina que cubre aproximadamente 32% de la población total.

En forma abreviada, el IPC cumple varias funciones principales. Permite a los consumidores determinar el grado de deterioro de su poder adquisitivo por el aumento de precios. A este respecto, es un cartabón para la revisión de salarios, pensiones y otros tipos de ingresos para mantener el paso con los cambios en los precios. Igualmente importante, es un indicador económico de la tasa de inflación en Estados Unidos.

El índice incluye cerca de 400 elementos y unos 250 inspectores (de medio tiempo y tiempo completo) recolectan cada mes los datos de precios. Los precios se recopilan en más de 21 000 establecimientos de comercio al menudeo y 60 000 unidades habitacionales en 91 áreas urbanas del país. Los precios de cunas para bebé, pan, cerveza, cigarrillos, gasolina, cortes de pelo, tasas de interés hipotecario, honorarios médicos, impuestos y cargos por internación de cirugía, son sólo algunos de los elementos que se incluyen en lo que se ha denominado con frecuencia "canasta de mercado" representativa de artículos y servicios.

Originado en 1913 y publicado en forma regular desde 1921, el periodo estándar de referencia (periodo base) se ha actualizado en forma periódica. Los periodos base antes del presente (1982–84) fueron 1967, 1957–59, 1947–49. 1935–39 y 1925–29.

La necesidad de este cambio de base frecuente, es obvia. Los patrones de consumo tienen cambios notables. El automóvil ha reemplazado al caballo como medio de transporte. En las décadas de 1910 y 1920 se gastó en educación de alto nivel una proporción relativamente baja del ingreso de empleados de servicios y de oficina. Ahora la familia representativa gasta una fracción considerable de sus ingresos en mejor educación para sus hijos, y el IPC refleja cualesquiera cambios en costos de colegiaturas, libros y computadoras personales.[7]

Además del cambio periódico del periodo base, el Bureau of Labor Statistics efectúa una extensa encuesta de gastos del consumidor de tiempo en tiempo, para determinar qué elementos van a incluirse en el IPC, y las ponderaciones relativas que se asignarán a casetes para estéreos, plátanos, gasolina, rentas, etc.

El IPC no es el único índice. Hay índices de precios para las ciudades de Nueva York, Chicago y otras grandes urbes. También hay índices de precios al consumidor

---

[7] Véase un análisis del método general para calcular el IPC en *BLS Handbook of Methods*, Bulletin 2285 (Bureau of Labor Statistics, 1988). Una presentación general del IPC revisado recientemente, que refleja los patrones de gastos 1982-84, se encuentra en *The Consumer Price Index: 1987 Revision*, Reporte 736 (Bureau of Labor Statistics, 1987)

para alimentos, ropa, atención médica y otros elementos. A continuación se muestran algunos de ellos para abril de 1988 (1982–84 = 100).

Artículos	*Abril de 1988*
Todos los artículos	117.1
Alimentos y bebidas	116.7
Ropa y artículos personales	117.0
Transportes	107.2
Atención médica	136.9
Recreación	119.6
Vivienda	117.3

Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, pág. 94.

Un examen de esta lista muestra que el precio ponderado de todos los elementos combinados aumentó en 17.1% desde 1982 hasta 1984, la atención médica fue la que aumentó más (36.9%), y el transporte fue lo que aumentó menos (7.2%).

Usos especiales del índice de precios al consumidor

Además de medir el cambio en los precios de artículos y servicios, ambos índices de precios al consumidor tienen otras aplicaciones. El IPC sirve para determinar el ingreso personal real disponible, para deflacionar las ventas u otras series, para determinar el poder de compra de la unidad monetaria y evaluar el aumento en el costo de la vida.

Ingreso real

Como ejemplo del significado y el cálculo del *ingreso real*, supóngase por sencillez, que al presente el índice de precios al consumidor es 200 con respecto a 1982–84 = 100. Supóngase también que la señora Flores ganó $20 000 (dólares) en el periodo base y que tiene un ingreso actual de $40 000. Obsérvese que aunque su *ingreso monetario* se duplicó con respecto al periodo base de 1982–84, los precios que pagó por alimentos, gasolina, ropa y otros productos también se duplicaron. En consecuencia, el estándar o nivel de vida de esa persona en el momento actual, permaneció igual al del periodo base. Los aumentos de precios exactamente igualaron al aumento en su ingreso, de modo que su poder de compra presente (ingreso real) permanece en $20 000. (Véanse los cálculos de la tabla 18-9.)

En general:

$$\boxed{\text{Ingreso real} = \frac{\text{Ingreso en dinero}}{\text{IPC}} \times 100.}$$

TABLA 18-9

Cálculo del ingreso real para 1982-84 y para el año actual

Año	*Ingreso en dinero*	*Indice de precios al consumidor (1982–84 = 100)*	*Ingreso real*	*Cálculo del ingreso real*
1982–84	$20 000	100	$20 000	$\frac{\$20\,000}{100}(100)$
Año actual	40 000	200	20 000	$\frac{\$40\,000}{200}(100)$

El concepto de ingreso real algunas veces se denomina *ingreso deflacionado.* También es de uso común el término *ingreso en unidades monetarias constantes.* En consecuencia, con objeto de determinar si el nivel de vida de la señora Flores ha subido o no, en la tabla 18-9 el ingreso de dinero se ha convertido a dólares constantes. Se encontró que su poder adquisitivo, expresado en dólares de 1982–84 (dólares constantes), permaneció en $20 000.

AUTOEXAMEN 18-7

Las respuestas se dan al final del capítulo

El ingreso efectivo ("que se lleva a casa") y el índice de precios al consumidor para 1986 y 1990 son:

Año	*Ingreso efectivo*	*IPC (1982–84 = 100)*
1986	$25 000	109.6
1990	41 200	128.2

1. ¿Cuál fue el ingreso real en 1986?
2. ¿Cuál fue el ingreso real en 1990?
3. Interprete los resultados.

Deflación de las ventas

También puede usarse un índice de precios para deflacionar las ventas (o series similares de dinero). Tales ventas se determinan por:

$$\text{Ventas deflacionadas} = \frac{\text{Ventas reales}}{\text{Indice adecuado}}(100)$$

* Ejemplo

Las ventas de Eugene Enterprises, un fabricante en pequeño, aumentaron de $1 482 000 (dólares) en 1982, a $1 502 000 en 1989. Eugene Enterprises sabe que los precios de las materias primas usadas en la producción subieron desde 1982,

de modo que desea deflacionar las ventas en 1989 para tomar en cuenta el alza en precios de las materias primas. ¿Cuáles son las ventas deflacionadas en 1989? Esto es, ¿cuáles son las ventas en 1989 expresadas en dólares constantes de 1982?

✔ Solución

El índice de precios al productor (IPP) es un índice emitido cada mes y publicado en *Monthly Labor Review.* Los precios incluidos en el IPP reflejan los precios que paga el fabricante por metales, caucho (o hule) y otros materiales comprados. De modo que el IPP parece un índice apropiado para deflacionar las ventas del fabricante. Dichas ventas están en la primera columna de la tabla 18-10, y el IPP está en la segunda columna. Las ventas se dividen entre el índice de precios al productor y las ventas deflacionadas están en la columna del extremo derecho.

TABLA 18-10

Cálculos para deflacionar ventas

Año	*Ventas*	*Indice de precios al consumidor* (1982 = 100)*	*Cálculo de las ventas deflacionadas*	*Ventas en dólares constantes de 1982*
1982	$1 482 000	100.0	$\frac{\$1\ 482\ 000}{100.0} \times 100 =$	$1 482 000
1988	1 491 000	108.5	$\frac{\$1\ 491\ 000}{108.5} \times 100 =$	1 374 194
1989	1 502 000	112.1**	$\frac{\$1\ 502\ 000}{112.1} \times 100 =$	1 339 875

* Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, pág. 99.
** Estimación.

La conclusión es que a pesar de que las ventas reales en dólares de Eugene Enterprises aumentaron de 1982 a 1989, las ventas deflacionadas por el aumento en precios que pagó la compañía por materias primas, en realidad bajaron (desde aproximadamente $1 482 000 descendieron a cerca de $1 339 875). Esto es así porque los precios que se pagaron por materias primas subieron a una tasa más rápida que los precios de las ventas.

Poder adquisitivo del dinero

El índice de precios al consumidor también se emplea para determinar el *poder adquisitivo del dinero* .

$$\text{Poder adquisitivo del dinero} = \frac{\$1}{\text{IPC}} \times 100$$

✱ Ejemplo

Supóngase que el índice de precios al consumidor de este mes es 200.0 (1982–84 = 100). ¿Cuál es el poder adquisitivo del dinero?

✔ Solución

Es 50 centavos (centésimos de unidad), se calcula utilizando

$$\text{Poder adquisitivo del dinero} = \frac{\$1}{200.0}(100) = \$0.50$$

Interpretación El IPC de 200.0 indica que los precios se duplicaron de los años 1982–84 a este mes. En consecuencia, el poder adquisitivo del dinero se redujo a la mitad. Esto es, un dólar de 1982–84 vale sólo 50 centavos de dólar en este mes. En otras palabras, si uno perdió $1 000 en el periodo 1982–84 y los acaba de encontrar, sólo podrá comprar la mitad de lo que pudo haber comprado en los años 1982, 1983 y 1984.

El Bureau of Labor Statistics (de Estados Unidos) todavía cita el IPC del periodo base anterior (1967) para aquellos que aún necesitan esa base. La tabla 18-11 muestra el cálculo del poder adquisitivo del dinero para algunos cuantos periodos, utilizando 1967 = 100. Obsérvese que el poder adquisitivo del dinero en abril 1988 fue de 28.5 centavos. En teoría, si $1 000 (dólares) podían comprar 1 000 filetes en un restaurante a $1 cada uno en 1967, en abril de 1988 permiten comprar sólo 285 filetes.

TABLA 18-11

Cálculo del poder adquisitivo del dinero

Año	*Indice de precios al consumidor* (1967 = 100)*	*Cálculos:* $\frac{\$1}{IPC}(100)$	*Poder adquisitivo del dinero (1967 = $1)*
1967	100.0	$\frac{\$1}{100.0}(100)$	$1.000
1969	109.8	$\frac{\$1}{109.8}(100)$	0.911
1986	328.8	$\frac{\$1}{328.4}(100)$	0.305
1988 (abril)	350.8	$\frac{\$1}{350.8}(100)$	0.285

*Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, pág. 94.

AUTOEXAMEN 18-8

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Supóngase que el índice de precios al consumidor para el último mes es 400.0 (1967 = 100).

¿Cuál es el poder adquisitivo del dinero? Interprete el resultado.

Ajustes del costo de la vida

El índice de precios al consumidor también es la base de los llamados ajustes del costo de la vida en muchos contratos entre empresa y sindicato. La cláusula específica en el contrato con frecuencia se conoce como "cláusula de escalación". Cerca de 31 millones de beneficiarios de seguro social, 2.5 millones de militares y empleados del servicio federal jubilados y supervivientes, y 600 000 empleados del correo tienen sus ingresos o pensiones ligados al índice de precios al consumidor.

El IPC también se emplea para ajustar los pagos de manutención de niños y pensiones de divorcio, honorarios de abogados, pagos de compensaciones a trabajadores, rentas de apartamentos, casas y edificios de oficinas; pagos de ayuda social; y así sucesivamente.

CORRIMIENTO DE LA BASE

Si dos o más series tienen el mismo periodo base, pueden compararse directamente. Como ejemplo, supóngase que se tiene interés en la tendencia de los precios en alimentos y bebidas, construcción de casas, atención médica y demás, a partir del periodo base de 1982–84. Obsérvese en la tabla 18-12 que los índices de precios al consumidor usan la misma base. Por tanto, puede decirse que los precios de todos los elementos combinados aumentaron 17.1% desde el periodo base (1982–84) hasta 1988. En forma similar, los precios de construcción de casas aumentaron 17.3%, la atención médica 36.9%, etc.

TABLA 18-12

Tendencia en los precios al consumidor, 1982–84 al año actual

Año	*Todos los artículos*	*Alimentos y bebidas*	*Alojamiento*	*Ropa y artículos personales*	*Atención médica*
1982–84	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
1986	109.6	109.1	110.9	105.9	122.0
1987	113.6	113.5	114.2	110.6	130.1
1988 (abril)	117.1	116.7	117.3	117.0	136.9

Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, pág. 94

Surge un problema cuando dos o más series que se comparan no tienen el mismo periodo base.

* Ejemplo

Se desea comparar los cambios de precios en la bolsa de valores New York Stock Exchange con la bolsa de valores American Stock Exchange, desde 1985. Los dos índices de precios son:

Indice	Año 1985	1986	1987	1988
New York Stock Exchange (Dic. 31, 1965 = 10)	108.09	136.00	161.70	144.99 (mayo)
American Stock Exchange (Ago. 31, 1973 = 50)	229.10	264.38	316.61	296.30

Fuente: *Federal Reserve Bulletin*, julio de 1988, pág. A25

Compare los cambios de precios en las dos casas de bolsa.

✔ Solución

Obsérvese que los dos índices de precio tienen periodo base diferente; el periodo base en Nueva York es 1965, y la base de American es 1973. Se desea comparar el movimiento de precios desde 1985, de modo lógico, y lo que hay que hacer es tomar 1985 como base para ambas series. Para la serie de Nueva York 108.09 se toma como base, y para la serie de American la base es 229.10.

Los cálculos de 1988 para el nuevo índice de precios en American Stock Exchange usando 1985 = 100, son:

$$\frac{296.30}{229.10} \times 100 = 129.3$$

AUTOEXAMEN 18-9

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. En el ejemplo anterior, verifique que el índice de precios en la New York Stock Exchange para 1987, usando 1985 como base, es 149.6.
2. Se van a comparar los cambios en la producción industrial y en los precios que han pagado los productores por materias primas desde 1982. Desafortunadamente, el índice de producción industrial (que mide los cambios en la producción) y el índice de precios al productor (que mide los cambios en él precio de las materias primas), tienen periodos base diferentes. El índice de producción tiene 1977 como periodo base, y el índice de precios tiene 1982 como periodo base.

Año	Indice de producción industrial (1977 = 100)	Indice de precios a productores (1982 = 100)
1982	115.3	100.0
1987	129.8	105.4
1988 (Julio)	137.7	107.7

Fuente: *Survey of Current Business*, Agosto de 1988. pág. A47. *The Wall Street Journal*, Agosto 16, 1988, pág. 1.

a. Corra (o desplace) la base para hacer comparables las dos series.
b. Interprete los resultados.

Los dos índices con base en 1985 son:

	Año			
Indice	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*
New York Stock Exchange	100.0	125.8	149.6	134.1
American Stock Exchange	100.0	115.4	138.2	129.3

Puede concluirse ahora que los precios de acciones comunes en las dos casas de bolsa, New York Stock Exchange y American Stock Exchange han subido desde 1985; el alza en la New York Exchange es ligeramente mayor (34.1% comparada con 29.3%).

RESUMEN

Este capítulo está dedicado a una medida descriptiva llamada *número índice.* Su principal uso en las empresas es la descripción del cambio porcentual en precio, cantidad o valor, de un periodo a otro. Algunos, llamados *índices especiales,* miden los cambios globales en las actividades empresariales y económicas. Combinan en un solo índice series tan diversas como precios de acciones comunes, producción industrial y movimiento del dinero.

Los índices tienen un *periodo base.* Prácticamente el número base para todos los índices es 100.

Uno de los índices más utilizados es el *índice de precios al consumidor,* que se compila y publica mensualmente. Como su nombre lo indica, es un índice de precio y refleja el cambio porcentual de una canasta de mercado formada por cerca de 400 elementos.

Algunos índices se clasifican como simples *(no ponderados).* La mayoría, sin embargo, son índices *ponderados.* El IPC, por ejemplo, es un índice de precio ponderado.

Los índices de precios pueden usarse como *deflacionadores* para aplicar a ingresos, ventas, el producto nacional bruto y otras series, por el cambio en los precios. Esto se lleva a cabo dividiendo los ingresos o ventas entre un índice apropiado de precio, y multiplicando el cociente por 100. El *ingreso real* o *deflacionado* se determina dividiendo el ingreso entre el IPC, y multiplicando el cociente por 100.

Recapitulación

I. Números índice
   A. El objetivo de un índice es mostrar el cambio en precio, cantidad o valor, de un periodo a otro.
   B. Características.
      1. Un número índice, como 185.0, es un porcentaje, pero generalmente se omite el signo de por ciento.
      2. Un número índice tiene un periodo base. El periodo base para el IPC es 1982–84; para el índice de producción industrial es 1977.
      3. El número base de la mayoría de los índices es 100. En consecuencia, un índice de precio de 185.0 para un mes dado (por ejemplo, el último), usando 1982 = 100, significa que los precios aumentaron 85% de 1982 al citado mes.

4. La mayoría de los índices se aproximan al porcentaje entero más cercano, tal como 164 o 96, o bien al décimo más próximo de un porcentaje, como 185.6 y 83.2.

C. Razones para calcular índices.
1. Los índices facilitan la comparación de series no semejantes.
2. Un índice es una forma conveniente de expresar el cambio en el total de un grupo heterogéneo de elementos.
3. Un cambio en porcentaje es de comprensión más fácil que los números reales, especialmente cuando tales números son muy grandes.

D. Tipos de números índice.
1. Precio: Su objetivo es medir el cambio en los precios de un periodo seleccionado como base, a otro periodo, tal como el año actual.
2. Cantidad: Presenta el cambio en cantidad o volumen consumido de un periodo base a otro.
3. Valor: Muestra el cambio en valor de, por ejemplo, 1977 a 1990. El valor para 1990, calculado por (Precio) × (Cantidad), se divide entre el valor para 1977 a fin de obtener un índice de valor para 1990.
4. Un índice especial combina y pondera un grupo heterogéneo de series, tal como empleo, precios, producción y deudas bancarias, a fin de llegar a un índice global que muestre el cambio en la actividad empresarial desde el periodo base hasta el presente.

II. Elaboración de los números índice.

A. Números índice no ponderados
1. La fórmula para un índice de precio es $(p_n/p_0) \times 100$, donde p_0 es el precio en el periodo base y p_n es el precio en un periodo diferente del base. La fórmula para un índice de cantidad es $(q_n/q_0) \times 100$, donde q_0 es la cantidad durante el periodo base y q_n es la cantidad durante otro periodo.
2. Un índice no ponderado se usa para mostrar el cambio en un solo precio o en un solo satisfactor de un periodo a otro.
3. Para determinar el cambio en cantidad de un grupo de elementos, tales como artículos alimenticios, es imposible sumar litros de leche, kilogramos de café y lechugas.

B. Números índice ponderados.
1. Fórmulas.
a. Valor:

$$V = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_0}(100)$$

b. Precio:

Método de Laspeyres

$$P = \frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0}(100)$$

Método de Paasche

$$P = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_0 q_n}(100)$$

c. Cantidad

$$Q = \frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_0 q_0}(100) \qquad Q = \frac{\Sigma p_n q_n}{\Sigma p_n q_0}(100)$$

2. En el uso del método ponderado de agregación, 1) un índice de precio refleja *sólo* el cambio en el precio pagado (porque la cantidad consumida se mantiene constante), y 2) un índice de cantidad refleja *sólo* el cambio en la cantidad consumida (pues el precio se mantiene constante).

III. Indice de precios al consumidor.

A. Comenzando 1978, se publicaron dos índices de precios al consumidor. Uno fue diseñado para empleados de servicios urbanos y de oficina, cubre cerca de un tercio de la población. Otro fue diseñado para la población urbana, cubre aproximadamente el 80% de la población.

B. Usos del IPC.

1. Permite que los consumidores determinen el efecto de los aumentos de precio en su poder adquisitivo.
2. Es un cartabón para revisar salarios, pensiones civiles y de divorcio, etc.
3. Es un indicador económico de la tasa de inflación en Estados Unidos.

C. Otros usos del índice de precios al consumidor.

1. Se calcula el ingreso real dividiendo el ingreso en dinero entre el índice de precios al consumidor.
2. Se calcula el poder adquisitivo del dinero por medio de ($1/IPC)100, lo cual permite comparar el valor de una unidad monetaria en el periodo actual, con el valor que tuvo en el periodo base.
3. Millones de empleados en las industrias de automóviles, acero y otras, obtienen ajustes en sus salarios cuando el IPC aumenta. Los arreglos específicos se establecen en los contratos laborales.

D. Corrimiento de la base.

1. Es necesario cuando se comparan dos o más series de números índice que no tienen el mismo periodo base.
2. Primero se selecciona un periodo base común para todas las series. Después se usan los mismos números base respectivos como denominadores y se convierte cada serie al nuevo periodo base.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Los dividendos en efectivo por acción común declarados por la empresa NCR desde 1979 son:

Año	*Dividendos en efectivo*
1979	$0.40
1980	0.50
1981	0.55
1982	0.60
1983	0.65
1987	1.00

Fuente: NCR, *1987 Annual Report*, págs. 7, 37.

a. Utilizando 1979 como periodo base, determine el índice de dividendos en efectivo para 1987. Interprete el resultado.

b. Usando 1979–80 como periodo base, evalúe el índice de dividendos en efectivo para 1987.

8. El número de empleados y otros datos para NCR desde 1979 son:

Año	*Número de empleados*	*Adeudo a largo plazo*	*Ingresos*
1979	67 000	$344 568 000	$3 002 640 000
1980	68 000	321 540 000	3 322 370 000
1981	65 000	299 658 000	3 432 701 000
1982	63 000	341 298 000	3 526 217 000
1983	62 000	325 298 000	3 730 951 000
1987	62 000	109 844 000	5 640 667 000

Fuente: NCR, *1987 Annual Report*, págs. 15, 32

Determine el índice de empleo para 1987 usando 1979 = 100. Interprete el resultado.

9. Con referencia al ejercicio 8, determine el índice de adeudo a largo plazo para 1987, usando 1979 = 100.
10. Con referencia al ejercicio 8, determine el índice de ingreso al erario para 1987, usando 1979–80 como periodo base. Interprete el resultado.
11. Los promedios de los ingresos semanales de trabajadores de producción (no supervisores) en nóminas no agrícolas para industrias seleccionadas son:

Año	*Construcción*	*Finanzas, seguros y bienes raíces*	*Comercio al mayoreo*	*Transportes y servicios públicos*
1979	$342.99	$190.77	$247.93	$325.56
1983	442.97	263.90	329.18	420.81
1987	477.28	317.11	367.10	469.59
1988 (abril)	487.54	362.89	378.40	470.30

Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, págs. 86, 88.

Compare, usando números índice, el cambio porcentual en el promedio de salarios semanales de trabajadores de la construcción, con los promedios de quienes trabajan en finanzas, seguros y bienes raíces.

12. Con referencia al ejercicio 11, compare usando números índice, el cambio porcentual en el promedio de salarios semanales de quienes trabajan en el comercio al mayoreo y los que laboran en el transporte y servicios públicos.
13. El índice de precios al consumidor y el promedio de salarios (por hora) en industrias seleccionadas son:

	IPC (todos los artículos)	*Salarios por hora*		
Año	*(1982–84 = 100)*	*Servicios*	*Comercio al menudeo*	*Manufactura*
1982–84	100.0	$7.27	$5.69	$ 8.84
1986	109.6	8.16	6.03	9.73
1987	113.6	8.47	6.12	9.73
1988 (abril)	117.1	8.81	6.27	10.27

Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, junio de 1988, págs. 86, 88, 94.

¿Qué sucedió a los salarios reales de un empleado "representativo" en cada una de las tres industrias seleccionadas entre el periodo de 1982–84 y en abril 1988? Explique su respuesta.

14. Con referencia al ejercicio 13, ¿qué sucedió al poder adquisitivo del dinero entre los años 1982, 1983 y 1984, y en el mes de abril 1988? Explique su respuesta.

15. Con referencia al ejercicio 13, el ingreso mensual de José Gómez en 1986 fue de $2 040, y en abril de 1988 había subido a $2 090. Explique lo que pasó a su ingreso real en dinero.
16. Se va a diseñar un índice especial para la economía global del suroeste de Estados Unidos. Se seleccionaron cuatro series clave. Después de una deliberación considerable, se decidió ponderar las ventas al menudeo en 20%, el total de depósitos bancarios en 10%, la producción industrial del área en 40% y el empleo no agrícola en 30%. Los datos para 1983, 1986 y 1989 son:

Año	*Ventas al menudeo (en millones de dólares)*	*Depósitos bancarios (en miles de millones de dólares)*	*Producción industrial (1977 = 100)*	*Empleo*
1983	$1 159.0	$87	110.6	1 214 000
1986	1 467.0	85	111.1	1 316 000
1989	1 971.0	91	114.7	1 501 000

a. Elabore un índice especial para cada uno de los tres años usando 1983 como periodo base.
b. Interprete los resultados.

17. Se efectúa un estudio de ciertos aspectos de la economía de Estados Unidos, de 1950 a 1980. Se han recopilado datos de precios, fuerza laboral, productividad y el producto nacional bruto (PNB). Observe en la tabla siguiente que el IPC tiene 1967 como base, el empleo está en millones de personas, y así sucesivamente. En consecuencia, no es factible una comparación directa.
a. Realice los cálculos necesarios para comparar las tendencias en las cuatro series de 1950 a 1980.
b. Interprete los resultados.

Año	*Indice de precios al consumidor (1967 = 100)*	*Total de mano de obra (en millones)*	*Indice de productividad en manufactura (1967 = 100)*	*Producto nacional bruto (en miles de millones de dólares)*
1950	72.1	64	64.9	286.2
1967	100.0	81	100.0	789.6
1971	121.3	87	110.3	1 063.4
1975	161.2	95	114.9	1 516.3
1980	246.8	107	146.6	2 626.0

Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, abril de 1977, págs. 91, 103, 109; *National Income and Products Accounts of the United States; Survey of Current Bussines*, marzo de 1981, pág. S–1

18. Los datos de alimentos seleccionados al mayoreo para 1977 y 1989 se muestran en la tabla siguiente:

	1977		*1989*	
Artículo	*Precio*	*Cantidad producida*	*Precio*	*Cantidad producida*
Coles (libra)	$0.06	2 000	$0.05	1 500
Zanahorias (litro)	0.10	200	0.12	200
Chícharos (cuarto)	0.20	400	0.18	500
Endibias (manojo)	0.15	100	0.15	200

a. Utilizando la fórmula de Laspeyres, calcule un índice ponderado de precios para 1989 (1977 = 100). Interprete el resultado.
b. Aplicando la fórmula de Paasche, calcule un índice ponderado de precios para 1989. Interprete el resultado.
c. Explique la diferencia entre el índice de precios para 1989 usando el método de Laspeyres y el de Paasche.
d. Aplicando la fórmula de Laspeyres, determine un índice ponderado de cantidad para 1989 (1977 = 100). Interprete el resultado.
e. Calcule un índice de valor para 1989 (1977 = 100). Interprete el resultado.

19. Los precios de elementos seleccionados para 1980 y 1989 se muestran a continuación. También se dan las cifras de producción para esos dos periodos.

Artículos	*Precio en 1980**	*Precio en 1989***	*Producción en 1980*	*Producción en 1989*
Aluminio (centavos por libra)	$0.287	$ 0.76	1 000	1 200
Gas natural (1 000 pies cúbs.)	0.17	2.50	5 000	4 000
Petróleo crudo (barril)	3.18	26.00	60 000	60 000
Platino (onzas troy)	133	490	500	600

* Fuente: Statistical Abstract of the United States, 1984, pág. 497.
** Estimado.

a. Empleando 1980 como periodo base, determine el índice ponderado de precios usando el método de Laspeyres. Interprete el resultado.
b. Utilizando 1980 como periodo base, determine el índice ponderado de cantidad con el método de Laspeyres. Interprete el resultado.

20. Con referencia al ejercicio 19:
a. Usando el método de Paasche y 1980 como el periodo base, determine un índice ponderado de precios.
b. Determine un índice de valor para 1989, usando 1980 como periodo base. Interprete el resultado.

21. Explique las características principales de dos índices de precios al consumidor, incluyendo lo que miden, el periodo base, y así sucesivamente.
22. Explique la cláusula "de escalación" (también llamada cláusula del costo de la vida) encontrada en muchos contratos laborales.
23. Si tiene disponible un contrato laboral, cite cualesquiera previsiones que pertenezcan a salarios resultantes por cambios en el índice de precios al consumidor.

EXAMEN CAPITULO 18

Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Los precios de la chatarra de aluminio en tres años son:

Año	*Precio de chatarra de aluminio (por tonelada)*
1977	$40.00
1982	50.00
1990	80.65

a. Utilizando 1982 como periodo base, determine un índice de precios para 1977 y 1990.
b. Interprete los resultados.

Los problemas 2 y 5 se basan en la siguiente información sobre precios y cantidades consumidas en 1983 y 1989.

	1983		*1989*	
Artículo	*Precio (bushel)*	*Cantidad consumida (millones de bushels)*	*Precio (bushel)*	*Cantidad consumida (millones de bushels)*
Maíz	$2	10	$4	12
Trigo	3	6	1	8
Avena	7	2	5	9

2. Usando la fórmula de Laspeyres y 1983 como periodo base, determine un índice ponderado de precios para 1989.
3. Utilizando la fórmula de Laspeyres y 1982 como periodo base, determine un índice ponderado de cantidad para 1989.
4. Calcule un índice de valor para 1989 usando 1983 = 100.
5. a. Usando la fórmula de Paasche y 1983 como el periodo base, determine un índice ponderado de precios para 1989.
   b. ¿Por qué este índice de precios es diferente del encontrado en la pregunta 2? ¿Cuál es la de uso más común?

Los problemas 6 y 7 se basan en la información siguiente:

Año	*Indice de precios al consumidor (1982–84 = 100)*	*Ingreso efectivo del Sr. Martínez*
1982–84	100.0	$ 600
1986	109.6	700
1988 (abril)	117.1	2 000

6. ¿Cuál es el poder adquisitivo del dinero en abril 1988 con base en el periodo 1982–84?
7. a. Determine el ingreso mensual "real" del señor Martínez para cada uno de los tres periodos.
   b. Interprete los resultados.
8. Suponga que el índice de precios al productor y las ventas de una empresa para 1983 y 1989 son:

Año	*Indice de precios al productor*	*Ventas*
1983	120.0	$2 400 000
1989	265.9	3 500 000

   a. ¿Cuáles son las ventas reales de dicha negociación (también llamadas ventas deflacionadas) en los dos años?
   b. Interprete los resultados.
9. La gerencia de una empresa comercial, con varias tiendas en un área metropolitana, desea elaborar un índice de actividad económica para el área. La gerencia afirma que si el índice revela que la actividad económica decae, debe mantenerse el inventario a bajo nivel.

Tres series parecen promisorias como pronosticadoras de la actividad económica: área de ventas al menudeo, depósitos bancarios y empleo. Todos estos datos pueden obtenerse mensualmente del gobierno de Estados Unidos. Las ventas al menudeo se ponderan al 40%, los depósitos bancarios al 35% y el empleo al 25%. Los datos con estacionalidad ajustada para los tres primeros meses del año son:

Mes	*Ventas al menudeo (millones de dólares)*	*Depósitos bancarios (miles de millones de dólares)*	*Empleo (en miles)*
enero	8.0	20	300
febrero	6.8	23	303
marzo	6.4	21	297

a. Evalúe un índice de la actividad económica para cada uno de los tres meses, utilizando enero como el periodo base.
b. Envíe una recomendación a dicha gerencia.

Autoexámenes

18-1 1. 146.5, calculado por ($12.44/$8.49) 100, los salarios por hora aumentaron 46.5% de 1979 a abril 1988.

2. a. 187.7, calculado por ($101 981.9/ $54 217.0)100. Las ventas de GM están 87.7% arriba de las ventas de IBM.

b. 48.4, calculado por medio de ($26 257.7/$54 217.0)100. Las ventas de Chrysler están 51.6% abajo de las ventas de IBM.

18-2 1. 290.3, calculado mediante ($6.27/ $2.16)100. Los salarios aumentaron 190.3% en el periodo de 20 años.

2. 281.2, calculado por ($6.27/$2.23) 100.

3. 88.5, evaluado por medio de ($2.16/ $2.44)100. Los salarios en 1968 fueron 11.5% más bajos que en 1970, calculado por 100.0 − 88.5.

18-3 1. 214.5, determinado por P= ($140 500 /$65 500)100.

p_0	q_0	p_0q_0	p_n	p_nq_0
$35	500	$17 500	$65	$ 32 500
40	1 200	48 000	90	108 000
		$65 500		$140 500

2. El precio del vestido en 1989 fue 214.5% del precio en 1982. O sea que el precio del vestido aumentó 114.5%, de 1982 a 1989.

18-4 1. 235.4, calculado por Q = ($8 240/ $3 500)100.

p_0q_0	p_0q_n
$ 200	$1 400
300	240
3 000	6 600
$3 500	$8 240

2. La cantidad producida entre 1975 y 1989 aumentó 135.4%.

18-5 1. 127.1, calculado por V = ($77 000/ $60 600)100.

p_0q_0	p_nq_n
$30 000	$36 000
600	1 000
30 000	40 000
$60 600	$77 000

2. Valor de ventas arriba 27.1% desde 1983 hasta 1989.

18-6 1. 1981 = 100
1990 = 139, calculado por

($0.50/$0.20)(100) × 0.10 = 25
(80 000/100 000)(100) × 0.30 = 24
(120/80)(100) × 0.60 = 90
139

2. La actividad empresarial en 1990 fue 139% de la actividad en 1981. O sea que la actividad en 1990 fue 39% más alta que en 1981.

18-7 1. $22 810.22, evaluado por ($25 000/ 109.6)100.

2. $32 137.29, calculado por ($41 200/ 128.2)100.

3. El ingreso real aumentó desde cerca de $22 810 en 1986 a $32 137 en 1990. Esto indica que el ingreso real (llevado a casa) aumentó a una tasa más rápida que la de los precios que pagó por alimentos, transportación. etc.

18-8 25.0 centavos, calculado por medio de:

$$\frac{\$1}{400.0} \times 100$$

El dólar de 1967 vale sólo 25 centavos este mes.

18-9 1. (161.70/108.09)100 = 149.6.

2. a.

	Indice de producción industrial	*Indice de precios al productor*
1982	100.0	100.0
1987	112.6	105.4
1988	119.4	107.7

Para julio de 1988: (137.7/115.3)100 = 119.4

b. A partir del periodo base de 1982, la producción industrial aumentó a una tasa más rápida (19.4%) que los precios (7.7%).

Examen capítulo 18

1. a. Para 1977, 80.0; para 1990, 161.3, calculado por medio de (80.65/50.00) 100.
   b. En 1977, el precio de la chatarra de aluminio fue 80% del precio de 1982, o sea 20% abajo del precio en 1982. En 1990, el precio fue 61.3% arriba del precio en 1982, o sea el precio de la chatarra de aluminio aumentó 61.3% de 1982 a 1990.

Los problemas 2 a 5 se basan en las sumas siguientes:

	p_0q_0	p_nq_0	p_0q_n	p_nq_n
Maíz	$20	$40	$24	$48
Trigo	18	6	24	8
Avena	14	10	63	45
	$52	$56	$111	$101

2. 107.7, calculado por ($56/$52)100.
3. 213.5, calculado por ($111/$52)100.
4. 194.2, evaluado por medio de ($101/$52) 100.
5. a. 91.0, calculado por ($101/$111)100.
   b. La diferencia se explica por los dos sistemas de ponderación. El sistema de Laspeyres se utiliza ampliamente.
6. $0.854, calculado por ($1/117.1)100.
7. a.

Año	*Ingreso real*	*Cálculos*
1982–84	$ 600	($600/100.0)100
1986	639	($700/109.6)100
1988 (abril)	1 708	($2 000/117.1)100

   b. El poder adquisitivo del señor Martínez casi se triplicó desde el periodo de 1982–84 hasta 1988. Su ingreso real aumentó de $600 mensuales a $1 708.

8. a. Las ventas deflacionadas de 1983 son $2 000 000, valor calculado por ($2 400 000/120.0)100. Para 1989 las ventas reales son $1 316 284, valor calculado mediante ($3 500 000/265.9)100.
   b. Las ventas reales bajaron de $2 000 000 en 1983 a $1 316 284 en 1989, por causa del brusco aumento del precio de las materias primas.
9. a. Los tres índices de actividad económica son: enero, 100.0; febrero, 99.5; marzo, 93.5. Los cálculos para febrero son:

Ventas al menudeo	(6.8/8.0)100 = 85 Entonces 85 × 0.40 =	34.00
Depósitos bancarios	(23/20)100 = 115 Entonces 115 × 0.35 =	40.25
Empleo	(303/300)100 = 101 Entonces 101 × 0.25 =	25.25
		99.50

   b. El nivel económico global bajó 6.5% durante los primeros tres meses (calculado por 100.0 − 93.5). Puede aconsejarse a la gerencia que regule cuidadosamente los inventarios en sus tiendas.

19

Análisis de series de tiempo

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Explicar el significado de cada componente de una serie de tiempo: tendencia secular, variación estacional, variación cíclica y variación irregular o errática.
2. Determinar la ecuación de tendencia lineal para los datos de series de tiempo.
3. Calcular un promedio móvil.
4. Determinar la ecuación de tendencia para una tendencia no lineal.
5. Usar las ecuaciones de tendencia lineal y no lineal para llegar a estimaciones para futuros periodos.
6. Determinar un conjunto de índices estacionales usando promedios.
7. Determinar un conjunto de índices estacionales aplicando el método de razón a promedio móvil.
8. Ajuste de los datos por medio de índices estacionales.

En este capítulo se hace hincapié en el análisis de series de tiempo y pronósticos a futuro. Una **serie de tiempo** es un conjunto de datos registrados durante un cierto periodo o intervalo, por lo general semanas, meses, trimestres o años. Se presentan dos ejemplos de tales series: 1) las ventas en un establecimiento comercial por trimestre desde su apertura en 1962, y 2) la producción anual de ácido sulfúrico desde 1970.

Se puede utilizar un análisis del historial de una empresa, para que una gerencia tome decisiones en el presente y realice planeación y proyecciones a largo plazo. Tales proyecciones o pronósticos se extienden a futuro de un año o más; son comunes las que se formulan a 5, 10, 15 y 20 años. Los pronósticos de gran amplitud se consideran esenciales para disponer de tiempo suficiente para compras, manufactura, ventas y finanzas y otros departamentos de una compañía elaboran planes de posibles plantas nuevas, financiamientos adicionales, fabricación de nuevos productos y métodos nuevos de ensamble, por ejemplo.

Los pronósticos del nivel de ventas, a corto y a largo plazo, los dicta en la práctica la propia naturaleza de las organizaciones de negocios en Estados Unidos. La competencia por captar el recurso monetario del consumidor, la presión para ganar utilidades para los accionistas, y las ambiciones de los ejecutivos, son algunos de los impulsos que motivan en los negocios. Por tanto, una proyección (el enunciado de los objetivos gerenciales) se considera necesaria para tener las materias primas, las instalaciones de producción y personal disponibles para satisfacer la demanda proyectada.

Este capítulo trata del uso de información del pasado para pronosticar eventos futuros. Primero se examinan las componentes de una serie de tiempo y después algunas de las técnicas empleadas en el análisis de datos del pasado.

COMPONENTES DE UNA SERIE DE TIEMPO

Tendencia secular

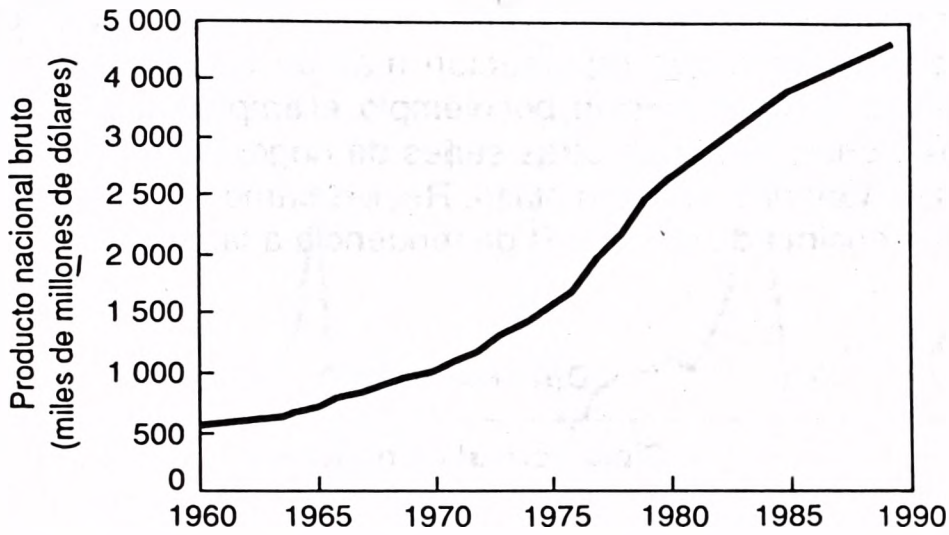
Una componente de una serie de tiempo es la **tendencia secular.** Es el movimiento alisado de una serie durante un largo periodo. Como ejemplo, en el diagrama 19-1 se muestra la tendencia a largo plazo del producto nacional bruto de Estados Unidos desde 1960; obsérvese que desde ese año hay una tendencia ascendente uniforme en el PNB.

Las tendencias a largo plazo de ventas, producción, exportación, precios de valores y otras series comerciales y económicas siguen diferentes patrones. La tendencia en ventas de las 10 cadenas más grandes de tiendas de comestibles se ilustra en la parte A de la figura en la parte inferior de la página siguiente. La tendencia global ha ido en aumento, debido en parte al incremento de la población, la movilización de las áreas rurales a las metropolitanas y al cierre de muchas de las pequeñas tiendas de comestibles.

La parte B muestra otra tendencia. Es descendente y muestra la producción de calzado en Estados Unidos en los pasados 30 años. La parte C muestra una

DIAGRAMA 19-1

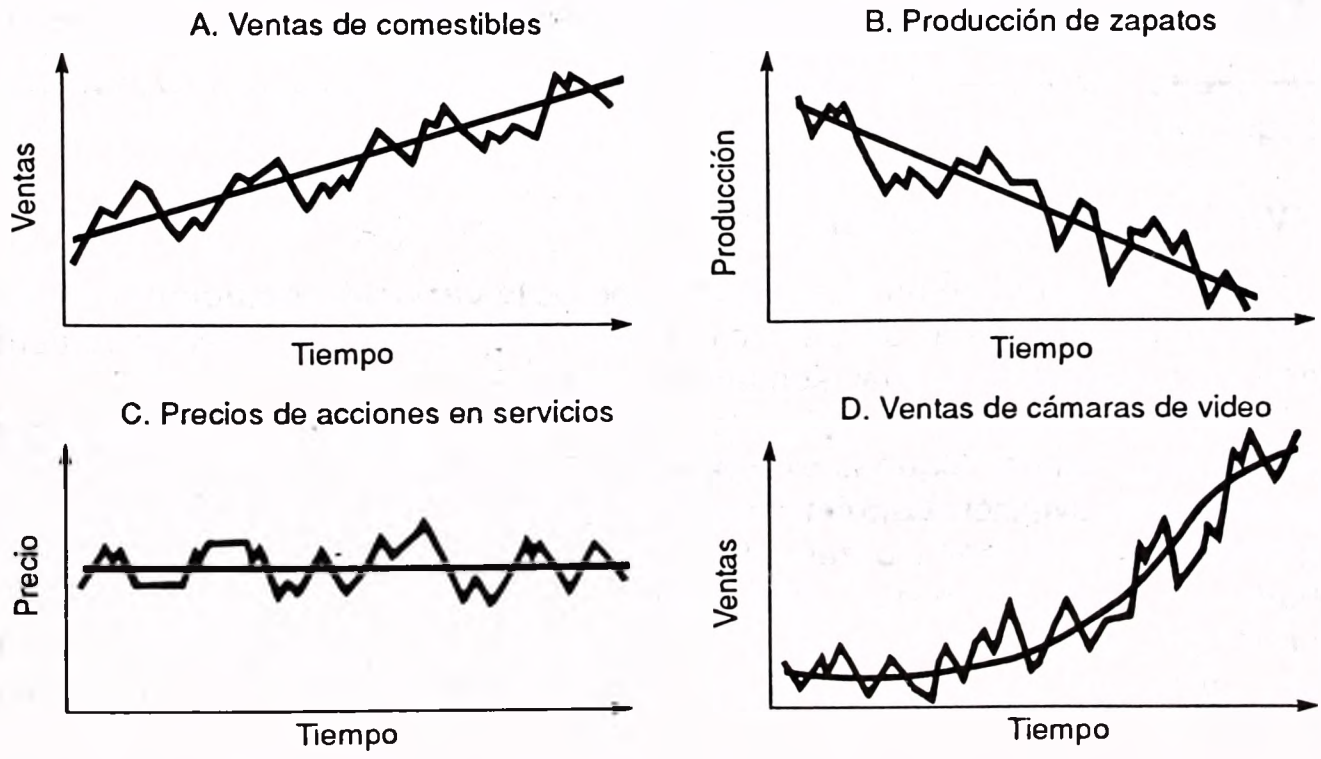
Producto Nacional Bruto, Estados Unidos 1960-90
(en miles de millones de dólares)



Fuente: Bureau of Economic Analysis, Departamento de Comercio de Estados Unidos.

serie: el precio de acciones de empresas de servicios (electricidad, gas y teléfonos) en años recientes, que ha permanecido casi igual. Podría decirse que no hubo tendencia. Las ventas de cámaras de video se indican en la parte D.

Inicialmente, las ventas eran escasas. Sin embargo, pronto se redujo su peso a menos de tres libras, se añadieron obturadores de alta velocidad, cabezales de carga rápida y autoenfoque. Al mismo tiempo se redujeron los precios. Las ventas aumentaron en forma notable.

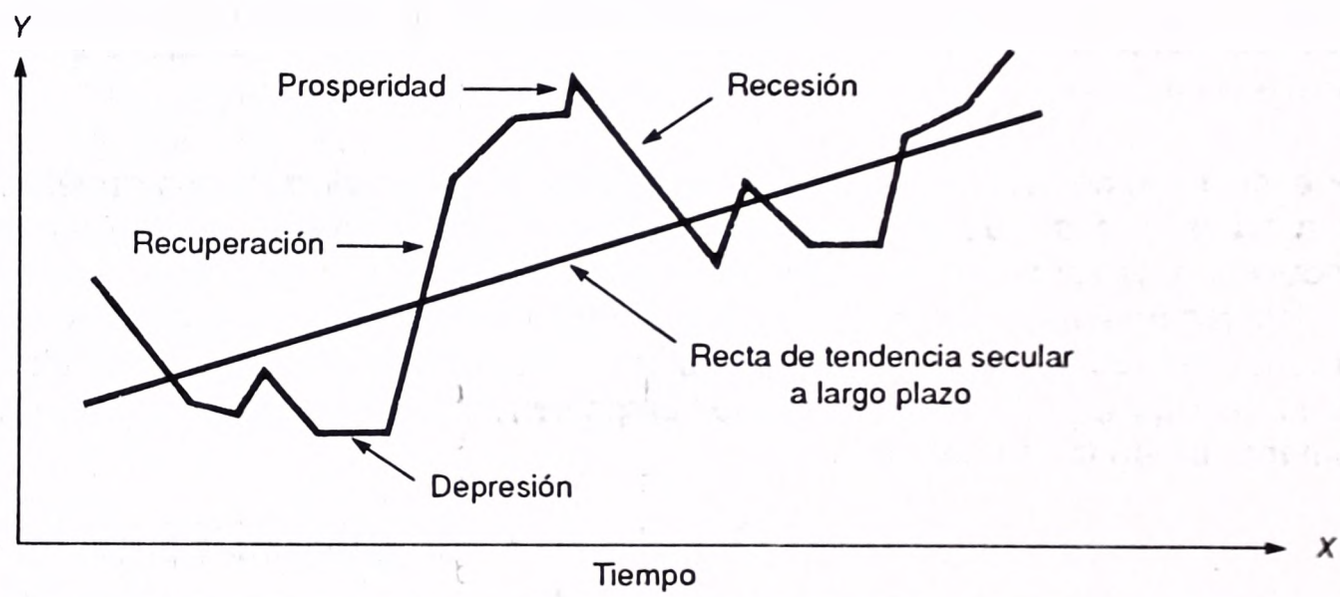


Variación cíclica

La **variación cíclica** es otra componente de una serie de tiempo. El ciclo normal de un negocio consiste en un periodo de prosperidad, seguido de periodos de recesión, depresión y recuperación (véase el diagrama 19-2). Se observan fluctuaciones de consideración que representan más de un año, arriba y abajo de la tendencia secular. En una recesión, por ejemplo, el empleo, producción, el Promedio Industrial Dow Jones y muchas otras series de negocios y economía están abajo de sus líneas de tendencia a largo plazo. Recíprocamente, en periodos de prosperidad están por encima de sus líneas de tendencia a largo plazo.

DIAGRAMA 19-2

Ciclo normal de negocios



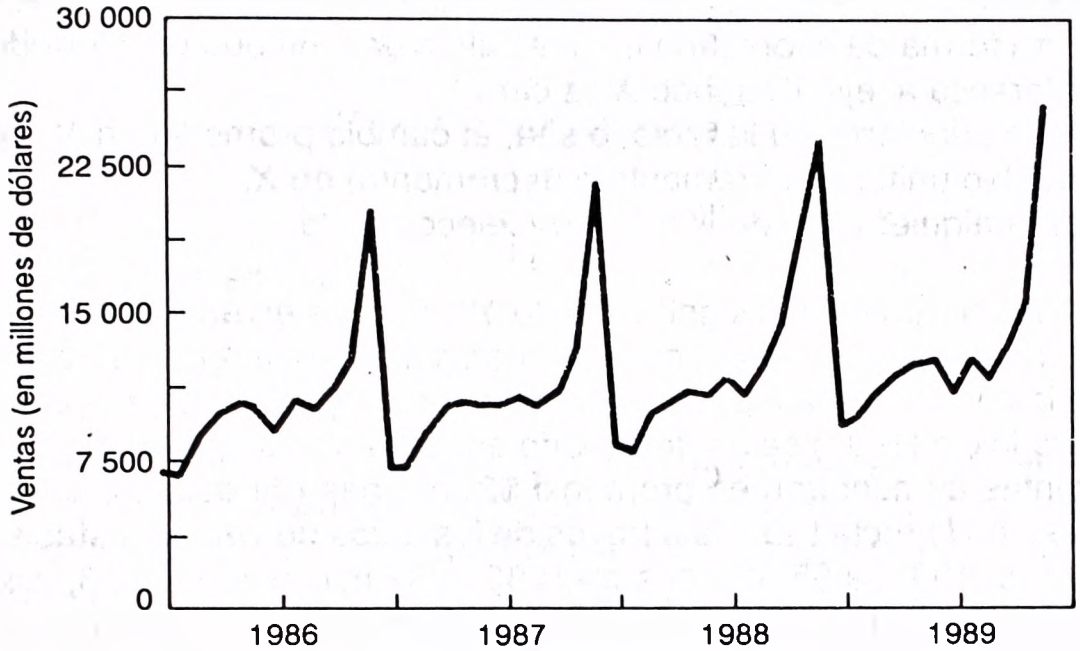
Variación estacional

Otra componente de una serie de tiempo es la **variación estacional.** Muchas ventas, producción y otras series fluctúan con las estaciones. La unidad de tiempo puede ser trimestral, mensual, semanal o aun diaria.

Prácticamente todas las series de negocios y economía tienen patrones estacionales recurrentes. Algunas excepciones se encuentran en ciertas empresas de electrónica y aviación, bajo contrato del gobierno federal, dedicadas al suministro de partes para uso militar o aeroespacial. Por ejemplo, las ventas de ropa para caballeros y niños son muy altas antes de Navidad y relativamente bajas después y en verano. Como se informa en el *Survey of Current Business*, las ventas de las tiendas de departamentos tienen un patrón similar, según se muestra en el diagrama 19-3.

DIAGRAMA 19-3

Ventas en tiendas departamentales, por mes, 1986-89



Variación irregular

Muchos analistas prefieren subdividir la **variación irregular** en variaciones *episódicas* y *residuales*. Las episódicas no son predecibles, pero pueden identificarse. El impacto inicial en la economía de una huelga importante o una guerra puede identificarse, pero no es posible predecir una huelga o una guerra. Después de que las fluctuaciones episódicas se han eliminado, a la variación restante se le llama variación residual. Las fluctuaciones residuales, con frecuencia se denominan fluctuaciones aleatorias, son impredecibles y no pueden identificarse. Por supuesto, ninguna variación, sea episódica o residual, puede proyectarse al futuro.

Ahora principiará el estudio de las componentes de una serie de tiempo con tendencia lineal.

TENDENCIA LINEAL

La tendencia a largo plazo de muchas series de negocios (industriales y comerciales), como ventas, exportaciones y producción, con frecuencia se aproximan a una línea recta. Si es así, la ecuación que describe su crecimiento es:

$$\boxed{Y' = a + bX}$$

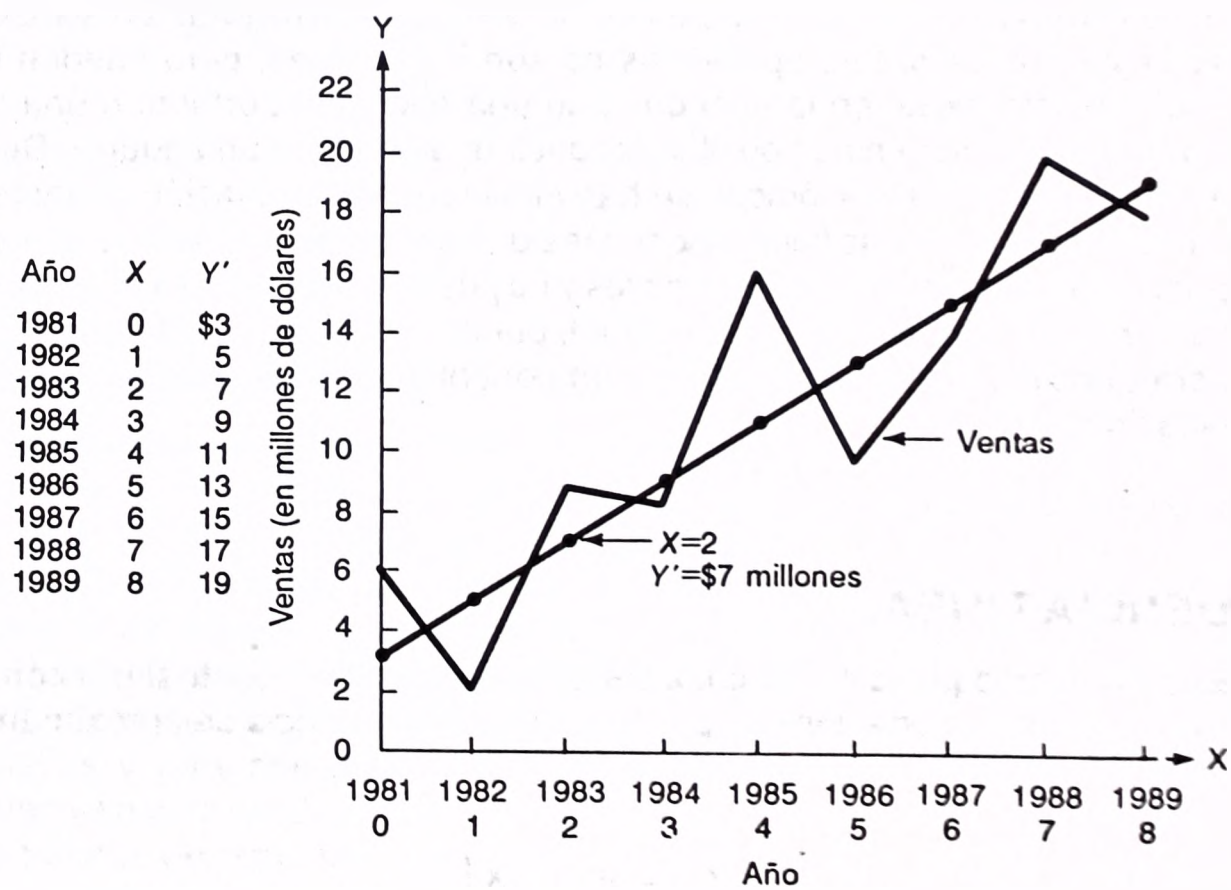
donde:

- Y' es el valor proyectado de la variable Y para un valor seleccionado de X.
- a es la intersección con el eje Y. Es el valor estimado de Y cuando $X = 0$. Otra forma de expresarlo es: a es el valor estimado de Y donde la recta interseca al eje Y cuando X es cero.
- b es la pendiente de la recta, o sea, el cambio promedio en Y' por cada cambio unitario (incremento o decremento) en X.
- X es cualquier valor de X (tiempo) seleccionado.

Para ilustrar aún más el significado de Y', a, b y X en un problema de serie de tiempo, se ha trazado una recta en el diagrama 19-4 para representar la tendencia característica de las ventas. Se supone que esta compañía inició negocios en 1981. Este año de inicio (1981) se ha designado arbitrariamente como año 0. Obsérvese que las ventas aumentaron en promedio $2 millones (de dólares) cada año; esto es, con base en la recta trazada a través de los datos de ventas, éstas subieron de $3 millones en 1981, a $5 millones en 1982, a $7 millones en 1983, a $9 millones en 1984, y así sucesivamente. Por tanto, la pendiente b es 2. Obsérvese también que la línea interseca al eje Y (cuando $X = 0$) en $3 millones. Este punto, 3, es a. Otra forma de determinar b consiste en localizar el punto de partida de la recta en

DIAGRAMA 19-4

Recta ajustada a los datos de ventas



Año	X	Y'
1981	0	$3
1982	1	5
1983	2	7
1984	3	9
1985	4	11
1986	5	13
1987	6	15
1988	7	17
1989	8	19

el año 0. Este es 3 para 1981 en este problema. Después se localiza el valor sobre la línea para el último año. Este es 19 para 1989. Las ventas subieron a $19 millones menos $3 millones, o sea $16 millones, en ocho años (1981 a 1989). Por tanto, 16 ÷ 8 = 2; que es la pendiente de la recta, *b*.

La ecuación para la recta del diagrama 19-4 es

$$Y' = 3 + 2X \text{ (en millones)}$$

donde:

Las ventas están en millones.
El origen, o año 0, es 1981.
X aumenta una unidad por cada año.

En el capítulo 14 se trazó una recta en un diagrama de dispersión para aproximar la línea de regresión. Sin embargo, se recalcó que este método para determinar la ecuación de regresión tiene una gran desventaja, ya que la posición de la línea depende de la opinión de quien la traza. Tres personas probablemente trazarían tres líneas diferentes en las gráficas de dispersión. En forma similar, la recta que se trazó a través de los datos de ventas del diagrama 19-4, tal vez no sea la de "mejor ajuste".

Debido a la apreciación subjetiva utilizada, tal método debe usarse sólo cuando se necesita una rápida aproximación a la ecuación de la línea recta, o para comparar lo razonable de la recta de mínimos cuadrados, que se expone a continuación.

METODO DE MINIMOS CUADRADOS

El **método de mínimos cuadrados** para calcular la ecuación de una recta que pasa por la información de interés, da la recta de "mejor ajuste". Pueden resolverse dos ecuaciones simultáneamente para llegar a la ecuación de tendencia por mínimos cuadrados. Estas son:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma Y &= na + b\Sigma X \\ \Sigma XY &= a\Sigma X + b\Sigma X^2 \end{aligned}}$$

Este método para determinar la ecuación de tendencia por mínimos cuadrados toma mucho tiempo, especialmente si hay un gran número de periodos, por ejemplo, 15 años, y la magnitud de los números es grande. En tales casos se recomienda un procedimiento alterno, se le llama *método codificado*.

Método codificado

Para un número *impar* de años al usar el método codificado, el origen (periodo 0) es el año central. Para un número impar de meses, el origen sería el mes central. La letra *x*, que representa tiempo, se introduce en el método codificado. Se indica

con x minúscula para distinguirla de la X mayúscula, que se emplea en el método directo, cuando tienen que resolverse dos ecuaciones simultáneas.

Las fórmulas para a y b cuando se usa el método codificado son:[1]

$$\boxed{a = \frac{\Sigma Y}{n} \qquad b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}}$$

✱ Ejemplo

Las ventas en una pequeña cadena de tiendas de comestibles, desde 1985 son (en dólares):

Años	*Ventas ($ millones)*
1985	$ 7
1986	10
1987	9
1988	11
1989	13

¿Cuál es la ecuación de la recta de tendencia por mínimos cuadrados usando el método codificado?

✔ Solución

Obsérvese que se trata de un número impar de años. El año central (1987) es el origen. El periodo antes del origen (1986) se codifica como – 1, el año que sigue al origen (1988) se codifica + 1, y así sucesivamente. (Véanse en la tabla 19-1 la codificación y los cálculos necesarios.)

---

[1] Las dos ecuaciones resueltas simultáneamente usando el método directo tienen el primer periodo como origen:

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

El origen usando el método codificado es el periodo medio. Por tanto, $\Sigma x = 0$. En consecuencia, la primera ecuación queda como:

$$\Sigma Y = na$$

o bien

$$a = \frac{\Sigma Y}{n}$$

La segunda ecuación queda como:

$$\Sigma xY = b\Sigma x^2$$

o sea

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}$$

TABLA 19-1

Cálculos para el método codificado a fin de determinar la ecuación de tendencia

Año	*Ventas (en millones de dólares)*	x	xY	x^2
1985	$ 7	– 2	– 14	4
1986	10	– 1	– 10	1
1987	9	0	0	0
1988	11	1	11	1
1989	13	2	26	4
	$50		+ 13	10

Determinación de a y b:

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{50}{5} = 10$$

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} = \frac{13}{10} = 1.3$$

La ecuación de tendencia es $Y' = 10 + 1.3x$, donde:

Las ventas se expresan en millones de dólares.
El origen, o año cero, está a la mitad de 1987 (es decir, julio 1 de 1987), y x aumenta una unidad por cada año.

Si hay un número *par* de años y se usa el método codificado, el origen se encuentra en medio de dos años. Obsérvese que la serie de tiempo mostrada en la tabla 19-2 tiene un número par de años (seis). El origen está entre 1986 y 1987, o sea enero 1 de 1987. (Enero 1 de 1987 está a la mitad entre julio 1 de 1986 y julio 1 de 1987.) Los años antes del origen se codifican – 1, – 3, – 5, y así sucesivamente. Los años después del origen se codifican + 1, + 3, + 5, etc. En este ejemplo, el año

TABLA 19-2

Cálculos necesarios para *a* y *b* usando el método codificado

Año	x	*Exportaciones (en millones)* Y	xY	x^2
1984	– 5	$ 2	– 10	25
1985	– 3	4	– 12	9
1986	– 1	3	– 3	1
1987	+ 1	6	+ 6	1
1988	+ 3	5	+ 15	9
1989	+ 5	10	+ 50	25
		$30	+ 46	70

1986 se codifica como – 1, 1985 como – 3, y 1984 como – 5. Al ascender desde el origen, 1987 se codifica como + 1, 1988 como + 3 y 1989 como + 5. En la tabla se muestran los periodos codificados junto con los cálculos necesarios para determinar la ecuación de tendencia. Obsérvese que la distancia entre años es de dos unidades. En consecuencia, x es la mitad de esa distancia, o sea, seis meses.

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{30}{6} = 5 \qquad b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} = \frac{46}{70} = 0.657$$

La ecuación de mínimos cuadrados es:

$$Y' = 5 + 0.657x$$

donde:

Las exportaciones Y se expresan en millones de dólares.
El origen es enero 1 de 1987 (esto es, la mitad entre julio 1 de 1986 y julio 1 de 1987).
x aumenta dos unidades cada año (es decir, x aumenta una unidad cada seis meses).

Trazo de la recta

La ecuación de mínimos cuadrados, determinada por el método directo, resolviendo dos ecuaciones simultáneas (no mostradas) o por el método codificado, puede servir para encontrar los puntos en la línea que pasa por el punto medio de la información. Los datos de ventas de la tabla 19-1 se repiten en la tabla 19-3 para mostrar el procedimiento. La ecuación es $Y' = 10 + 1.3x$.

TABLA 19-3

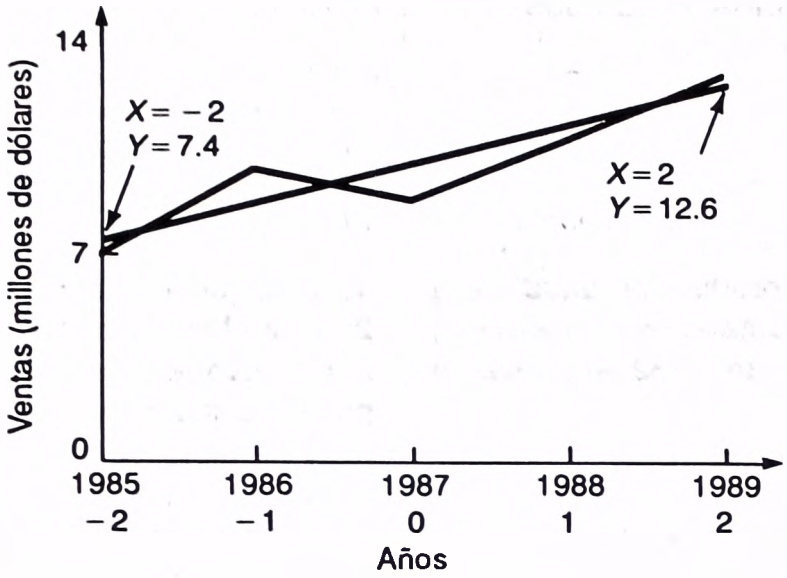
Cálculos necesarios para determinar los puntos sobre la recta usando el método codificado

Año	*Ventas (en millones de dólares)*	*x*	*Y'*	*Se halla por*
1985	$ 7	– 2	7.4	← 10 + 1.3(– 2)
1986	10	– 1	8.7	← 10 + 1.3(– 1)
1987	9	0	10.0	← 10 + 1.3(0)
1988	11	+ 1	11.3	← 10 + 1.3(+ 1)
1989	13	+ 2	12.6	← 10 + 1.3(+ 2)

Las ventas reales y la tendencia en ventas representadas por la línea recta se muestran en el diagrama 19-5. El primer punto tiene las coordenadas $x = -2$, $Y' = 7.4$.

DIAGRAMA 19-5

Ventas reales y tendencia lineal



Estimación

Si las ventas, la producción u otra información en un periodo se aproximan a una tendencia rectilínea, puede usarse la ecuación desarrollada por el método de mínimos cuadrados para estimar las ventas en algún periodo futuro.

✱ Ejemplo

Véase la información de ventas de la tabla 19-1. Obsérvese que el origen, o año 0, es 1987. El año 1988 se codifica como 1 y 1989 como 2. ¿Cuál es el pronóstico estimado de ventas para 1994?

✔ Solución

El año 1989 se codifica como 2; por lógica, 1990 como 3; 1991 como 4; 1992 como 5; 1993 como 6; y 1994 como 7. Así que en 1994, $x = 7$. Se sustituye el periodo 7 en la ecuación de la recta:

$$Y' = a + bx = 10 + 1.3x = 10 + 1.3(7) = \$19.1 \text{ millones}$$

Por tanto, con base en ventas pasadas, la estimación de ventas para 1994 es de \$19.1 millones.

En este problema de serie de tiempo hay información de ventas para cinco años. Con base en las cifras de esas cinco ventas, se estimaron las de 1994. Por intuición, parece que no se tiene suficiente información pasada para hacer un pronóstico a seis años en el futuro. Muchos investigadores sugieren que no se proyecten al futuro ventas, producción y otras series de negocios y economía más

allá de $n/2$ periodos. Por ejemplo, si se dispone de 10 años de información pasada, se harán estimaciones al futuro sólo hasta 5 años ($n/2 = 10/2 = 5$). Se infringe esta regla empírica en este ejemplo con objeto de mantener los cálculos, con base en información pasada, reducidos al mínimo. El criterio $n/2$ debe aplicarse para una estimación en la realidad.

AUTOEXAMEN 19-1

La respuestas se dan al final del capítulo.

Los datos sobre la producción anual de sillas mecedoras de tamaño regio producidas por una industria desde 1982 se presentan a continuación:

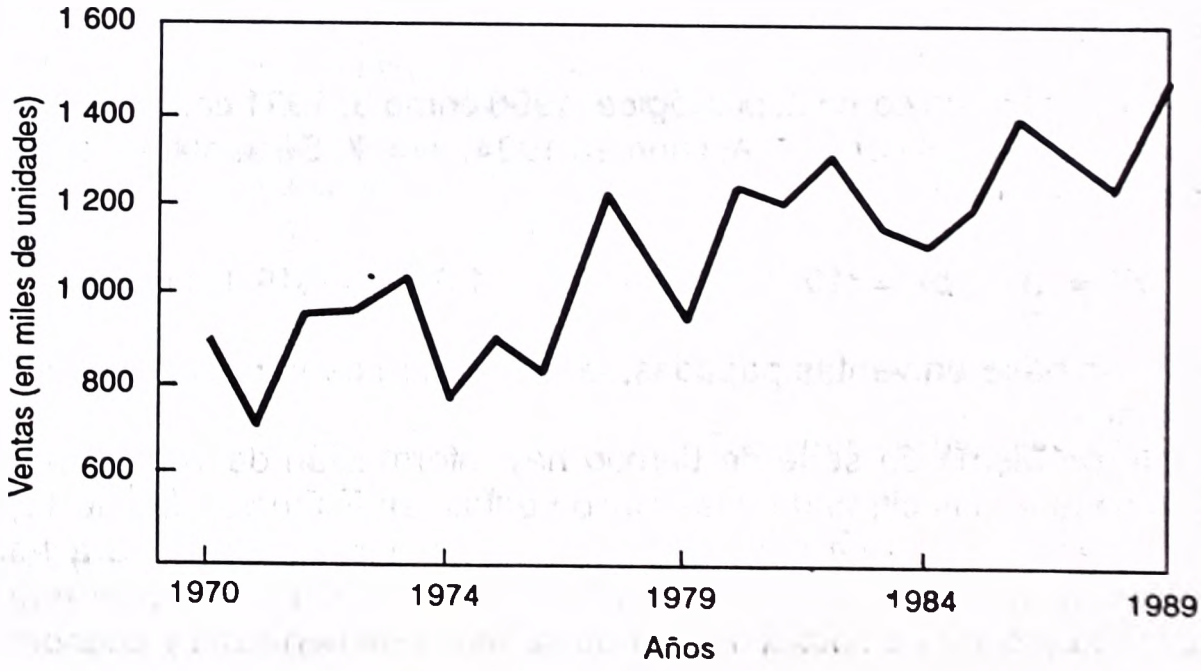
Año	*Producción (en miles)*
1982	4
1983	8
1984	5
1985	8
1986	11
1987	9
1988	11
1989	14

1. Grafique los datos de producción.
2. Use el método codificado para determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos ubicados.
3. Determine los puntos de la recta correspondientes a 1982 y 1988. Una los dos puntos para obtener la línea.
4. Con base en la ecuación de la recta, ¿cuál será la producción estimada para 1994?

EJERCICIOS

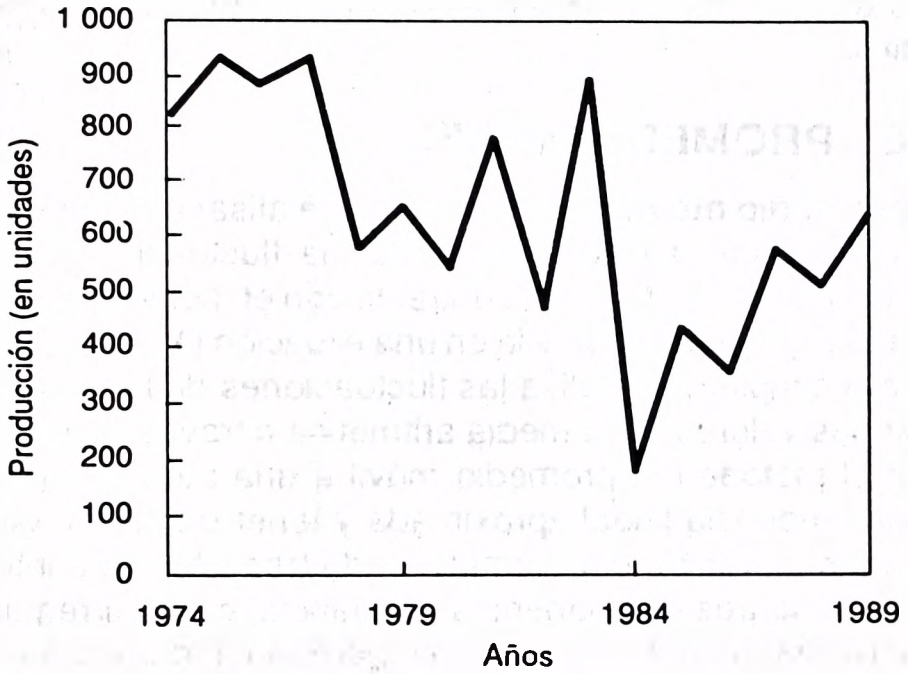
Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Las ventas de una empresa que principian en 1970 se grafican en el diagrama siguiente:



a. Trace una recta a través de la información y estime la ecuación lineal para la serie de ventas. Use 1970 como origen.
b. Con base en la ecuación, ¿cuál es el aumento anual promedio de las ventas?
c. Con base en la ecuación de tendencia, ¿cuáles son las ventas estimadas para 1996?
d. ¿Cuál es el punto débil al utilizar este método para llegar a la ecuación de la recta?

2. a. Estime la ecuación de tendencia para la producción siguiente de un tipo de impresoras. Utilice 1974 como origen o año 0.
b. ¿Cuál fue el cambio anual promedio de la producción?
c. ¿Cuál es la producción estimada para 1993 con base en la ecuación de tendencia?
d. ¿Cuál es el punto débil al usar este método para llegar a la ecuación de la recta?



3. La tabla siguiente presenta los promedios mensuales de la cantidad de chatarra producida por Machine Products, Inc.

Año	*Promedio mensual chatarra (toneladas)*
1986	2
1987	4
1988	3
1989	5
1990	6*

* Estimados

a. Trace los datos en una gráfica.
b. ¿Cuál es la ecuación de mínimos cuadrados para la recta usando el método codificado?
c. Calcule los puntos sobre la línea recta para 1986 y 1989. Trace la línea en el diagrama de la parte *a*.
d. Utilice la ecuación de la recta para estimar el promedio mensual para 1995.

4. Se va a realizar un estudio histórico de los promedios de ingresos (por hora) en la industria manufacturera. Los valores (en dólares) son:

1976	*1977*	*1978*	*1979*	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*
$5.22	$5.68	$6.17	$6.70	$7.27	$7.99	$8.49	$8.83	$9.23

Fuente: U.S. Department of Labor, *Monthly Labor Review*, diciembre 1984, págs. 66, 68.

a. Transporte los valores a una gráfica.
b. Utilice el método codificado de mínimos cuadrados para determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos.
c. Explique lo que indica el valor de *b* en la ecuación.
d. Proyecte, usando la ecuación, los valores respectivos para 1988.
e. Determine los dos puntos sobre la línea para 1977 y 1984, trace la recta en la gráfica de la parte *a*.

METODO DEL PROMEDIO MOVIL

El **método del promedio móvil** no sólo es útil para alisar una serie de tiempo, sino que es el método básico utilizado para medir la fluctuación estacional que se describe después en este capítulo. En contraste con el método de mínimos cuadrados, cuyo resultado expresa la tendencia en una ecuación ($Y' = a + bX$), el método del promedio móvil simplemente alisa las fluctuaciones de la información. Esto se realiza al "mover" los valores de la media aritmética a través de la serie de tiempo.

Para aplicar el método del promedio móvil a una serie de tiempo, los datos deben seguir una tendencia lineal aproximada y tener un patrón de fluctuaciones rítmico definido (que se repite, por ejemplo, cada tres años). La información en el ejemplo siguiente tiene tres componentes: tendencia, ciclo e irregularidad, simbolizadas *T*, *C* e *I*. No hay variación estacional porque los datos se registran anualmente. En realidad lo que se hace en el método del promedio móvil es promediar *C* e *I*. El residuo es la tendencia.

Si la duración de los ciclos es constante y si las amplitudes de los ciclos son iguales, las variaciones cíclica e irregular pueden eliminarse por completo usando el método del promedio móvil. El resultado es una recta. Por ejemplo, en la siguiente serie de tiempo el ciclo se repite cada siete años y la amplitud de cada ciclo es 4; esto es, hay exactamente cuatro unidades desde la depresión (el periodo de tiempo más bajo) al pico. En consecuencia, el promedio móvil de siete años promedia a la perfección las fluctuaciones irregulares y cíclicas, y lo que resta es una tendencia lineal o rectilínea.

El primer paso para calcular el promedio móvil de siete años es determinar el total de movimientos en siete años. El total de ventas en los primeros siete años (1964–70 inclusive) es $22 millones, véase la tabla 19-4. Este total se divide entre 7 para determinar el promedio anual de ventas, que se coloca frente al año medio (1967).

Se calcula luego el total de ventas en los siete años siguientes (1965–71 inclusive). (Un método conveniente consiste en restar las ventas de 1964 del total de los primeros siete años y sumar las ventas de 1971.) El promedio de este total ($23 millones) se ubica frente al año medio (1968). Este procedimiento se repite hasta que todos los totales posibles de siete años y sus promedios se han deter-

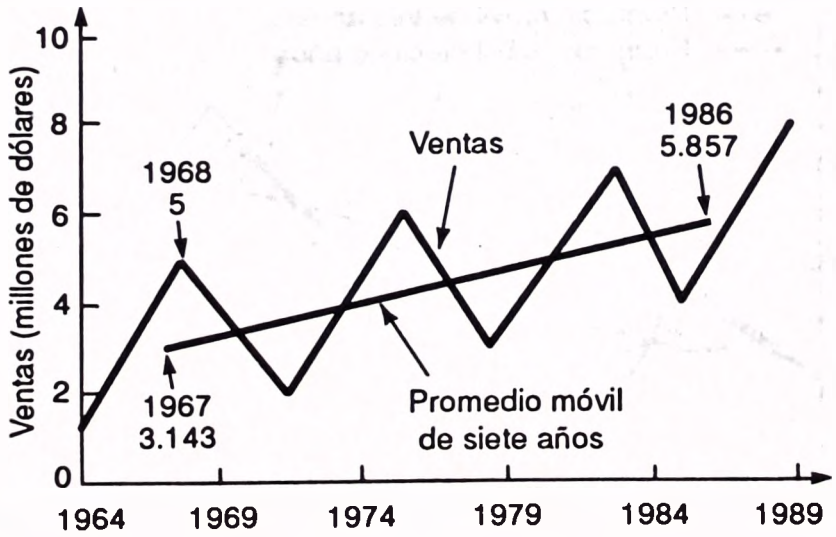
TABLA 19-4

Presentación de los cálculos para el promedio móvil de siete años

Año	*Ventas (en millones de dólares)*	*Total móvil de siete años*	*Promedio móvil de siete años*
1964	$1		
1965	2		
1966	3		
1967	4	22	3.143
1968	5	23	3.286
1969	4	24	3.429
1970	3	25	3.571
1971	2	26	3.714
1972	3	27	3.857
1973	4	28	4.000
1974	5	29	4.143
1975	6	30	4.286
1976	5	31	4.429
1977	4	32	4.571
1978	3	33	4.714
1979	4	34	4.857
1980	5	35	5.000
1981	6	36	5.143
1982	7	37	5.286
1983	6	38	5.429
1984	5	39	5.571
1985	4	40	5.714
1986	5	41	5.857
1987	6		
1988	7		
1989	8		

DIAGRAMA 19-6

Ventas y promedio móvil de siete años



minado. Obsérvese que no hay totales para los tres primeros años y los tres últimos. (Véase la tabla 19-4 y el diagrama 19-6.)

En la tabla 19-5 se muestran los promedios móviles para tres y cinco años, y se grafican en el diagrama 19-7.

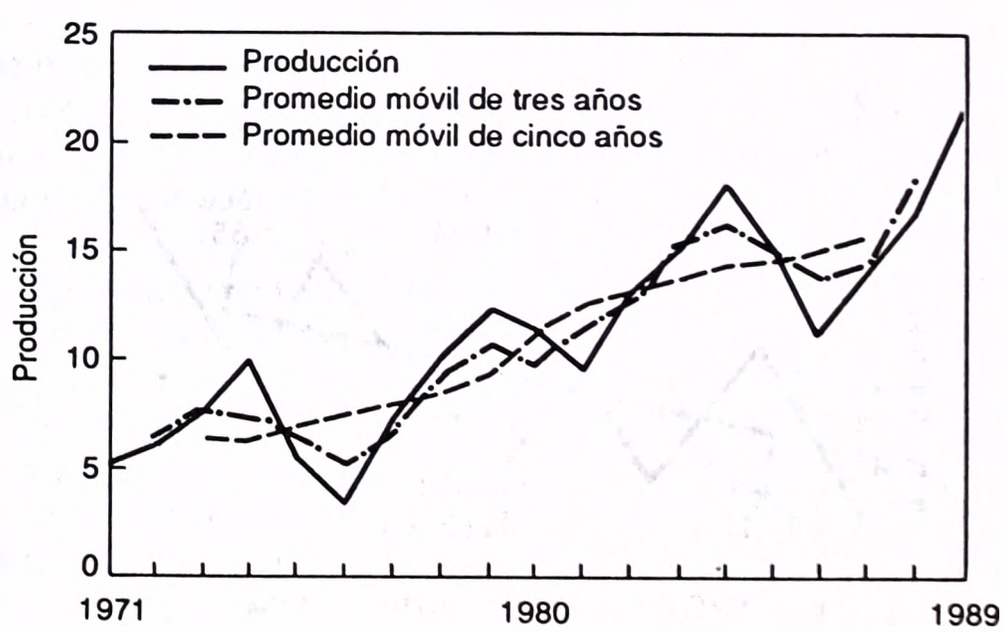
TABLA 19-5

Presentación de los cálculos para el promedio móvil de tres y de cinco años

Año	*Producción, Y*	*Total móvil de tres años*	*Promedio móvil de tres años*	*Total móvil de cinco años*	*Promedio móvil de cinco años*
1971	5				
1972	6	19	6.3		
1973	8	24	8.0	34	6.8
1974	10	23	7.7	32	6.4
1975	5	18	6.0	33	6.6
1976	3	15	5.0	35	7.0
1977	7	20	6.7	37	7.4
1978	10	29	9.7	43	8.6
1979	12	33	11.0	49	9.8
1980	11	32	10.7	55	11.0
1981	9	33	11.0	60	12.0
1982	13	37	12.3	66	13.2
1983	15	46	15.3	70	14.0
1984	18	48	16.0	72	14.4
1985	15	44	14.7	73	14.6
1986	11	40	13.3	75	15.0
1987	14	42	14.0	79	15.8
1988	17	53	17.7		
1989	22				

DIAGRAMA 19-7

Presentación de un promedio móvil de tres y de cinco años



Las series de ventas, producción y otras de negocios y económicas generalmente carecen de 1) periodos de oscilación de igual extensión, o 2) oscilaciones que tengan amplitudes idénticas. Por tanto, en la práctica real, la aplicación del método del promedio móvil a datos no resulta precisamente en una línea recta. Por ejemplo, la serie de producción de la tabla 19-5 se repite cada cinco años, pero la amplitud de la información varía de una oscilación a otra. La tendencia parece ser ascendente y algo rectilínea. Los promedios móviles tanto de tres como de cinco años parecen adecuados para describir la tendencia de la producción desde 1971.

El sistema MINITAB puede servir para calcular el promedio móvil. La información de producción de la tabla 19-5 se usa para mostrar el procedimiento MINITAB para un promedio móvil de tres años. El primer paso es atrasar un periodo cada uno de los valores de producción. Los datos de la columna C2 son las cifras de la producción anual de la columna C1 atrasados un año. La columna C3 es la producción anual atrasada dos años. A continuación se promedian las tres columnas creando el promedio móvil. Obsérvese que los promedios móviles son iguales a los obtenidos en la tabla 19-5 (excepto por el redondeo).

```
MTB > set c1
DATA> 5,6,***,17,22
DATA > end
MTB > lag 1 c1 c2
MTB > lag 2 c1 c3
MTB > let c4=(c1+c2+c3)/3
MTB > name c1 'Prod' c2 'lag - 1' c3 'lag - 2' c4 'Mov - avg'
MTB > print c1 c2 c3 c4
```

ROW	Prod	lag - 1	lag - 2	Mov - avg
1	5	*	*	*
2	6	5	*	*
3	8	6	5	6.3333
4	10	8	6	8.0000
5	5	10	8	7.6667
6	3	5	10	6.0000
7	7	3	5	5.0000
8	10	7	3	6.6667
9	12	10	7	9.6667
10	11	12	10	11.0000
11	9	11	12	10.6667
12	13	9	11	11.0000
13	15	13	9	12.3333
14	18	15	13	15.3333
15	15	18	15	16.0000
16	11	15	18	14.6667
17	14	11	15	13.3333
18	17	14	11	14.0000
19	22	17	14	17.6667

Los promedios móviles de cuatro, seis y otro número par de años presentan un problema menor con respecto al centro de los totales y los promedios móviles. Obsérvese en la tabla 19-6 que no hay periodo central, así que los totales móviles están *entre* dos periodos. El total para los primeros cuatro años ($42) está entre 1982 y 1983. El total para los siguientes cuatro años es $43. Los promedios de los primeros cuatro años y los segundos cuatro años ($10.50 y $10.75, respectivamente) están promediados, y la cifra resultante se centra en 1983. Este procedimiento se repite hasta que se han calculado todos los posibles promedios de cuatro años.

TABLA 19-6

Presentación de un promedio móvil de cuatro años

Año	*Ventas Y*	*Total móvil de cuatro años*	*Promedio móvil de cuatro años*	*Promedio móvil centrado de cuatro años*
1981	$ 8			
1982	11			
		$42(8 + 11 + 9 + 14)	$10.50($42 ÷ 4)	
1983	9			10.625
		43(11 + 9 + 14 + 9)	10.75($45 ÷ 4)	
1984	14			10.625
		43	10.50	
1985	9			10.625
		43	10.75	
1986	10			10.000
		37	9.25	
1987	10			9.625
		40	10.00	
1988	8			
1989	12			

Obsérvese que los promedios tienden a amortiguar o alisar las fluctuaciones.

AUTOEXAMEN 19-2

1. Calcule un promedio móvil de tres años para la siguiente serie de producción.
2. Grafique tanto los datos originales como el promedio móvil.
3. Comente el ajuste.

Año	*Número producido (en miles)*
1984	2
1985	6
1986	4
1987	5
1988	3
1989	10

Como un breve resumen de la técnica que utiliza promedios móviles, su objetivo es auxiliar en la identificación de la tendencia a largo plazo en una serie de tiempo (ya que amortigua las fluctuaciones a corto plazo). Sirve para revelar cualesquiera fluctuaciones cíclicas y estacionales. Generalmente se aplica a datos semanales, trimestrales o anuales.

TENDENCIAS NO LINEALES

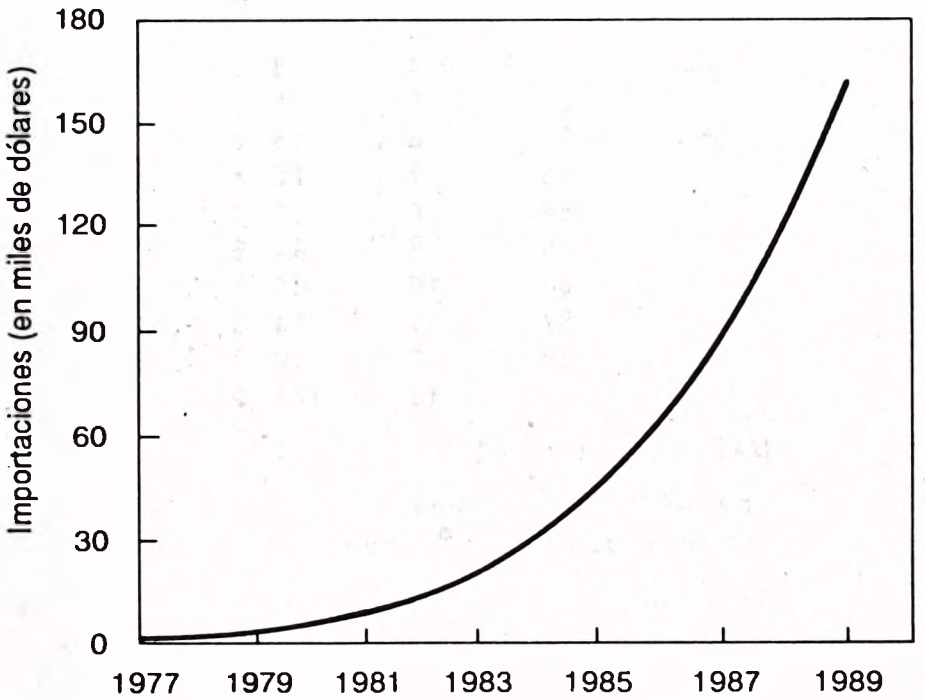
En la exposición anterior se hizo hincapié en una serie de tiempo cuyo crecimiento o decrecimiento se aproximaba a una línea recta. Se usa una ecuación lineal de tendencia para representar series de tiempo cuando se cree que la información aumenta (o disminuye) en promedio, en *cantidades iguales,* de un periodo a otro.

La información que aumenta (o disminuye) en *cantidades crecientes* en un periodo, aparece en forma *curvilínea* cuando se grafica en papel con escala aritmética. O dicho en otra forma, la información que aumenta (o disminuye) en *porcentajes* o *proporciones iguales* en un periodo, aparece en forma curvilínea en el papel cuadriculado común. (Véase el diagrama 19-8.)

DIAGRAMA 19-8

Importaciones de una empresa, graficadas en papel a escala aritmética

Año	*Importaciones (en miles de dólares)*
1977	$ 3.0
1978	4.2
1979	5.7
1980	8.3
1981	11.5
1982	16.0
1983	22.4
1984	31.0
1985	44.6
1986	60.1
1987	84.3
1988	118.6
1989	163.9



La ecuación de tendencia para una serie de tiempo que se aproxima a una tendencia curvilínea, como la mostrada en el diagrama 19-8, puede calcularse con los logaritmos de los datos y el método de mínimos cuadrados.

La ecuación general de tendencia logarítmica es:

$$\boxed{\log Y' = \log a + \log b(x)}$$

La ecuación logarítmica puede determinarse para los datos de importación mostrados en el diagrama 19-8 usando el sistema MINITAB. El primer paso consiste en introducir los años. Se determina un código para los años restando 76 de cada año, de modo que 1977 se codifica como 1. A continuación se introducen los datos de importación. Se usa el comando LET para determinar el logaritmo de base 10 para cada valor de importación. Por último, se aplica el procedimiento de regresión, con el logaritmo de las importaciones como variable dependiente y los años codificados como variable independiente. Los resultados son los siguientes:

```
MTB > set c1
DATA > 77,78,79,***,88,89
DATA > end
MTB > let c2=c1-76
MTB > set c3
DATA > 3,4,2,5,7,***,118,6,163.9
DATA > end
MTB > let c4=logten(c3)
MTB > name c1 'years" c2 'codes' c3 'imports' c4 'logs'
MTB > print c1 - c4

ROW     years   codes    imports       logs
  1        77       1        3.0    0.47712
  2        78       2        4.2    0.62325
  3        79       3        5.7    0.75587
  4        80       4        8.3    0.91908
  5        81       5       11.5    1.06070
  6        82       6       16.0    1.20412
  7        83       7       22.4    1.35025
  8        84       8       31.0    1.49136
  9        85       9       44.6    1.64933
 10        86      10       60.1    1.77887
 11        87      11       84.3    1.92583
 12        88      12      118.6    2.07408
 13        89      13      163.9    2.21458

MTB > regr c4 1 c2

The regression equation is
logs = 0.333 + 0.145 codes

Predictor          Coef        Stdev     t-ratio
Constant       0.332548     0.003381       98.36
codes          0.145069     0.000426      340.56
```

La ecuación de regresión es:

$$\log Y' = \log a + \log b(x)$$
$$= 0.333 + 0.145x$$

o, con mayor precisión,

$$\log Y' = 0.332548 + 0.145069x$$

Lo que se tiene ahora es la ecuación de tendencia en términos del cambio porcentual. Esto es, el valor 0.145 representa un cambio porcentual en Y'. Este valor es similar en concepto y cálculo a la media geométrica, presentada en el capítulo 3, que proporciona el cambio porcentual en Y (ventas, producción, etc.) de un periodo a otro.

El logaritmo de b es 0.145, y su antilogaritmo es aproximadamente 1.3964. Al restar 1 de este valor, como se hizo en el capítulo 3, se tiene una indicación de que las importaciones aumentaron a una tasa de 39.64% por año, de 1977 a 1989.

Puede usarse la línea recta logarítmica para hacer estimaciones. Supóngase que se desea estimar las importaciones para 1997. El primer paso es determinar el código del año 1997, el cual es 21(97 – 76). El valor 21 se introduce en vez de x y se calcula el valor de Y. (Véanse los cálculos en la página siguiente.)

AUTOEXAMEN 19-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

La ecuación logarítmica para los datos de importación del diagrama 19-8 se determinaron usando el sistema MINITAB. Para practicar, realice este problema usando una calculadora de mano. El método codificado coloca el año central en 0.

$$a = \frac{\Sigma \log Y}{n} \quad \text{y} \quad b = \frac{\Sigma(x \log Y)}{\Sigma x^2}$$

Las ventas de una empresa industrial desde 1985 son:

Año	*Ventas (en millones de dólares)*
1985	$ 2.13
1986	18.10
1987	39.80
1988	81.40
1989	112.00

1. Usando el método codificado obtenga la ecuación de la línea recta logarítmica para la información de ventas.
2. En promedio, ¿en qué porcentaje anual aumentaron las ventas?
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de la línea recta logarítmica para 1988?
4. ¿Cuáles son las ventas proyectadas para 1993?

$$\begin{aligned} \log Y' &= 0.332548 + 0.145069x \\ &= 0.332548 + 0.145069(21) \\ &= 3.378997 \end{aligned}$$

Para determinar las importaciones estimadas para 1997, se necesita tomar el antilogaritmo de 3.378997, el cual es 2 393.3. Esta es la estimación de las importaciones para 1997. Recuérdese que los datos están en miles de dólares, de modo que el valor real es $2 393 000. Es preferible usar el valor redondeado a $2.4 millones en vez de citar una cifra con dudosa exactitud.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Si se grafica en papel cuadriculado común o aritmético, la siguiente serie de ventas aparecería curvilínea. Esto indica que las ventas están aumentando a una tasa anual casi constante (%).

Año	*Ventas (millones de dólares)*
1979	$ 8.0
1980	10.4
1981	13.5
1982	17.6
1983	22.8
1984	29.3
1985	39.4
1986	50.5
1987	65.0
1988	84.1
1989	109.0

   a. Determine la ecuación de la línea recta logarítmica.
   b. Determine las coordenadas de los puntos en la recta logarítmica para 1980 y 1989.
   c. ¿En qué porcentaje aumentaron en promedio las ventas durante el periodo 1979–89?
   d. Con base en la ecuación, ¿cuáles son las ventas estimadas para 1993?

6. Se observa que las importaciones del carbón animal (o negro de humo) han aumentado anualmente casi 10% en promedio.

Año	*Importaciones de negro de humo (en miles de toneladas)*
1981	92
1982	101
1983	112
1984	124
1985	135
1986	149
1987	163
1988	180

a. Determine la ecuación de tendencia de la línea recta semilogarítmica.
b. Estime las importaciones de ese producto para 1993.

VARIACION ESTACIONAL

Se mencionó que *la variación estacional* es una de las componentes de una serie de tiempo. Las series de negocios, como ventas de automóviles, embarques de refrescos embotellados y construcciones residenciales, durante el año tienen periodos de actividad por encima y por abajo del promedio.

En el área de producción, una de las razones para analizar las fluctuaciones estacionales, es tener disponibles suficientes suministros de materias primas para cubrir la demanda estacional variable. Por ejemplo, la división de recipientes de vidrio de una gran compañía vidriera, manufactura botellas no retornables y retornables para cerveza, frascos para yodo, para aspirinas, para pegamento, etc. El departamento de programación de la producción debe conocer cuántos envases de cada clase hay que producir y cuándo hay que hacerlo. Un periodo de producción de demasiados envases de una clase puede causar un problema grave de almacenamiento. La producción no puede basarse por entero en los pedidos actuales porque muchos se reciben por teléfono para embarque inmediato. Puesto que la demanda de varios de los tipos de envases varía de acuerdo con las estaciones del año, un pronóstico de un año o dos de anticipación, mensual, es básico para programar una buena producción.

Un análisis de las fluctuaciones estacionales en un periodo de años también puede ayudar a evaluar las ventas actuales. Las ventas representativas de las tiendas de departamentos en Estados Unidos, sin incluir los pedidos por correo, se expresan como índices en la tabla 19-7. Cada índice representa el promedio de ventas en un periodo de siete años. Las ventas reales en algunos meses fueron superiores al promedio (que se representa por un índice de 100.0), y las ventas en otros meses estuvieron por abajo del promedio. El índice de 126.8 para diciembre indica que, en forma característica, las ventas para diciembre fueron 26.8% superiores al promedio para el año; el índice de 86.0 para julio indica que las ventas de las tiendas de departamentos para ese mes estuvieron, de manera especial, 14% abajo del promedio para el año.

TABLA 19-7

Indice estacional para ventas en tiendas de departamentos en Estados Unidos, excluyendo ventas de pedidos por correo

Enero	87.0	Julio	86.0
Febrero	83.2	Agosto	99.7
Marzo	100.5	Septiembre	101.4
Abril	106.5	Octubre	105.8
Mayo	101.6	Noviembre	111.9
Junio	89.6	Diciembre	126.8

Fuente: Calculado de datos en el *Survey of Current Business.*

Supóngase que un jefe de tienda emprendedor, en un intento para estimular las ventas durante diciembre, introdujo un cierto número de promociones únicas,

que incluían grupos de cantores que recorrían toda la tienda cantando villancicos navideños, grandes exhibiciones mecánicas y empleados vestidos de Santa Claus. Cuando se calculó el índice de ventas para ese diciembre, el resultado fue 150.0. Al hacer comparación con el índice característico de ventas de 126.8, se concluyó que el programa promocional había sido todo un éxito.

Se examinarán a continuación dos métodos de uso común para determinar los índices estacionales. Uno es el método que usa promedios y otro el de razón a promedio móvil.

METODOS PARA DETERMINAR INDICES ESTACIONALES

Un conjunto de índices mensuales consiste en 12 índices que son representativos de los datos para un periodo de 12 meses. En forma lógica, hay cuatro índices estacionales característicos para los datos de informes trimestrales. Cada índice es un porcentaje, con el promedio del año igual a 100.0; esto es, cada índice mensual indica el nivel de ventas, producción u otra variable en relación con el promedio anual de 100.0. Un índice representativo de 96.0 para enero indica que las ventas (o cualquiera que sea la variable) están por lo general 4% abajo del promedio del año. Un índice de 107.2 para octubre significa que la variable, en forma característica, está 7.2% arriba del promedio anual.

Se han desarrollado muchos métodos para medir la fluctuación estacional en una serie de tiempo. Los métodos varían desde un enfoque simple hasta métodos muy complicados. Se expondrán sólo dos procedimientos: 1) un método que usa promedios y 2) el método de uso común de razón a promedio móvil.

Método que utiliza promedios

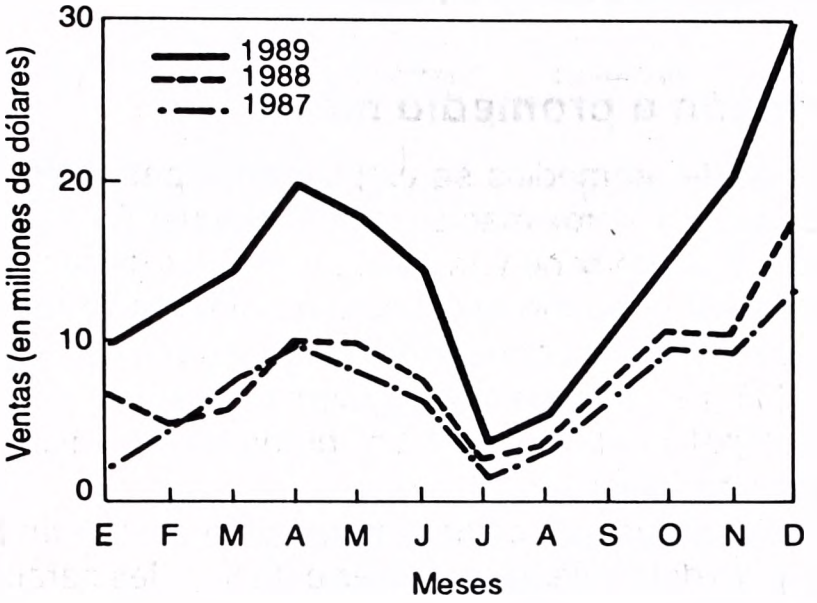
Puesto que un índice estacional es uno compuesto que representa las fluctuaciones estacionales de un cierto número de años, un enfoque simple consiste en encontrar el promedio de ventas para cada mes (esto es, el promedio de todos los valores para el mes de enero, de todos los valores para el mes de febrero, y así sucesivamente).

Las ventas reales en varios años pueden graficarse primero para tener la seguridad de que existe un patrón estacional recurrente (véase el diagrama 19-9). El diagrama indica que existen fluctuaciones estacionales definidas. Hay periodos de ventas altas en primavera y a fin de año y hay periodos de ventas bajas al principio del año y en verano. ¿Cuáles son los índices estacionales de las ventas de la Staat Company?

Con referencia a las ventas mensuales de la tabla 19-8, obsérvese que las ventas en enero para los años 1985-89 fueron $2, $5, $4, $6 y $10 millones (de dólares). El total es $27 millones y el promedio de ventas es $5.4 millones, calculado por $27/5. Continuando, el total de ventas para los cinco meses de febrero fue $34 millones, y el promedio fue de $6.8 millones. Este proceso se continúa para todos los meses.

DIAGRAMA 19-9

Ventas mensuales de la Staat Company: 1987, 1988 y 1989



El siguiente paso consiste en determinar el nivel medio de ventas mensuales. Se obtiene por $113.8/12 = $9.483 millones. Después se divide el valor de las ventas para cada mes entre $9.483 millones y los cocientes se multiplican por 100. Para enero, ($5.4/$9.483)100 = 57.0. Para febrero, ($6.8/$9.483)100 = 71.7, y así sucesivamente. Por lógica, la suma de los 12 índices mensuales debe ser igual a 1 200, excepto por una pequeña discrepancia debida al redondeo.

Este método burdo para medir el patrón estacional tiene varias ventajas. El procedimiento es muy sencillo y el tiempo empleado en los cálculos es mínimo. Sin embargo, éste y otros enfoques similares tienen varias desventajas. En teoría, cada año debe tener ponderación igual al determinar el valor de cada índice mensual. Esto no es cierto en este problema. La tendencia fue ascendente de 1985 a 1989,

TABLA 19-8

Ventas de la Staat Company por mes, 1985-89 (en millones de dólares)

Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Apr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*	*Total*
1985	$ 2	$ 4	$ 8	$10	$ 8	$ 6	$ 1	$ 4	$ 7	$10	$10	$14	$ 84
1986	5	6	7	10	9	6	2	5	8	10	11	15	94
1987	4	7	8	11	9	8	21	4	7	10	11	17	117
1988	6	5	7	10	9	7	1	4	9	11	11	17	97
1989	10	12	15	20	18	14	3	7	11	17	22	28	177
Total	$27	$34	$45	$61	$53	$41	$28	$24	$42	$58	$65	$91	$569
Promedio	5.4	6.8	9.0	12.2	10.6	8.2	5.6	4.8	8.4	11.6	13.0	18.2	113.8
Indice	57.0	71.7	94.9	128.7	111.8	86.5	59.1	50.6	88.6	122.3	137.1	191.2	1 200.2

con el nivel de ventas en 1989 mucho más alto que las ventas en años anteriores. Como resultado, las ventas para cada mes en 1989 tienen una ponderación desproporcionada. Obsérvense también las ventas para julio de 1987. Este valor irregular (21) afecta indebidamente el índice para julio.

Método de razón a promedio móvil

El método sencillo de promedios se emplea principalmente en problemas en los cuales se necesita una aproximación rápida del patrón estacional. Como se indicó antes, el procedimiento tiene varias desventajas teóricas. El método de uso más común para calcular el patrón estacional es el llamado **método de razón a promedio móvil**, que elimina las componentes de tendencia, cíclica e irregular de los datos originales (Y). En la exposición siguiente, T se refiere a la tendencia, C a la cíclica, E a la estacional e I a la irregular. Los números que resultan se denominan *índice estacional característico*.

Ahora, como antes, se usarán cifras simples para ilustrar en detalle los pasos que deben seguirse para determinar los índices estacionales característicos usando el método de razón a promedio móvil.

Los datos de interés pueden ser mensuales o trimestrales. Como ilustración, se escogen las ventas trimestrales de Toys International. Primero se mostrarán los pasos necesarios para llegar a un conjunto de índices trimestrales característicos. Después se aplicará el procedimiento de Hall & Adelman tomado del paquete programático (software) estadístico *Computerized Business Statistics*, distribuido por Richard D. Irwin, Inc.

* Ejemplo

Toys International hace inventario de sus muñecas, juguetes mecánicos y otros productos disponibles cada trimestre. El valor del inventario, en millones de dólares, al inicio de cada trimestre desde 1984 se indica en la tabla 19-9.

TABLA 19-9

Inventario trimestral de Toys International (en millones de dólares)

	Trimestre			
Año	*Invierno*	*Primavera*	*Verano*	*Otoño*
1984	$6.7	$4.9	$10.0	$12.7
1985	6.5	4.8	9.8	13.6
1986	6.9	4.3	10.4	13.1
1987	7.0	5.5	10.8	15.0
1988	7.1	4.4	11.1	14.5
1989	8.0	4.2	11.4	14.9

¿Cuáles son los índices trimestrales usando el método de razón a promedio móvil?

TABLA 19-10

Cálculos necesarios para los índices estacionales específicos

Año	*Trimestre*	*(1) Inventario (en millones de dólares)*	*(2) Total móvil de cuatro trimestres*	*(3) Promedio móvil de cuatro trimestres*	*(4) Promedio móvil centrado*	*(5) Estacional específico*
1984	Invierno	$ 6.7				
	Primavera	4.9				
			$34.3	8.575		
	Verano	10.0			8.550	117.0
			34.1	8.525		
	Otoño	12.7			8.513	149.2
			34.0	8.500		
1985	Invierno	6.5			8.475	76.7
			33.8	8.450		
	Primavera	4.8			8.563	56.1
			34.7	8.675		
	Verano	9.8			8.725	112.3
			35.1	8.775		
	Otoño	13.6			8.713	156.1
			34.6	8.650		
1986	Invierno	6.9			8.725	79.1
			35.2	8.800		
	Primavera	4.3			8.738	49.2
			34.7	8.675		
	Verano	10.4			8.688	119.7
			34.8	8.700		
	Otoño	13.1			8.850	148.0
			36.0	9.000		
1987	Invierno	7.0			9.050	77.3
			36.4	9.100		
	Primavera	5.5			9.338	58.9
			38.3	9.575		
	Verano	10.8			9.588	113.0
			38.4	9.600		
	Otoño	15.0			9.475	158.3
			37.3	9.325		
1988	Invierno	7.1			9.363	75.8
			37.6	9.400		
	Primavera	4.4			9.338	47.1
			37.1	9.275		
	Verano	11.1			9.388	118.2
			38.0	9.500		
	Otoño	14.5			9.475	153.0
			37.8	9.450		
1989	Invierno	8.0			9.488	84.3
			38.1	9.525		
	Primavera	4.2			9.575	48.9
			38.5	9.625		
	Verano	11.4				
	Otoño	14.9				

✔ Solución

Paso 1 Véase la tabla 19-10. Se determina un total móvil de cuatro trimestres. Principiando con el de invierno de 1984, se suman $6.7, $4.9, $10.0 y $12.7. El total es $34.3 millones (de dólares).

El total se "traslada" añadiendo los inventarios de primavera, verano y otoño de 1984 y el inventario de invierno de 1985. Ese total es $34.1 millones, encontrado por 4.9 + 10.0 + 12.7 + 6.5. En vez de sumar los cuatro valores de inventario con una calculadora de mano, se puede restar el inventario de invierno de 1984 (6.7) y sumar el inventario de invierno de 1985 (6.5) del total inicial de $34.3 millones. Esto da $34.1 millones. Este procedimiento se continúa hasta que todos los inventarios trimestrales han sido tomados en cuenta. Los totales móviles de cuatro trimestres están en la columna 2 de la tabla 19-10. Obsérvese que el primer total móvil (34.3) está entre la primavera y el verano de 1984. El total siguiente (34.1) se ubica entre el verano y el otoño de 1984, y así sucesivamente. Deben hacerse verificaciones frecuentes de los totales. Por ejemplo, una verificación del inventario total (34.7) de 1986, que se encuentra entre la primavera y el verano de 1986, se hace sumando las cuatro cifras para 1986 (6.9 + 4.3 + 10.4 + 13.1 = 34.7). Queda comprobado así.

Paso 2 Cada total móvil trimestral de la columna 2 se divide entre 4 para obtener el promedio móvil de cuatro trimestres (véase la columna 3). Todos los promedios móviles están todavía entre trimestres. Por ejemplo, el primer promedio móvil (8.575) se halla entre la primavera y el verano de 1984.

Paso 3 Ahora se centran los promedios móviles. Se determina el primer promedio móvil centrado: (8.575 + 8.525)/2 = 8.550. El segundo se obtiene por (8.525 + 8.500)/2 = 8.513, y así sucesivamente. Obsérvese en la columna 4 que un promedio móvil centrado se ubica ahora en un trimestre específico.

Paso 4 Se calculan los datos de estacionalidad específica para cada trimestre dividiendo el valor de inventario de la columna 1 entre el promedio móvil centrado de la columna 4. Cada cociente se multiplica por 100.0 para convertirlo en un índice. Los datos de estación específicos están en la columna 5.

Paso 5 Los datos de estacionalidad se organizan en forma de tabla (véase la tabla 19-11). Entonces cualquier media, media modificada, o mediana, se determina para cada uno de los cuatro trimestres. Se selecciona la media.

Paso 6 En teoría las cuatro medias trimestrales (78.64, 51.04, 115.96 y 152.96) de la tabla 19-11 deben dar un total de 400.0 porque el promedio se fija en 100.0. El total puede no ser igual a 400.0 debido al redondeo. En este problema el total de las medias es 398.6. En consecuencia se aplica un *factor de corrección* a cada una de las cuatro medias para forzarlas a un total de 400.0.

$$\text{Factor de corrección} = \frac{400}{\text{Total de las cuatro medias}}$$

TABLA 19-11

Cálculos necesarios para los índices trimestrales

	Trimestre				
Año	*Invierno*	*Primavera*	*Verano*	*Otoño*	
1984			117.0	149.2	
1985	76.7	56.1	112.3	156.1	
1986	79.1	49.2	119.7	148.0	
1987	77.3	58.9	112.6	158.5	
1988	75.8	47.1	118.2	153.0	
1989	84.3	43.9			
Total	393.2	255.2	579.80	764.8	*Total*
Media	78.64	51.04	115.96	152.96	398.60
Indice	78.92	51.22	116.37	153.50	

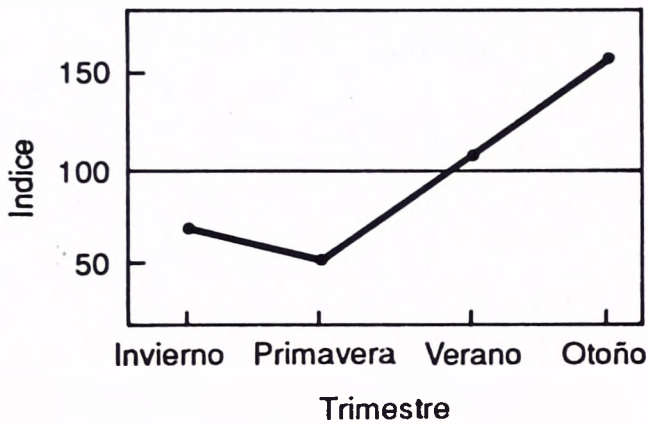
En este problema:

$$\text{Factor de corrección} = \frac{400.0}{398.6} = 1.00351$$

Para ajustar el índice trimestral de otoño, (1.00351)(152.96) = 153.50.

Cada una de las medias se ajusta hacia arriba. Los cuatro índices estacionales se muestran en la tabla 19-11 y se grafican en el diagrama siguiente.

Indice representativo	
Invierno	78.92
Primavera	51.22
Verano	116.37
Otoño	153.50



Al interpretar el índice trimestral de otoño se encuentra que el inventario de juguetes al principio del trimestre (por octubre 1), está 53.50% arriba del promedio del año. El inventario es alto por la necesidad de afrontar los inminentes embarques para el periodo de ventas navideñas.

Ahora se expondrán con brevedad los razonamientos para los cálculos anteriores. Los datos originales en la columna 1 contienen componentes de tendencia (T), ciclo (C), datos de estacionalidad (E) e irregular (I). El objetivo inmediato es eliminar los datos de la estacionalidad (E) de la valuación original del inventario.

Las columnas 2 y 3 en la tabla 19-10 se ocupan para la obtención del promedio trimestral móvil dado en la columna 4. Básicamente se han "eliminado por promedio" las fluctuaciones estacionales e irregulares de los datos originales en la columna 1. En consecuencia, en la columna 4 sólo se tienen los datos de estacionalidad y ciclo (EC).

A continuación se dividen los datos de inventario de la columna 1 (*TCEI*) entre el promedio móvil centrado de cuatro meses en la columna 4 (*TC*) para determinar los datos de estacionalidad específicos de la columna 5 (*EI*). En símbolos, *TCEI/TC* = *EI*. Se multiplica *EI* por 100.0 con objeto de expresar los datos de estacionalidad en forma de índices.

Por último se tomó la media de todos los índices de invierno, los de primavera, y así sucesivamente. Esta forma de promediar elimina la mayor parte de las fluctuaciones irregulares estacionales y los cuatro índices resultantes indican el patrón del inventario estacional.

Solución por computadora

En el capítulo 6 se usó el paquete programático estadístico *Computerized Business Statistics,* de Hall & Adelman y distribuido por Richard D. Irwin, Inc., contiene una rutina para calcular índices estacionales. A continuación se presentan los resultados obtenidos para el ejemplo anterior. Se muestra gran parte de la misma información respecto a la tendencia y las componentes estacionales e irregulares. Debido al redondeo las respuestas finales difieren ligeramente de las indicadas en

Model Type: Classical - Seasonal Analysis
Number of Periods: 6

Classical Time Series (Seasonal)

Period	Quarter	Value	Trend	S - I
1	1	6.7000	- -	- -
	2	4.9000	- -	- -
	3	10	8.5500	1.1696
	4	12.7000	8.5125	1.4919
2	1	6.5000	8.4750	0.7670
	2	4.8000	8.5625	0.5606
	3	9.8000	8.7250	1.1232
	4	13.6000	8.7125	1.5610
3	1	6.9000	8.7250	0.7908
	2	4.3000	8.7375	0.4921
	3	10.4000	8.6875	1.1971
	4	13.1000	8.8500	1.4802
4	1	7	9.0500	0.7735
	2	5.5000	9.3375	0.5890
	3	10.8000	9.5875	1.1265
	4	15	9.4625	1.5852
5	1	7.1000	9.3625	0.7583
	2	4.4000	9.3375	0.4712
	3	11.1000	9.3875	1.1824
	4	14.5000	9.4750	1.5303
6	1	8	9.4875	0.8432
	2	4.2000	9.5750	0.4386
	3	11.4000	- -	- -
	4	14.9000	- -	- -

Classical - Seasonal Analysis continued

Seasonal Index by Quarter

Quarter	Average SI Component	Seasonal Index
1	0.7866	0.7905
2	0.5103	0.5129
3	1.1598	1.1656
4	1.5297	1.5374

← Multiply by 100 to obtain index

END OF ANALYSIS

AUTOEXAMEN 19-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Teton Village, Wyoming, cerca de Grand Teton Park y de Yellowstone Park, tiene tiendas, restaurantes y moteles. Hay dos temporadas de auge: de invierno, para esquiar en las pendientes de 10 000 pies, y de verano, cuando los turistas visitan los parques. Los datos estacionales específicos con respecto al volumen total de ventas para los últimos años son:

	Trimestre			
Año	*Invierno*	*Primavera*	*Verano*	*Otoño*
1986	117.0	80.7	129.6	76.1
1987	118.6	82.5	121.4	77.0
1988	114.0	84.3	119.9	75.0
1989	120.7	79.6	130.7	69.6
1990	125.2	80.2	127.6	72.0

1. Determine el patrón de ventas estacionales para Teton Village usando el método de razón a promedio móvil.
2. Explique el índice para la estación de invierno.

la tabla 19-10. El uso de un paquete como el de Hall & Adelman reduce mucho el tiempo de computadora y la posibilidad de errores aritméticos.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. La producción trimestral de madera de pino, en millones de pies cuadrados del aserradero Northwest Lumber, desde 1986, es:

	Trimestre			
Año	*Invierno*	*Primavera*	*Verano*	*Otoño*
1986	7.8	10.2	14.7	9.3
1987	6.9	11.6	17.5	9.3
1988	8.9	9.7	15.3	10.1
1989	10.7	12.4	16.8	10.7
1990	9.2	13.6	17.1	10.3

a. Determine el patrón estacional para los datos de producción usando el método de razón a promedio móvil.
b. Interprete el patrón.

8. Las tasas de movimiento de inventario por trimestre de Bassett Wholesale Enterprises son:

	Trimestre			
Año	*I*	*II*	*III*	*IV*
1985	4.4	6.1	11.7	7.2
1986	4.1	6.6	11.1	8.6
1987	3.9	6.8	12.0	9.7
1988	5.0	7.1	12.7	9.0
1989	4.3	5.2	10.8	7.6

a. Determine las cuatro tasas de movimiento trimestral usando el método de razón a promedio móvil.
b. Interprete el patrón estacional.

AJUSTE DE LOS DATOS DE VENTAS ESTACIONALES

Un conjunto de índices estacionales es muy útil para ajustar las fluctuaciones estacionales de una serie de ventas. La serie resultante se llama *ventas sin datos de estación* o *ventas con datos ajustados.* La razón para ajustar las series de ventas es eliminar las fluctuaciones estacionales a fin de estudiar la tendencia y el ciclo. Para ilustrar el procedimiento, las ventas de Truetts, una tienda de ropa para dama, en 1988 y para los primeros seis meses de 1989 se muestra en la primera columna de la tabla 19-12. Obsérvese que es muy difícil determinar cuándo han aumentado o disminuido las ventas reales debido a la variación de un mes a otro.

A fin de eliminar el efecto de la variación estacional, las ventas de cada mes (que contienen las variaciones de tendencia, cíclica, irregular y estacional) se dividen entre el índice estacional para ese mes, esto es, $TECI/E = TCI$. Los índices estacionales actúan en la misma forma que el deflacionador o deflactor utilizado en el capítulo 18. Por lógica, los datos ya ajustados contienen sólo componentes de tendencia, ciclo e irregularidad. La componente estacional se ha eliminado al dividir.

Por ejemplo, las ventas reales en enero de 1988 fueron de $160 000. El índice estacional para ese mes es 80.0, lo que indica que las ventas para tal mes son por lo general 20% inferiores al promedio del año. Al dividir las ventas reales de $160 000 entre el índice estacional de 80.0 (y multiplicar el cociente por 100), se determinan las ventas ajustadas sin datos estacionales como en $200 000.

TABLA 19-12

Ventas y valores estacionales para la firma Truetts

	Ventas (en miles) (TECI)	*Indice (E)*	*Ventas estacionales (en miles)* $\frac{TECI}{E} = TCI$
1988			
Enero	$160	80.0	$200
Febrero	183	92.0	199
Marzo	195	99.1	197
Abril	198	101.2	196
Mayo	201	103.8	194
Junio	191	99.0	193
Julio	187	97.0	193
Agosto	174	91.2	191
Septiembre	193	101.6	190
Octubre	196	103.8	189
Noviembre	197	104.7	188
Diciembre	234	126.6	185
1989			
Enero	146	80.0	183
Febrero	167	92.0	182
Marzo	179	99.1	181
Abril	182	101.2	180
Mayo	187	103.8	180
Junio	177	99.0	179

RESUMEN

El *análisis de series de tiempo* trata de la descripción de las tendencias pasadas y la estimación de valores futuros con base en datos anteriores. Una serie de tiempo puede incluir *tendencias seculares* y *variaciones estacionales, cíclicas* e *irregulares.* En este capítulo se hace hincapié en la descripción de la tendencia secular y la variación estacional. Si los datos pasados se aproximan a una línea recta, la ecuación a usar es $Y' = a + bX$, donde a es la ordenada de intersección con el eje Y, y b es la pendiente de la recta.

Si la información aparenta seguir una curva, es evidente que la serie está cambiando en porcentajes iguales. En aquellos ejemplos se aplicó la ecuación de tendencia logarítmica, $\log Y' = \log a + \log b(x)$.

La variación estacional se refiere a la variación de ventas, producción, empleo, etc., dentro del periodo de un año. Esto es bastante común en muchos casos, especialmente en el comercio al mayoreo y al menudeo. Los moteles, diversiones y manufacturas de artículos de temporada, como trajes de baño, también tienen altas y bajas estacionales.

Se presentaron dos métodos para aislar el patrón estacional. Un método simple que usa promedios, sólo necesita que se determine un promedio para todos los valores de enero, todos los valores de febrero, y así sucesivamente. Este procedimiento da resultados satisfactorios si los datos no manifiestan una marcada tendencia ascendente o descendente. Un método de uso más común se conoce como método de *razón a promedio móvil.*

Recapitulación

I. Análisis de series de tiempo.
   A. Su objetivo es hacer pronósticos a largo plazo y analizar las tendencias pasadas.
   B. Componentes de una serie de tiempo:
      1. Tendencia.
      2. Estacional
      3. Cíclica.
      4. Irregular.

II. Las tendencias en series de ventas y otras con frecuencia se aproximan a una línea recta. La ecuación de una recta es:

$$Y' = a + bX$$

donde:

- a es la ordenada de intersección de la recta con el eje Y; esto es, el valor estimado de Y cuando $X = 0$.
- b es la pendiente de la recta, o sea, el cambio promedio en Y' para cada cambio de una unidad en X.
- X es cualquier valor de X (tiempo) seleccionado.

III. El método de mínimos cuadrados para determinar la ecuación lineal se usa cuando se necesita la recta de mejor ajuste.
   A. Un método de cálculo implica resolver dos ecuaciones simultáneas. Estas son:

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

   B. Otro método se denomina método codificado. El periodo central es el origen. Para obtener a y b:

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} \qquad b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2}$$

IV. Promedio móvil.
   A. Su objetivo es alisar las fluctuaciones no deseadas.
   B. El procedimiento consiste en reemplazar las ventas reales, producción, etc., con un promedio móvil de tres o de cinco años.

V. Tendencias no lineales.
   A. La ecuación logarítmica lineal debe usarse para pronósticos cuando las series de tiempo aumentan en cantidades crecientes, esto es, aumentan en porcentajes iguales. Para la recta logarítmica: $\log Y' = \log a + \log b(x)$.

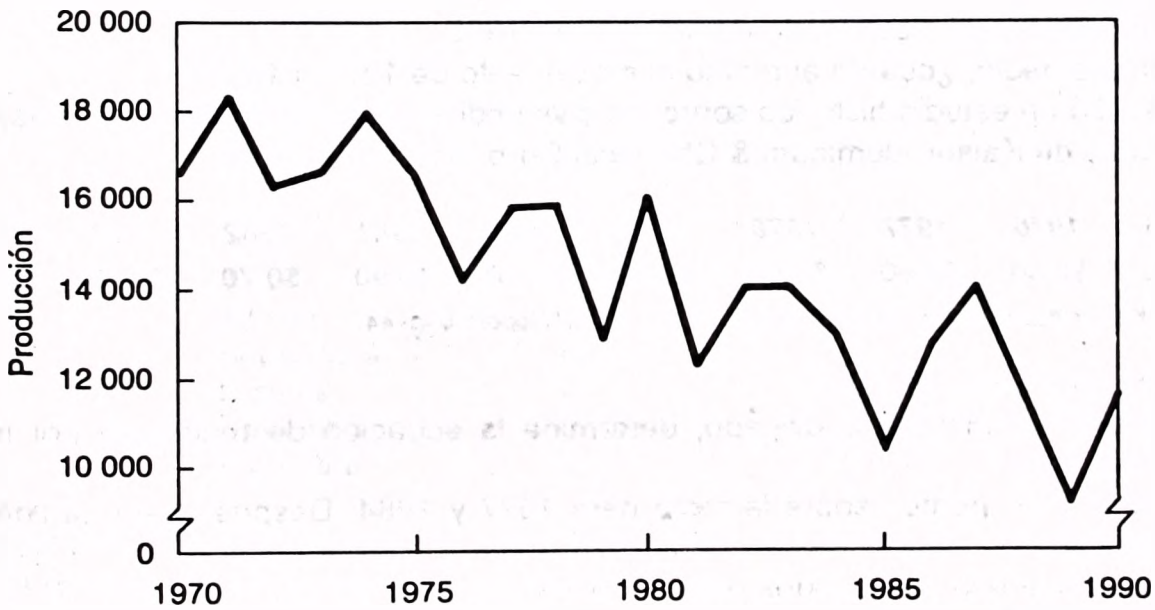
$$\log a = \frac{\Sigma \log Y}{n} \qquad \log b = \frac{\Sigma(x \log Y)}{\Sigma x^2}$$

VI. Análisis estacional.
   A. Motivos para desarrollar un patrón estacional.
      1. *Identificar las fluctuaciones estacionales* para la mejor planeación de producción y ventas.
      2. *Eliminar las fluctuaciones estacionales,* si es posible. El resultado puede ser un uso más económico de la mano de obra.
      3. *Ayudar en la evaluación de las tendencias actuales* por medio del ajuste estacional de las series de ventas, producción u otras series de tiempo.
      4. *Descubrir posibles cambios* del patrón estacional en años recientes.
      5. *Detectar posibles cambios* en el ciclo de negocios.
   B. Método del promedio para determinar los índices estacionales.
      1. *Ventajas:* aproximación rápida del patrón estacional, con un número mínimo de cálculos.
      2. *Desventajas:* si la tendencia en las ventas o en otras series es ascendente o descendente, los últimos años tienen ponderación desproporcionada. También, un valor irregular afecta indebidamente a un índice mensual.
   C. Método de razón a promedio móvil.
      1. *Ventajas:* es el método de uso más común para eliminar las componentes de tendencia (T), cíclica (C) e irregular (I) de la serie de tiempo original. Está incorporado en muchos programas de computación.
      2. *Desventajas:* necesita de más tiempo que el método del promedio.

EJERCICIOS

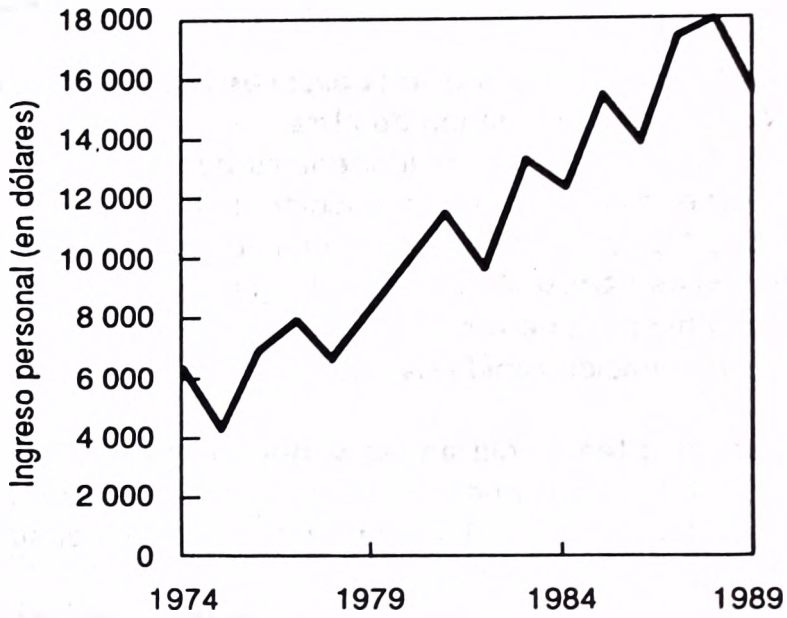
Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

9. a. Estime la ecuación lineal para la serie de producción siguiente, trazando una recta a través de los datos. Use 1970 como origen.
   b. ¿Cuál fue la disminución anual promedio en la producción?
   c. Con base en la ecuación de la tendencia, ¿cuál es el pronóstico para 1995?



10. a. Estime la ecuación de tendencia para la serie de ingreso personal siguiente. Use 1974 como el origen o año 0.

b. ¿Cuál es el aumento anual promedio en el ingreso personal?



11. El movimiento (o renovación) de activos, excluyendo el efectivo y las inversiones a corto plazo en la empresa NCR en el periodo de 1977-87 es:

1977	*1978*	*1979*	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*
1.11	1.28	1.17	1.10	1.06	1.14	1.24	1.33	1.38	1.50	1.65

Fuente: NCR, 1987 *Annual Report*. págs. 6-7.

a. Grafique los datos.
b. Utilizando el método codificado, determine la ecuación de tendencia por mínimos cuadrados.
c. Calcule los puntos sobre la recta para 1980 y 1986. Después trace la línea en la gráfica.
d. Pronostique el movimiento de activo para 1992.
e. En promedio, ¿cuánto aumentó el movimiento de 1977 a 1987?

12. Se realizó un estudio histórico sobre los dividendos en las acciones preferidas y preferenciales de Kaiser Aluminum & Chemical Corp. de 1975 a 1984.

1975	*1976*	*1977*	*1978*	*1979*	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*
$2.90	$2.80	$2.60	$2.60	$2.40	$1.80	$0.90	$0.70	$0.70	$1.40

Fuente: Kaiser Aluminum & Chemical Corp., 1984 *Annual Report*, pág. 44.

a. Grafique los dividendos.
b. Usando el método codificado, determine la ecuación de tendencia por mínimos cuadrados.
c. Calcule los puntos sobre la recta para 1977 y 1984. Después trace la línea en la gráfica.
d. Pronostique los dividendos para 1989.
e. En promedio, ¿cuánto aumentaron o disminuyeron los dividendos de 1975 a 1984?

13. Las ventas de papel y productos de papel (en millones de dólares) de Boise Cascade desde 1977 son:

1977	*1978*	*1979*	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*
841	829	1 042	1 256	1 405	1 314	1 412	1 660	1 874	1 853	2 156

Fuente: Boise Cascade Corp., 1987 *Annual Report*, pág. 1.

a. Grafique los datos.
b. Empleando el método codificado, determine las ecuaciones de tendencia por mínimos cuadrados.
c. Calcule los puntos sobre la recta para 1979 y 1985. Después trace la línea en la gráfica.
d. En promedio, ¿cuánto aumentó el volumen de ventas por año, durante el periodo 1975–89?
e. Pronostique las ventas para 1992.

14. Las ventas de productos para la construcción de Boise Cascade desde 1977 (en millones de dólares) son:

1977	*1978*	*1979*	*1980*	*1981*	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*
1 114	1 288	1 360	1 250	1 084	921	1 268	1 278	957	986	1 030

Fuente: Boise Cascade Corp., 1987 *Annual Report*. pág. 1.

a. Grafique los datos.
b. Usando el método codificado, determine la ecuación de tendencia por mínimos cuadrados.
c. Calcule los puntos sobre la recta para 1978 y 1984. Después trace la línea en la gráfica.
d. Pronostique las ventas para 1993.
e. ¿Cuál es el aumento (o disminución) anual promedio en las ventas de 1977 a 1987?

15. La producción de Reliable Manufacturing Company en 1985 y parte de 1986 es la siguiente:

Mes	*1985 producción (en miles)*	*1986 producción (en miles)*
Enero	6	7
Febrero	7	9
Marzo	12	14
Abril	8	9
Mayo	4	5
Junio	3	4
Julio	3	4
Agosto	5	
Septiembre	14	
Octubre	6	
Noviembre	7	
Diciembre	6	

a. Utilizando el método de razón a promedio móvil, determine los datos estacionales específicos para julio, agosto y septiembre de 1985.
b. Suponga que los índices estacionales específicos de la tabla siguiente son correctos. Inserte en la tabla los datos estacionales específicos que calculó en la parte *a* para julio, agosto y septiembre de 1985, y determine los 12 índices estacionales.

Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1985							?	?	?	92.1	106.5	92.9
1986	88.9	102.9	178.9	118.2	60.1	43.1	44.0	74.0	200.9	90.0	101.9	90.9
1987	87.6	103.7	170.2	125.9	59.4	48.6	44.2	77.2	196.5	89.6	113.2	80.6
1988	79.8	105.6	165.8	124.7	62.1	41.7	48.2	72.1	203.6	80.2	103.0	94.2
1989	89.0	112.1	182.9	115.1	57.6	56.9						

c. Interprete el índice estacional.

16. Las ventas de Andre's Boutique en 1985 y parte de 1986 son:

Mes	*1985 ventas (en miles de dólares)*	*1986 ventas (en miles de dólares)*
Enero	$ 78	$ 65
Febrero	72	60
Marzo	80	72
Abril	110	97
Mayo	92	86
Junio	86	72
Julio	81	65
Agosto	85	61
Septiembre	90	75
Octubre	98	
Noviembre	115	
Diciembre	130	

a. Empleando el método de razón a promedio móvil, determine los datos estacionales específicos para julio, agosto, septiembre y octubre de 1985.

b. Suponga que los datos estacionales específicos de la tabla siguiente son correctos. Inserte en la tabla los datos estacionales específicos que calculó en la parte *a* para julio, agosto, septiembre y octubre de 1985 y determine los 12 índices estacionales.

Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1985							?	?	?	?	123.6	150.9
1986	83.9	77.6	86.1	118.7	99.7	92.0	87.0	91.4	97.3	105.4	124.9	140.1
1987	86.7	72.9	86.2	121.3	96.6	92.0	85.5	93.6	98.2	103.2	126.1	141.7
1988	85.6	65.8	89.2	125.6	99.6	94.4	88.9	90.2	100.2	102.7	121.6	139.6
1989	77.3	81.2	85.8	115.7	100.3	89.7						

c. Interprete el índice estacional.

17. Las ventas de aluminio, por trimestre, desde 1983 se muestran a continuación (en millones de dólares).

	Trimestre			
Año	*I*	*II*	*III*	*IV*
1983	210	180	60	246
1984	214	216	82	230
1985	246	228	91	280
1986	258	250	113	298
1987	279	267	116	304
1988	302	290	114	310
1989	321	291	—	—

Empleando el método de razón a promedio móvil:
a. Determine los cuatro índices trimestrales.
b. Interprete el patrón trimestral de ventas.

18. A continuación se muestran las ventas (en millones de dólares) realizadas por una cadena de tiendas de ropa para niños y caballeros en Estados Unidos en el periodo de 1985–89.

Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1985	47	41	47	54	50	52	46	49	48	54	67	108
1986	48	42	58	53	54	56	50	55	55	60	76	129
1987	56	46	56	58	58	61	55	61	57	62	75	124
1988	60	53	61	64	69	71	63	76	68	78	90	144
1989	63											

Usando el método de razón a promedio móvil:
a. Determine los 12 índices estacionales.
b. Interprete el patrón estacional de ventas.

19. Las siguientes son las ventas (en millones de dólares) de una gran cadena de almacenes de departamentos en Estados Unidos: Kardon, Ltd., para el periodo 1985–89.

Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1985	91	95	101	106	106	108	113	106	102	106	110	158
1986	93	92	103	101	108	113	118	116	114	112	119	167
1987	106	103	114	111	119	132	134	135	128	127	136	195
1988	129	125	130	129	142	137	142	145	130	137	143	196
1989	131	126	140	136	150	147	147	144				

Usando el método de razón a promedio móvil:
a. Determine los 12 índices estacionales.
b. Interprete el patrón estacional de ventas.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Se muestra el siguiente registro de inscripciones en The University of Toledo desde 1967 hasta 1987. Obtenga las ecuaciones de tendencias lineal y logarítmica. Estime el registro de inscripciones para 1990 usando ambas ecuaciones. ¿Qué ecuación de tendencia recomendaría? ¿Por qué?

Año	*Alumnos inscritos*	*Año*	*Alumnos inscritos*
1967	12 755	1978	17 257
1968	13 501	1979	18 246
1969	14 489	1980	20 270
1970	15 158	1981	21 117
1971	14 903	1982	21 386
1972	14 669	1983	21 589
1973	14 343	1984	21 039
1974	15 730	1985	21 238
1975	17 109	1986	21 176
1976	17 204	1987	21 740
1977	17 498		

2. Ray Anderson, el propietario de Anderson Ski Lodge en el estado de Nueva York, tiene interés en el pronóstico del número de visitantes para el año entrante. Están disponibles los datos siguientes por trimestre desde 1983. Determine un índice estacional para cada trimestre. ¿Cuántos visitantes se esperarían para cada trimestre de 1990, si el propietario proyecta que habrá un 10% de aumento respecto al número total de visitantes en 1989?

Año	*Trimestre*	*Visitantes*	*Año*	*Trimestre*	*Visitantes*
1983	I	86	1987	I	188
	II	62		II	172
	III	28		III	128
	IV	94		IV	198
1984	I	106	1988	I	208
	II	82		II	202
	III	48		III	154
	IV	114		IV	220
1985	I	140	1989	I	246
	II	120		II	240
	III	82		III	190
	IV	154		IV	252
1986	I	162			
	II	140			
	III	100			
	IV	174			

3. El registro de inscripciones en The University of Toledo, College of Law, por trimestre, desde 1985 es:

	Trimestre			
Año	*Invierno*	*Primavera*	*Verano*	*Otoño*
1985	2 033	1 871	714	2 318
1986	2 174	2 069	840	2 413
1987	2 370	2 254	927	2 704
1988	2 625	2 478	1 136	3 001
1989	2 803	2 668	—	—

Utilizando el método de razón a promedio móvil:

a. Determine los cuatro índices estacionales.
b. Interprete el patrón trimestral de inscritos.

EXAMEN CAPITULO 19

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Las preguntas 1-3 se basan en el problema siguiente: una gran empresa manufacturera recolectó datos sobre el número de días -trabajador perdidos durante el año. Los resultados obtenidos fueron:

Año	Días-trabajador perdidos (en miles)	Año	Días-trabajador perdidos (en miles)
1980	3	1985	10
1981	6	1986	9
1982	4	1987	11
1983	5	1988	10
1984	8	1989	14

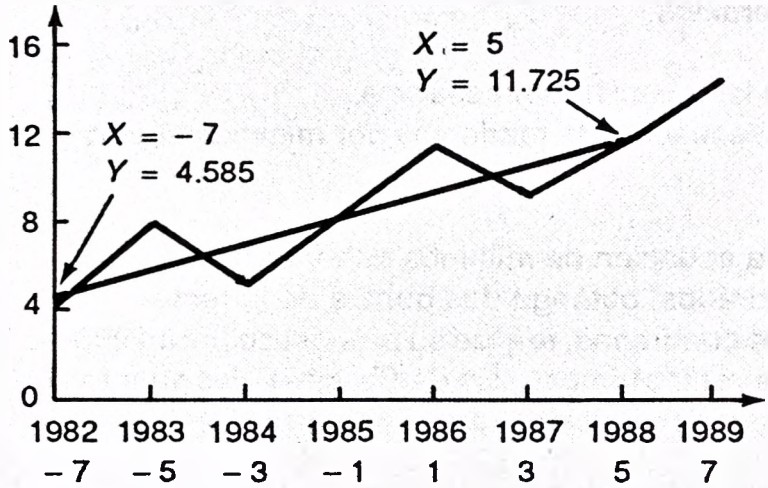
1. a. Grafique los datos de días-trabajador perdidos.
   b. Trace una recta a través de los datos.
   c. Utilizando 1980 como el origen, estime la ecuación de tendencia.
2. Considérese la serie anterior. Determine la ecuación de tendencia por mínimos cuadrados utilizando el método codificado.
3. En relación con la pregunta 2:
   a. Interprete el significado del valor *b* en la ecuación de mínimos cuadrados.
   b. Aplicando la ecuación de mínimos cuadrados, obtenga dos puntos de la recta.
   c. Utilizando la citada ecuación de mínimos cuadrados, realice su pronóstico para 1995.
4. Una empresa industrial está analizando sus ventas trimestrales de "Toughie", los guantes más durables que fabrica. El número de pares producidos (en miles) por trimestre es;

	Trimestre			
	I	*II*	*III*	*IV*
Año	*Ene.–Mar.*	*Abr.–Jun.*	*Jul.–Sep.*	*Oct.–Dic.*
1984	142	312	488	208
1985	146	318	512	212
1986	160	330	602	187
1987	158	338	572	176
1988	162	380	563	200
1989	162	362	587	205

   a. Usando el método del promedio, determine los índices trimestrales.
   b. Aplicando el método de razón a promedio móvil, determine los cuatro índices trimestrales.
   c. Interprete el patrón trimestral de ventas.
   d. Compare los índices trimestrales calculados en las partes *a* y *b*.

Autoexámenes

19-1 1.



2. $Y' = a + bx = 8.75 + 0.595x$ (en miles)

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{70}{8} = 8.75$$

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} = \frac{100}{168} = 0.595$$

3. Para 1982

$$Y' = 8.75 + 0.595\,(-7) = 4.585$$

Para 1988:

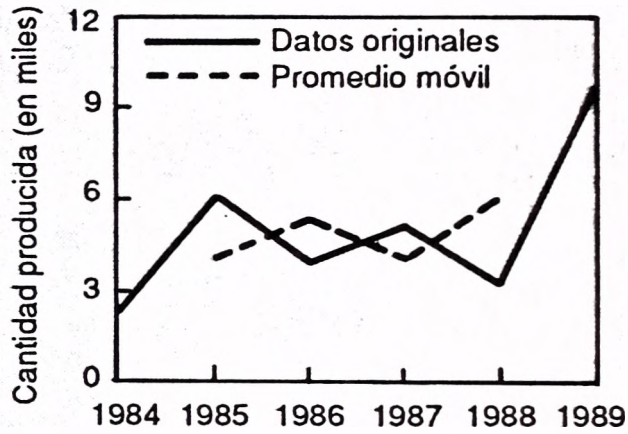
$$Y' = 8.75 + 0.595\,(5) = 11.725$$

4. Para 1994, $x = 17$. Entonces $Y' = 8.75 + 0.595(17) = 18.865$, o sea, 18 865 sillas mecedoras.

19-2 1.

Año	*Producción en (miles)*	*Total móvil de tres años*	*Promedio móvil de tres años*
1984	2	—	—
1985	6	12	4
1986	4	15	5
1987	5	12	4
1988	3	18	6
1989	10	—	—

2.



3. Comentario: el promedio móvil de tres años no da un buen ajuste. Debe buscarse una línea de mejor ajuste.

19-3 1. $\log Y' = 1.4292 + 0.4094x$.

2. 157% [El antilogaritmo de b es aproximadamente 2.57. Se resta (1) del antilogaritmo de b.]
3. Aproximadamente \$69 millones (\$68.96 con calculadora de mano).
4. Aproximadamente \$7 684 millones, valor hallado por $Y' = 1.4292 + 0.4094(6)$. El antilogaritmo de 3.8856 está cercano a 7684.

Cálculo con tabla de logaritmos.

Año	*Y*	*log Y*	*x*	*x log Y*	x^2
1985	2.13	0.3284	− 2	− 0.6568	4
1986	18.10	1.2577	− 1	− 1.2577	1
1987	39.80	1.5999	0	0	0
1988	81.40	1.9106	1	1.9106	1
1989	112.00	2.0492	2	4.0984	4
		7.1458		+ 4.0945	10

$$a = \frac{\Sigma \log Y}{n} = \frac{7.1458}{5} = 1.4292$$

$$b = \frac{\Sigma(x \log Y)}{\Sigma x^2} = \frac{+\ 4.0945}{10} = +0.4094$$

19-4 1. Los valores siguientes se tomaron del paquete Hall & Adelman. Debido al redondeo, las cifras pueden ser un poco diferentes.

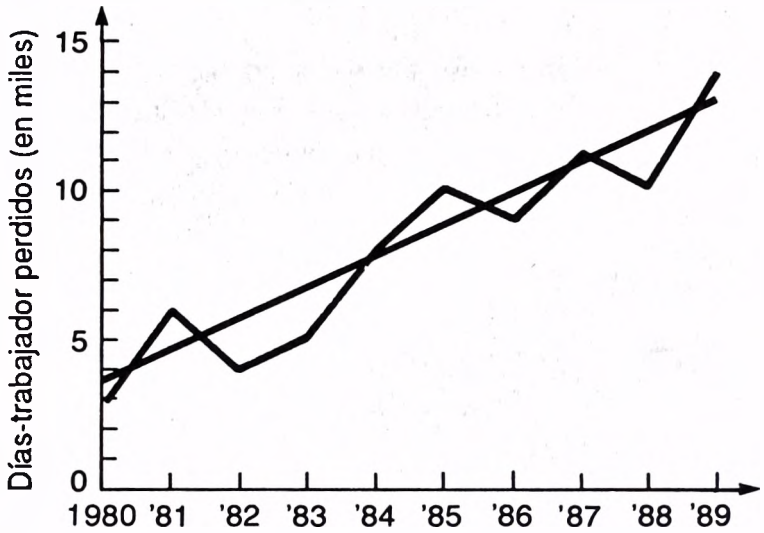
	Invierno	*Primavera*	*Verano*	*Otoño*
Media	119.35	81.66	125.31	74.24
Estacional	119.35	81.66	125.31	74.24

No es necesaria la corrección.

2. Total de ventas en Teton Village para la estación de invierno, en forma están 19.35% arriba del promedio anual.

Examen capítulo 19

1. a, y b.



c. La recta que se obtenga puede no ser exactamente igual a la trazada a través de los datos. La recta de la figura pasa a través de los puntos (1980, 3.5) y (1989, 13.0). Los días-trabajador perdidos aumentan de 3.5 a 13.0, el aumento es de 9.5 en nueve años. De 9.5/9 se encuentra que $b = 1.056$. Si se toma 1980 como origen (o año 0), se tiene que $a = 3.5$. En consecuencia, la ecuación es $Y' = a + bX = 3.5 + 1.056X$, donde los días-trabajador perdidos están en miles, el origen es 1980 y X aumenta una unidad cada año.

2. La ecuación que emplea el método codificado es $Y' = a + bx = 8.000 + 0.533x$. Los cálculos son:

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} = \frac{176}{330} = 0.533$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{80}{10} = 8$$

$$Y' = a + bx = 8 + 0.533x$$

3. a. El valor de b de 0.533 significa que, en promedio, la pérdida de días-trabajador aumenta en 533 cada seis meses (o 1 066 cada año).

b. Todos los puntos son:

Año	*Y' (en miles)*	*Año*	*Y' (en miles)*
1980	3.203	1985	8.533
1981	4.269	1986	9.599
1982	5.335	1987	10.665
1983	6.401	1988	11.731
1984	7.467	1989	12.797

c. 1995 = año + 21. Entonces $Y' = 19.193$, obtenido por: $8 + 0.533(21)$.

4. a.

	Trimestre				
	I	*II*	*III*	*IV*	*Total*
Total	930	2 040	3 324	1 188	7 482
Promedio	155	340	554	198	1 247
Indice	49.7*	109.1	177.7	63.5	400.0

* (155/311.75) 100 = 49.7

La producción media trimestral es 311.75, obtenida de 1 247/4.

b. Usando el programa de computadora de Hall & Adelman, los índices estacionales son:

1984	—	1987	0.4976
	—		1.0820
	1.6944		1.8320
	0.7191		0.5548
1985	0.4983	1988	0.5041
	1.0725		1.1756
	1.7138		1.7257
	0.7020		0.6173
1986	0.5083	1989	0.4988
	1.0221		1.1024
	1.8842		—
	0.5839		—

Los datos estacionales son:

Trimestre	*Componente SI promedio*	*Indices etacional típico*
1	0.5014	0.5027
2	1.0909	1.0936
3	1.7709	1.7753
4	0.6354	0.6370

c. La producción en el tercer trimestre (julio a septiembre) es aproximadamente 78% superior al promedio anual de 100. Hay dos trimestres con producción baja, el primero y el cuarto. Están cerca de 50% y 36%, respectivamente, abajo del promedio anual.
d. Los dos métodos dan casi los mismos índices trimestrales.

20

Introducción a la toma de decisiones bajo incertidumbre

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Definir términos como *estado de la naturaleza, evento, acto* y *ganancia.*
2. Organizar una tabla de ganancias.
3. Determinar la ganancia esperada de un acto.
4. Calcular la pérdida de oportunidad y la pérdida esperada de oportunidad.
5. Evaluar el valor de la información perfecta.

A principios de la década de 1950 se desarrolló con rapidez una nueva rama de la Estadística llamada *teoría estadística de la decisión.* También se usa el término *estadística bayesiana* para denominar esta rama de la Estadística. Se le da este nombre en honor del reverendo Thomas Bayes por su trabajo realizado en el siglo XVIII. Como el nombre señala, el enfoque principal de la teoría estadística de la decisión es en el proceso de tomar decisiones. En contraste, la Estadística clásica se enfoca a estimar un parámetro, como la población media, la elaboración de intervalos de confianza o la prueba de hipótesis.

La teoría estadística de la decisión se ocupa en determinar cuál decisión, de un conjunto posible de ellas, es la óptima para un conjunto particular de condiciones. Considérense los siguientes ejemplos de aplicación de tal teoría a la resolución de problemas.

- La Ford Motor Company debe tomar una decisión acerca de la conveniencia de comprar cerraduras ensambladas para las puertas del modelo Ford Escort, o fabricar y ensamblar las partes en su planta de Sandusky, Ohio. Si las ventas del Escort continúan en aumento, habrá más ganancias si se fabrican y ensamblan las partes. Si las ventas se mantienen al nivel actual o disminuyen, habrá más ganancias si se compran las cerraduras ya armadas. ¿Qué decisión debe tomarse?

- La empresa Haggar, fabricante de ropa informal (slacks) acaba de fabricar un nuevo pantalón de lana que tiene mucha aceptación en las regiones de clima frío. A tal empresa le gustaría comprar tiempo de televisión comercial durante los próximos juegos del Super Bowl. Si los dos equipos que participan provienen de las regiones templadas del país, Haggar estima que sólo una proporción pequeña de los espectadores se interesaría en su ropa. Sin embargo, un encuentro entre los Cleveland Browns y los Chicago Bears podría atraer a una gran proporción de espectadores que sí usan esa ropa de lana. ¿Qué decisión debe tomar Haggar?

- La empresa General Electric considera tres opciones respecto a los precios de los refrigeradores para el año próximo. Esta compañía puede 1) subir los precios 5%, 2) elevar los precios 2.5%, o 3) dejar los precios como están. La decisión final se basará en las estimaciones de ventas y en el conocimiento que la GE tenga de lo que puedan hacer otros fabricantes de refrigeradores.

En cada uno de estos casos obsérvese que la decisión se caracterizó por varias posibilidades de acción y diversos factores que no están bajo el control de quien toma la decisión. Por ejemplo, Haggar no tiene control sobre cuáles serán los equipos que lograrán llegar al Super Bowl. Estos casos caracterizan la naturaleza de la toma de decisiones. Pueden enlistarse las alternativas posibles de decisión, determinarse los posibles eventos futuros, y aun establecerse probabilidades, pero las decisiones se toman en condiciones de incertidumbre.

ELEMENTOS DE UNA DECISION

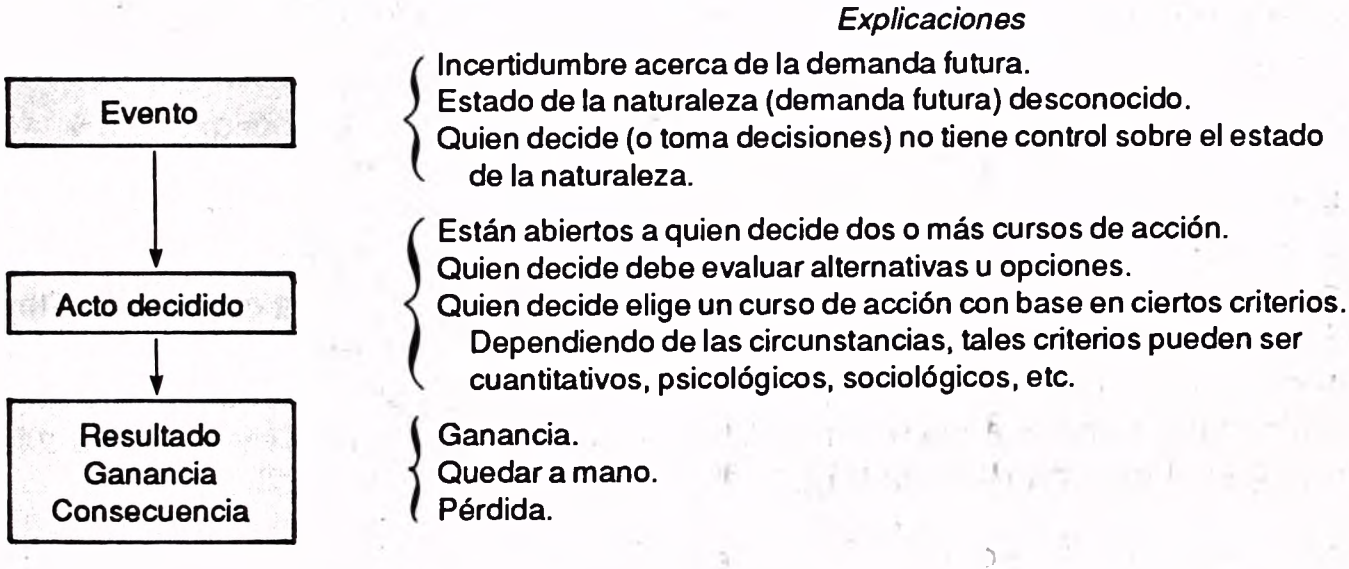
En cualquier caso de toma de decisiones existen tres componentes: 1) las opciones o alternativas disponibles; 2) los estados de la naturaleza, los cuales no están bajo el control de quien toma la decisión; y 3) las ganancias. Estos conceptos se explicarán en los párrafos siguientes.

Las opciones o **alternativas** son las elecciones disponibles para quien ha de tomar la decisión. Ford puede decidir fabricar y ensamblar las cerraduras de puertas en Sandusky, o bien decidir comprarlas. Para simplificar esta presentación, se supone que quien tomará la decisión puede seleccionar entre un número pequeño de posibles resultados. Sin embargo, con la ayuda de computadoras, las opciones de decisión pueden ampliarse a un gran número de posibilidades.

Los **estados de la naturaleza** son eventos futuros incontrolables. El estado de la naturaleza que en realidad ocurre, está fuera del control de quien toma la decisión. Ford no sabe si la demanda por los Escort se mantendrá alta. Haggar no puede determinar si jugarán en el Super Bowl equipos de futbol americano provenientes de regiones de clima templado o frío.

Se necesita una **ganancia** para cada combinación de alternativas de decisión y estado de la naturaleza. Ford puede estimar que si ensambla las cerraduras de puerta en su planta de Sandusky y la demanda de los Escort es baja, la ganancia sería de $40 000 (dólares). A la inversa, si compra las cerraduras ensambladas y la demanda es alta, la ganancia estimada sería $22 000.

Los elementos principales en el problema de toma de decisión en condiciones de incertidumbre se identifican en forma esquemática como:



En muchos casos pueden tomarse mejores decisiones si se asignan probabilidades a los diversos estados de la naturaleza. Estas probabilidades pueden basarse en información histórica o en el resultado de estimaciones subjetivas. Ford puede estimar la probabilidad de que continúe la demanda alta en 0.70. GE puede estimar una probabilidad de 0.25 de que Sears y otros fabricantes eleven los precios de los refrigeradores.

UN CASO ACERCA DE LA TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Desde el principio se aclara que en la descripción de este caso se incluyen sólo los conceptos fundamentales que se encuentran en un problema de toma de decisión. El propósito de examinar este caso es la explicación del procedimiento lógico que puede seguirse en los problemas más sencillos. En la mayoría de los problemas en el mundo real, habrá que considerar otras muchas variables.

El primer paso es establecer una tabla de ganancias.

Tabla de ganancias

Roberto Hill, un inversionista modesto, tiene $1 100 (dólares) disponibles para inversión. Ha estudiado el rendimiento de varios valores comunes en el mercado, y reducido las selecciones convenientes a tres, que son Kayser Chemicals, Rim Homes y Texas Electronics. Estima que si invierte sus $1 100 en Kayser Chemicals y si el mercado de valores va a la alza a fin de año (esto es, si los precios de los valores en la bolsa van a la alza en forma notable), el valor de su inversión subiría a más del doble, a $2 400. Sin embargo, si los valores en la bolsa van a la baja, su inversión en valores Kayser posiblemente disminuirá a $1 000 a fin de año. Sus predicciones respecto al valor de sus $1 100 a invertir para los tres valores en un mercado a la alza y un mercado a la baja se muestran en la tabla 20-1, que es una **tabla de ganancias.**

TABLA 20-1

Ganancias para tres clases de acciones comunes según dos condiciones del mercado

Compra	*Mercado a la alza* S_1	*Mercado a la baja.* S_2
Kayser Chemicals (A_1)	$2 400	$1 000
Rim Homes (A_2)	2 200	1 100
Texas Electronics (A_3)	1 900	1 150

Las diversas elecciones posibles se llaman **opciones de decisión.** En este problema hay tres. Sean A_1 la compra en Kayser Chemicals, A_2 la compra en Rim Homes y A_3 la compra en Texas Electronics. Ya sea que el mercado vaya a la alza o a la baja, el mercado no está bajo el control del Sr. Hill. Estos eventos futuros sin control son los estados de la naturaleza. Sea S_1 el caso de que el mercado va a la alza, y S_2 si el mercado va a la baja.*

Ganancias esperadas

Si la tabla de ganancias esperadas es la única información disponible, el inversionista puede tomar una acción conservadora y comprar Texas Electronics con

* **(N. del R.)** El mercado a la alza se denomina en inglés, curiosamente, como bull market (o sea, "mercado toro"; el mercado a la baja recibe también la denominación pintoresca de bear market, es decir "mercado oso").

objeto de asegurar cuando menos $1 150 al final del año (una ligera ganancia). Sin embargo, una especulación aventurada, sería comprar Kayser Chemicals con posibilidad de más que duplicar la inversión de $1 100.

Cualquier decisión, respecto a la compra de acciones hecha con la sola base de la informacion en la tabla de ganancias esperadas, no tomaría en cuenta los valiosos registros históricos mantenidos por Moody's, Value Line y otros servicios de asesoría en inversiones relativas a los movimientos de los precios de acciones comunes en largos periodos. Un estudio de esos registros, por ejemplo, revelaría que durante los últimos 10 años los precios en el mercado de valores comunes aumentaron seis veces y bajaron sólo cuatro. Por tanto, puede decirse que la probabilidad de alza en el mercado es de 0.60 y la probabilidad de baja es de 0.40.

Si se supone que esas frecuencias históricas son representativas en alguna forma, puede verse que la tabla de ganancias esperadas y las estimaciones de las probabilidades (0.60 y 0.40) se pueden combinar para determinar la *ganancia esperada* en la compra de una de las tres acciones comunes. La ganancia esperada también se llama *valor monetario esperado,* abreviado como EMV (de expected monetary value). Los cálculos necesarios para determinar la ganancia esperada se muestran en la tabla 20-2.

TABLA 20-2

Ganancia esperada por el acto de comprar acciones de Kayser Chemicals, EMV(A_1)

Estado de la naturaleza	*Ganancia*	*Probabilidad del estado de la naturaleza*	*Valor esperado*
Mercado a la alza	$2 400	0.60	$1 440
Mercado a la baja	1 000	0.40	400
			$1 840

Para explicar un cálculo, obsérvese que si el inversionista ha comprado en Kayser Chemicals y bajan los precios en el mercado, el valor monetario de la acción común sería sólo $1 000 al final del año (de la tabla 20-1). Sin embargo, la experiencia muestra que este evento (una baja del mercado) ocurre sólo el 40% de las veces. En consecuencia, a largo plazo una baja del mercado puede contribuir en $400 a la ganancia total esperada de las acciones comunes, obtenido por medio de $1 000 × 0.40. La adición de $400 a los $1 440 esperados en las condiciones de alza del mercado da $1 840, la ganancia esperada total a largo plazo.

Esos cálculos se resumen como sigue:

$$\text{EMV}(A_i) = \Sigma P(S_j) \cdot V(A_i, S_j)$$

donde

EMV*(Ai)* se refiere al valor esperado de las diversas opciones de decisión. Son posibles muchas decisiones. La primera se denota por 1, la segunda por 2, y así sucesivamente. La letra *i* minúscula representa el conjunto completo de decisiones.

$P(S_j)$ se refiere a la probabilidad de diversos estados de la naturaleza que pueden suceder en número ilimitado, de modo que j indica diversos resultados posibles.

$V(A_i, S_j)$ se refiere al valor de diversas ganancias esperadas. Obsérvese que cada ganancia esperada es el resultado de una combinación de opción de decisión y un estado de la naturaleza.

EMV(A_1) valor monetario esperado para la alternativa de comprar acciones de Kayser Chemicals, se calcula por:

$$\begin{aligned} \text{EMV}(A_1) &= P(S_1) \cdot V(A_1, S_1) + P(S_2) \cdot V(A_1, S_2) \\ &= 0.60(\$2\,400) + 0.40(\$1\,000) = \$1\,840 \end{aligned}$$

La compra de acciones de Kayser Chemicals es la única elección posible. La ganancia esperada a largo plazo por el acto de comprar Rim Homes y Texas Electronics se muestra en la tabla 20-3.

TABLA 20-3

Ganancia esperada para tres tipos de acciones

Compra	*Ganancia esperada*
Kayser Chemicals	$1 840
Rim Homes	1 760
Texas Electronics	1 600

Un análisis de las ganancias esperadas en la tabla anterior indica que la compra de acciones de Kayser Chemicals puede rendir la ganancia esperada más alta. Este resultado se basa en 1) la estimación del inversionista sobre el valor futuro de las acciones, y 2) la experiencia histórica con respecto a la alza y la baja de los precios de acciones comunes. Debe subrayarse que a pesar de que la compra de acciones de Kayser representa la mejor opción respecto al criterio del valor esperado, el inversionista puede decidir la compra de acciones de Texas Electronics con objeto de reducir el riesgo de perder parte de la inversión de $1 100.

AUTOEXAMEN 20-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Verifique la conclusión mostrada en la tabla 20-3, de que la ganancia esperada por el hecho de comprar Rim Homes es $1 760.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Se ha elaborado la siguiente tabla de ganancias esperadas. Calcule el valor esperado para cada una de las tres decisiones. Sean $P(S_1) = 0.30$, $P(S_2) = 0.50$ y $P(S_3) = 0.20$.

Calcule el valor monetario esperado para cada una de las tres opciones. ¿Qué decisión se recomienda?

	Estado de la naturaleza		
Opción	S_1	S_2	S_3
A_1	$50	$70	$100
A_2	90	40	80
A_3	70	60	90

2. La empresa Wilhelms Cola Company planea lanzar al mercado una nueva bebida con sabor de piña, el próximo verano. La decisión consiste en presentar el nuevo refresco en botellas retornables o no retornables. Actualmente la legislatura estatal está considerando la eliminación de las botellas no retornables. El presidente de esa compañía ha estudiado el problema con su representante ante el gobierno del estado, y estimado una probabilidad de 0.70 de que serán prohibidas las botellas no retornables. La tabla siguiente muestra las ganancias mensuales estimadas (en miles de dólares) si el refresco de piña se presenta en botellas retornables en comparación con las botellas no retornables. Por supuesto, si entra en vigor la ley y la decisión es presentar la bebida en botellas no retornables, todas las ganancias serían producto de ventas fuera del estado. Calcule la ganancia esperada para ambas decisiones de embotellado. ¿Cuál se recomendaría?

Opción	*La ley se aprueba* (S_1)	*La ley no se aprueba* (S_2)
Botella retornable	80	40
Botella no retornable	25	60

Pérdida de oportunidad

Otra forma de llegar a una decisión respecto a qué acciones se deben comprar es determinar la ganancia que pudiera perderse debido al estado exacto de la naturaleza (comportamiento del mercado) que no fuera conocido en el momento cuando el inversionista adquiere las acciones. La pérdida potencial se llama *pérdida de oportunidad* o *deploración*. Como ejemplo, supóngase que el inversionista ha comprado acciones de Rim Homes y ocurre una alza en el mercado. Además, supóngase que el valor de las acciones de Rim Homes ha subido de $1 100 a $2 200 como se había previsto. Pero si el inversionista hubiera comprado acciones de Kayser Chemicals y el valor subiera en el mercado, el valor de sus acciones de Kayser serían de $2 400 (de la tabla 20-1). En consecuencia, el inversionista perdería la ganancia extra de $200 al comprar las de Rim Homes en vez de las de Kayser Chemicals. Puesto en otra forma, los $200 representan la pérdida de oportunidad por no conocer el estado correcto de la naturaleza. Si los precios del mercado subieran, el inversionista *deploraría* por haber comprado las de Rim Homes. Sin embargo, si el inversionista hubiera comprado las de Kayser Chemicals y los precios del mercado subieran, no tendría qué deplorar, esto es, no habría pérdida de oportunidad.

Las pérdidas de oportunidad correspondientes a este ejemplo se muestran en la tabla 20-4. Cada cantidad (pérdida de oportunidad) es el resultado de una combinación específica de actos y de un estado de la naturaleza, esto es, compra de acciones y reacción del mercado.

Es evidente que las acciones de Kayser Chemicals serían una buena opción de inversión en un mercado a la alza, las de Texas Electronics serían lo mejor en un mercado a la baja y las de Rim Homes son, en cierta forma, un punto intermedio.

TABLA 20-4

Pérdidas de oportunidad debidas a diversas combinaciones de compras de acciones y movimientos del mercado

	Pérdida de oportunidad	
Compra	*Mercado a la alza*	*Mercado a la baja*
Kayser Chemicals	$ 0	$150
Rim Homes	200	50
Texas Electronics	500	0

AUTOEXAMEN 20-2

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Véase la tabla 20-4. Verifique que:

1. La pérdida de oportunidad por compra en Rim Homes dado un mercado a la baja es de $50.
2. La pérdida de oportunidad por compra en Texas Electronics dado un mercado a la alza es de $500.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

3. Con referencia al ejercicio 1, elabore una tabla de pérdida de oportunidad para cada decisión.
4. Con referencia al ejercicio 2, en relación con la Wilhelms Cola Company, elabore una tabla de pérdida de oportunidad y calcule la pérdida para cada decisión.

Pérdida esperada de oportunidad

Las pérdidas esperadas de oportunidad mostradas en la tabla 20-4 también ignoran la experiencia histórica de los movimientos del mercado. Recuérdese que la probabilidad de alza del mercado es de 0.60 y la de baja de 0.40. Las probabilidades y las pérdidas de oportunidad se combinan para determinar la *pérdida esperada de oportunidad*. Los cálculos básicos se muestran en la tabla 20-5 para la decisión de comprar acciones de Rim Homes. La pérdida esperada de oportunidad se encuentra que es $140.

Al interpretar la tabla se encuentra que la pérdida esperada de oportunidad significa que, a largo plazo, el inversionista perdería la oportunidad de obtener una ganancia adicional de $140 si decide comprar acciones de Rim Homes. Se incurriría en esta pérdida esperada porque el inversionista no pudo predecir la tendencia del mercado de valores. En un mercado a la alza puede ganar $200 adicionales al comprar acciones de Kayser Chemicals, pero en un mercado a la baja puede ganar $50 adicionales si compra acciones de Texas Electronics. Cuando se pondera la probabilidad del evento, la pérdida de oportunidad es $140.

TABLA 20-5

Pérdida de oportunidad debida al hecho de comprar acciones de Rim Homes

Estado de la naturaleza	*Pérdida de oportunidad*	*Probabilidad del estado de la naturaleza*	*Pérdida esperada de oportunidad*
Mercado a la alza, S_1	$200	0.60	$120
Mercado a la baja, S_2	50	0.40	20
			$140

Esos cálculos se resumen como sigue:

$$\text{EOL}(A_i) = P(S_j) \cdot R(A_i, S_j)$$

donde:

EOL(A_i) designa la pérdida esperada de oportunidad (EOL, de expected opportunity loss) para una alternativa de decisión particular.

$P(S_j)$ designa la probabilidad asociada a los diversos estados de la naturaleza.

$R(A_i, S_j)$ designa la deploración o pérdida por una combinación particular de estado de la naturaleza y alternativa de decisión.

EOL(A_2), la deploración o pérdida de oportunidad por no seleccionar las acciones de Rim Homes, se calcula en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\text{EOL}(A_2) &= P(S_1) \cdot R(A_2, S_1) + P(S_2) \cdot R(A_2, S_2)\\ &= 0.60(\$200) + 0.40(\$50) = \$140\end{aligned}$$

Las pérdidas esperadas de oportunidad para las tres opciones de decisión se muestran en la tabla 20-6. La pérdida esperada de oportunidad más baja es $60, lo cual significa que el inversionista experimentaría la menor deploración a largo plazo si compra acciones de Kayser Chemicals.

TABLA 20-6

Pérdidas esperadas de oportunidad para las tres clases de acciones

Compra	*Pérdida esperada de oportunidad*
Kayser Chemicals	$ 60
Rim Homes	140
Texas Electronics	300

Incidentalmente, obsérvese que la decisión de comprar acciones de Kayser Chemicals se basa en el hecho de que ofrece la pérdida de oportunidad más baja, refuerza la decisión tomada anteriormente, de que las acciones de Kayser a final de cuentas rinden la ganancia esperada más alta ($1 840). Estos dos enfoques (pérdida esperada de oportunidad más baja y ganancia esperada más alta) siempre conducen a la misma decisión respecto a cuál curso de acción debe seguirse.

AUTOEXAMEN 20-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Con referencia a la tabla 20-6, verifique que la pérdida esperada de oportunidad para el acto de comprar acciones de Texas Electronics es de $300.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. Véanse los ejercicios 1 y 3. Calcule las pérdidas esperadas de oportunidad.
6. Con referencia a los ejercicios 2 y 4, calcule las pérdidas esperadas de oportunidad.

ESTRATEGIAS DE DEPLORACION MAXIMIN, MAXIMAX Y MINIMAX

Varios consultores financieros consideran que la compra de acciones de Kayser Chemicals presenta demasiado riesgo. Observan que la ganancia esperada puede no ser $1 840, sino sólo de $1 000 (de la tabla 20-1). Arguyen que el mercado de valores es bastante impredecible, indican al inversionista que adopte una posición más conservadora y compre las de Texas Electronics. Esto se llama una **estrategia maximín:** maximiza la ganancia mínima. Con base en la tabla de ganancias esperadas (tabla 20-1), se razona que el inversionista debe asegurar cuando menos una recuperación de $1 150; esto es, una ganancia pequeña. A quienes se apegan a esta estrategia algo pesimista se les denomina **maxiministas.**

En el otro extremo están los optimistas o *maximaxistas.* Si se sigue la **estrategia maximáx,** el inversionista debe adquirir acciones de Kayser Chemicals. Estas personas insisten en que existe la posibilidad de vender las acciones en el futuro en $2 400 en vez de en sólo $1 150, como afirman los maxiministas.

Otra estrategia posible es la **estrategia minimáx de deploración.** Los consultores financieros que aconsejen esta estrategia pueden revisar las pérdidas de oportunidad en la tabla 20-4, y seleccionar las acciones que minimizan la máxima deploración. En este ejemplo pueden ser las acciones de Kayser, con una máxima pérdida de oportunidad de $150.

VALOR DE LA INFORMACION PERFECTA

Antes de decidirse por unas acciones y su compra, el inversionista podría considerar las formas de predecir los movimientos del mercado de valores en el futuro cercano. Si conoce con precisión lo que puede suceder en el mercado, la ganancia puede hacerse máxima si se compran siempre las acciones correctas. La pregunta es: ¿cuál es el valor de esta información anticipada? El valor en dólares de esta información se llama **valor esperado de la información perfecta** o EVPI (de *expected value of perfect information).* En este problema significaría que Roberto Hill tuviera conocimiento anticipado de cuándo subirá o bajará el mercado de valores en el futuro cercano.

Un amigo de él, que es analista de una gran firma de corretaje, dijo estar dispuesto a dar información disponible al público que sería muy valiosa para el inversionista al predecir las alzas y bajas del mercado. Por supuesto, habría honorarios, todavía indeterminados, por tal información, utilizada o no por el inversionista. ¿Cuál es la cantidad máxima que pagaría el Sr. Hill por este servicio especial? ¿$10? ¿$100? ¿$500?

El valor de la información del analista es fundamentalmente el valor de la información perfecta, porque el inversionista puede tener, entonces, la seguridad de comprar la acción común con más ganancia. El valor de la información perfecta se define como *la diferencia entre la ganancia esperada máxima bajo condiciones de certeza y la ganancia esperada máxima bajo incertidumbre.* En este problema es la diferencia entre el valor máximo alcanzado por las acciones bajo condiciones de certeza a fin de año, y el valor asociado a la decisión óptima utilizando el criterio del valor esperado.

Desde un punto de vista práctico, el valor máximo esperado bajo condiciones de certeza significa que el inversionista debe comprar acciones de Kayser Chemicals si se predice alza del mercado y de Texas Electronics si es inminente una baja de éste. La ganancia esperada a largo plazo en condiciones de certeza es $1 900 (véase la tabla 20-7).

TABLA 20-7

Cálculos para la ganancia esperada en condiciones de certidumbre

Estado de la naturaleza	*Ganancia*	*Probabilidad del estado de la naturaleza*	*Ganancia esperada*
Mercado a la alza S_1	$2 400	0.60	$1 440
Mercado a la baja S_2	1 150	0.40	460
			$1 900

Recuérdese que si desconoce el comportamiento real del mercado de valores (condiciones de incertidumbre), la compra de acciones sería de Kayser Chemicals;

su valor esperado al final del periodo se calculó en $1 840 (de la tabla 20-3). El valor de la información perfecta, en consecuencia, es $60, obtenido por:

$1 900	Valor esperado en la compra de acciones bajo condiciones de certeza
−1 840	Valor esperado en la compra (Kayser) bajo condiciones de incertidumbre
$ 60	Valor esperado de la información perfecta

En general, el valor esperado de dicha información se calcula como sigue:

EVPI = Valor esperado en condiciones de certeza
− Decisión óptima en condiciones de incertidumbre

La información que el analista del mercado de acciones pudiera dar tendría valor hasta de $60. Básicamente, el analista "garantizaría" un precio de venta a largo plazo de $1 900, y si dicho analista pide $40 por la información, el inversionista debe tener la seguridad de una ganancia esperada de $1 860, calculada por $1 900 − $40. En consecuencia, sería atractivo para el inversionista convenir en este honorario ($40) porque el resultado esperado ($1 860) sería mayor que el valor esperado en condiciones de incertidumbre ($1 840). Sin embargo, si su amigo desea $100 de honorarios por el servicio, el inversionista obtendría sólo $1 800 a largo plazo, calculado por $1 900 − $100. Por lógica, el servicio no valdría $100, porque el inversionista puede esperar $1 840 a largo plazo sin convenir en ese arreglo financiero.

Debe observarse que el valor esperado de la información perfecta ($60) es el mismo que la mínima deploración esperada (tabla 20-6).

ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Recuérdese que en el problema anterior de selección de acciones financieras el conjunto de las probabilidades aplicadas a los valores de ganancias esperadas, se obtuvo de la experiencia histórica en condiciones similares del mercado. Puede objetarse, sin embargo, que el comportamiento futuro del mercado puede diferir de la experiencia. A pesar de estas diferencias, *las ganancias esperadas no son demasiado sensibles a cualesquiera cambios dentro de un alcance aceptable.* Como ejemplo, supóngase que el hermano del inversionista cree que en lugar de un 60% de posibilidad de alza en el mercado, y un 40% de posibilidad de baja, lo cierto es lo contrario; esto es, hay una probabilidad de 0.40 de alza del mercado y una probabilidad de 0.60 de baja. Además, el primo del inversionista cree que la probabilidad de alza del mercado es de 0.50, y la de baja, 0.50. En la tabla 20-8 se muestra una comparación de las ganancias esperadas originales (columna izquierda), las ganancias esperadas para el conjunto de probabilidades sugeridas por el hermano del inversionista (columna central), y las citadas por el primo (co-

lumna derecha). La decisión es la misma en los tres casos: comprar acciones de Kayser Chemicals.

TABLA 20-8

Ganancias esperadas para tres conjuntos de probabilidades

	Ganancias esperadas		
Compra	*Experiencia histórica (probabilidad de 0.60 para alza, 0.40 para baja)*	*Estimación del hermano (probabilidad de 0.40 para alza, 0.60 para baja)*	*Estimación del primo (probabilidad de 0.50 para alza, 0.50 para baja)*
Kayser Chemicals	$1 840	$1 560	$1 700
Rim Homes	1 760	1 540	1 650
Texas Electronics	1 600	1 450	1 525

* De la tabla 20-3.

AUTOEXAMEN 20-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

En la tabla 20-8 verifique que:

1. La ganancia esperada por comprar en Texas Electronics según el conjunto de probabilidades dado por el hermano, es $1 450.
2. La ganancia esperada por comprar en Kayser Chemicals según el conjunto de probabilidades dado por el primo, es $1 700.

Una comparación de los tres conjuntos de ganancias esperadas en la tabla 20-8 revela que la mejor alternativa sigue igual: comprar en Kayser Chemicals. Como puede esperarse, hay algunas diferencias en los valores esperados futuros de cada compra de acciones.

En realidad, si hubiera cambios notables en las probabilidades asignadas, los valores esperados y la decisión óptima podrían cambiar. Como ejemplo, supóngase que el pronóstico de alza del mercado fue 0.20, y para la baja de 0.80. Las ganancias esperadas serían como se muestra en la tabla 20-9. A largo plazo, la mejor alternativa sería comprar acciones de Rim Homes.

TABLA 20-9

Valores esperados por la compra de las tres clases de acciones

Compra	Ganancia esperada
Kayser Chemicals	$1 280
Rim Homes	1 320
Texas Electronics	1 300

AUTOEXAMEN 20-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

¿Hay alguna selección de probabilidades para la cual la mejor alternativa sea comprar en Texas Electronics? *(Sugerencia:* puede solucionarse en forma algebraica o por un método de ensayo y error. Ensaye una probabilidad algo exagerada para un mercado a la alza.)

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

7. Con referencia a los ejercicios 1, 3 y 5, calcule el valor esperado de la información perfecta.
8. Con referencia a los ejercicios 2, 4 y 6, calcule el valor esperado de la información perfecta.
9. Con referencia al ejercicio 1, revise las probabilidades como sigue: $P(S_1) = 0.50$, $P(S_2) = 0.20$ y $P(S_3) = 0.30$. ¿Cambia esto la decisión?
10. Con referencia al ejercicio 2, cambie las probabilidades, esto es, sea $P(S_1) = 0.30$ y $P(S_2) = 0.70$. ¿Esto altera la decisión?

ARBOLES DE DECISION

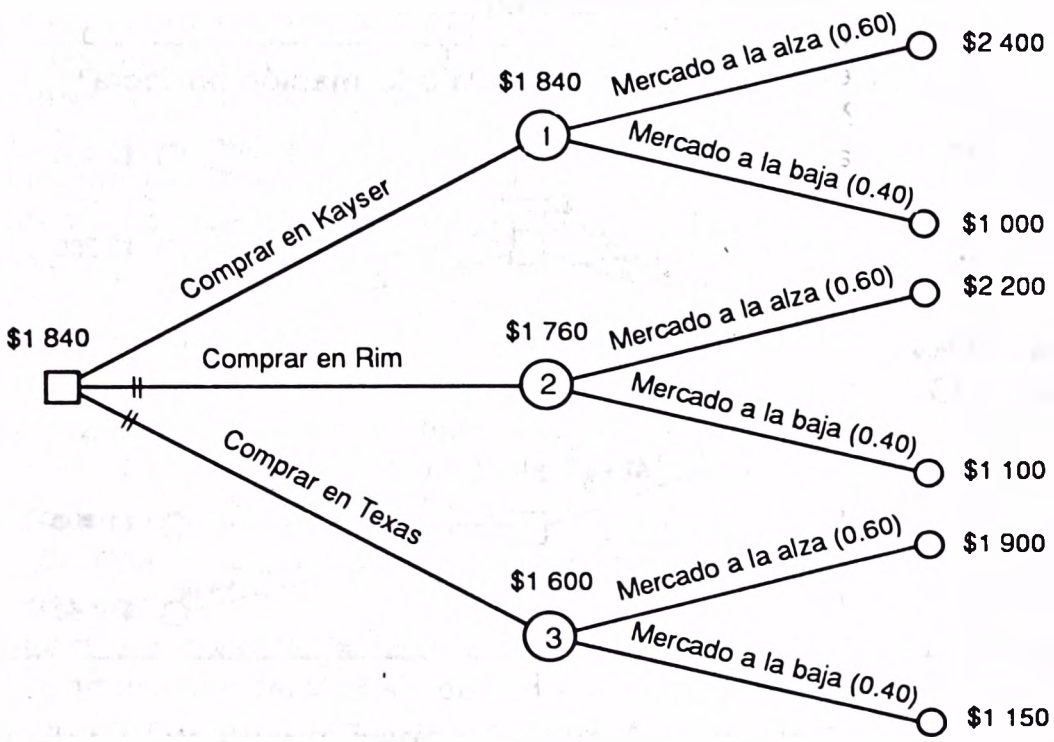
En el capítulo 5 se presentó otro medio analítico muy útil para el estudio de un caso de decisión. En forma básica, es una representación de todos los posibles cursos de acción y los posibles resultados consecuentes. Se usa un cuadrado para indicar el punto en el cual debe tomarse una decisión y las ramas que salen del mismo indican las alternativas a considerar. Con referencia al diagrama 20-1, el cuadrado está a la izquierda, con tres ramas que salen de él y representan el hecho de comprar en Kayser Chemicals, en Rim Homes y en Texas Electronics.

Los tres círculos, numerados 1, 2 y 3, representan la ganancia esperada de las tres compras de acciones comunes. Las ramas que salen a la derecha de los nodos o círculos muestran los eventos aleatorios (alza o baja del mercado), y sus probabilidades correspondientes entre paréntesis. Los números en los extremos finales de las ramas son los valores futuros estimados para detener el proceso de decisión en esos puntos. Algunas veces esto se denomina *ganancia condicional*, para hacer notar que la ganancia esperada depende de una elección y un resultado aleatorio específicos. En consecuencia, si el inversionista compra acciones de Rim Homes y el mercado sube, el valor estimado de las acciones comunes sería $2 200.

Después de elaborar el árbol de decisión, puede encontrarse la estrategia óptima de decisión, por lo que se conoce como *retroinducción*. Por ejemplo, supóngase que el inversionista considera el acto de comprar acciones de Texas Electro-

DIAGRAMA 20-1

Arbol de decisión para el inversionista



nics. Principiando en la parte inferior de la derecha del diagrama 20-1 con la ganancia esperada prevista, dado un mercado a la alza ($1 900) y dado uno a la baja ($1 150), regresando o yendo hacia atrás (moviéndose a la izquierda), y aplicando las probabilidades apropiadas, se halla la ganancia esperada de $1 600 [obtenido por medio de 0.60($1 900) + 0.40($1 150)]. El inversionista marcaría el valor esperado de $1 600 arriba del círculo del nodo 3 como se muestra en el diagrama 20-1. En forma similar, el inversionista determinaría los valores esperados para Rim Homes y Kayser Chemicals.

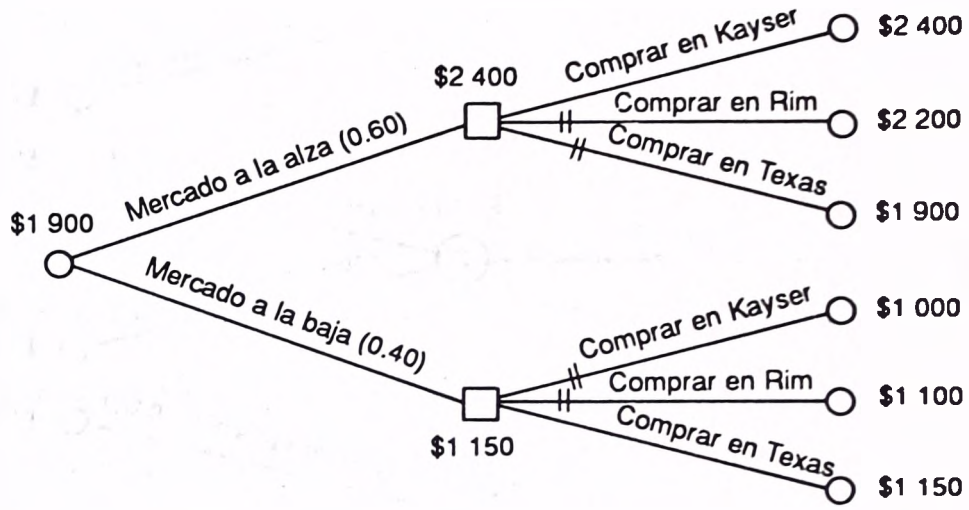
Suponiendo que el inversionista desea optimizar el valor futuro esperado para su compra de acciones, preferiría $1 840 sobre $1 760 o $1 600. Continuando a la izquierda hacia el cuadrado, el inversionista marcaría con dos trazos cada rama para representar las dos alternativas rechazadas (números 2 y 3, que simbolizan a Rim Homes y Texas Electronics). La rama sin marcar que lleva al cuadrado representa claramente la mejor acción a seguir, esto es, comprar acciones comunes de Kayser Chemicals.

El valor esperado en *condiciones de certeza* también puede interpretarse por un análisis de árbol de decisión (véase el diagrama 20-2). Recuérdese que en condiciones de certeza el inversionista debe tener la información *antes* de comprar las acciones, cuándo va a subir o a bajar el mercado en el futuro cercano. Por tanto, compraría las de Kayser Chemicals en un mercado a la alza y las de Texas Electronics en un mercado a la baja, y a largo plazo la ganancia esperada sería de

$1 900. Otra vez, se usaría la retroinducción para llegar a la ganancia esperada de $1 900.

DIAGRAMA 20-2

Arbol de decisión basado en la información perfecta



La diferencia monetaria basada en la información perfecta del diagrama 20-2 y la decisión con base en la información imperfecta del diagrama 20-1 es $60, obtenida por $1 900 − $1 840. Recuérdese que $60 es el valor de la información perfecta.

El análisis del árbol de decisión simplemente proporciona una forma alterna para realizar los mismos cálculos presentados antes en este capítulo. Algunos ejecutivos encuentran que estos esquemas gráficos les ayudan para seguir el camino de la decisión.

RESUMEN

La teoría estadística de la decisión es una innovación relativamente reciente. Este capítulo introductorio examina algunas de las técnicas que puede aplicar quien toma decisiones en ciertos casos, con objeto de escoger la mejor acción.

En muchas actividades, tales como manufactura de ropa o de automóviles, se desconoce la demanda futura, llamada *estado de la naturaleza*. Dadas estas condiciones de incertidumbre, el tomador de decisiones, tiene que escoger entre varias *opciones*. La manufactura de ropa, por ejemplo, puede producir 50, 60 o 70 gruesas de un tipo de suéter. La consecuencia de la acción de quien decide puede ser una ganancia o una pérdida, o bien un empate (quedar a mano).

Para evaluar las opciones se establece una *tabla de ganancias* esperadas, y se calculan las ganancias según diversas condiciones del mercado. Un segundo método para considerar el problema necesita determinar un conjunto de valores de *pérdida de oportunidad* y *pérdida esperada de oportunidad*.

Quien decide puede considerar formas de predecir las condiciones o demandas futuras. El valor de esta información se denomina *valor de la información perfecta*.

Recapitulación

I. La teoría estadística de decisión trata de la toma de decisiones a partir de un conjunto de opciones posibles.
   A. Los diversos cursos de acción se denominan opciones o alternativas.
   B. Los eventos futuros incontrolables se conocen como estados de la naturaleza. A los diversos estados por lo general se les asignan probabilidades de ocurrencia.
   C. La combinación de una opción específica de decisión y el estado de la naturaleza se denomina ganancia.
   D. Todas las combinaciones posibles de las opciones y los estados de la naturaleza dan como resultado una tabla de ganancias.

II. Existen varios criterios para seleccionar la decisión óptima.
   A. En el criterio del valor monetario esperado (EMV), se calcula el valor esperado para cada opción de decisión y se selecciona la óptima (si son utilidades, las más elevadas; si son costos, los mínimos).
   B. También puede elaborarse una tabla de pérdida de oportunidad.
      1. Se elabora una tabla de pérdida de oportunidad tomando la diferencia entre la decisión óptima para cada estado de la naturaleza y las otras opciones de decisión.
      2. La diferencia entre la decisión óptima y cualquier otra decisión es la pérdida de oportunidad o deploración debida a la toma de una decisión que no es la óptima.
      3. La pérdida esperada de oportunidad (EOL) es similar al valor monetario esperado. La pérdida de oportunidad se combina con las probabilidades de los diversos estados de la naturaleza para cada opción de decisión a fin de determinar la pérdida esperada de oportunidad.
   C. La estrategia de maximizar la ganancia mínima se conoce como maximín.
   D. La estrategia de maximizar la ganancia máxima se denomina maximáx.
   E. La estrategia que minimiza la máxima deploración se designa como minimáx.

III. El valor esperado de la información perfecta (EVPI) es la diferencia entre la ganancia esperada si se conoce el estado de la naturaleza y la decisión óptima en condiciones de incertidumbre.

IV. El ánalisis de sensibilidad examina los efectos de varias probabilidades de los estados de la naturaleza en los valores esperados.

V. Los árboles de decisión sirven para estructurar las diversas opciones. Presentan una imagen de los diversos cursos de acción y los posibles estados de la naturaleza.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

11. La empresa Twenge Manufacturing Company considera la introducción de dos productos nuevos. La compañía puede agregar ambos productos a la línea en curso, o bien ninguno o sólo uno de los dos. El éxito de esos productos depende de la economía general y de las reacciones del consumidor respecto a los productos. Estas reacciones pueden resumirse como "buena", $P(S_1) = 0.30$; "aceptable", $P(S_2) = 0.50$; o "mala", $P(S_3) = 0.20$. La compañía estima sus entradas en miles de dólares en la siguiente tabla de ganancias:

	Estado de la naturaleza		
Decisión	S_1	S_2	S_3
Ninguno	0	0	0
Sólo el producto 1	125	65	30
Sólo el producto 2	105	60	30
Ambos	220	110	40

a. Calcule el valor monetario esperado para cada decisión.
b. ¿Qué decisión recomendaría?
c. Elabore una tabla de pérdida de oportunidad.
d. Calcule la pérdida esperada de oportunidad.
e. Calcule el valor esperado de la información perfecta.

12. Una ejecutiva de finanzas vive en Boston, pero debe viajar con frecuencia a Nueva York. Puede ir a esta ciudad en automóvil, tren o avión. El costo del boleto de avión es $100 (dólares) y se estima que el vuelo toma 30 min en buen tiempo, y 45 min en mal tiempo. El costo del boleto de tren es $50 y se estima que el viaje toma una hora en buen tiempo y dos horas en mal tiempo. El costo de manejar su propio automóvil de Boston a Nueva York es $20 y el viaje toma tres horas en buen tiempo y cuatro horas en mal tiempo. La ejecutiva valúa su tiempo en $30 por hora. El pronóstico meteorológico para el día de mañana da una posibilidad del 60% de mal tiempo.
¿Qué decisión recomendaría? (*Sugerencia:* establezca una tabla de ganancias y recuerde que se desea minimizar los costos.) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?
13. La empresa Dude Ranches Inc. se fundó con la idea de que muchas familias en las áreas este y sureste de Estados Unidos no tienen suficiente tiempo de vacaciones para viajar en automóvil hasta los ranchos para turistas en el suroeste y las Montañas Rocosas y disfrutar de su descanso. Sin embargo, varias encuestas indicaron, que hay bastante interés en este tipo de vacaciones familiares, que incluyen cabalgatas, arreo de ganado, natación, pesca y similares. Dude Ranches Inc. compró una gran extensión de terreno propio para rancho, cercana a varias ciudades del este y construyó un lago, una piscina y otras instalaciones. Sin embargo, la construcción de cabañas familiares en el rancho necesitaba una inversión considerable. Además, se razonó que la mayor parte de tal inversión se perdería si el rancho y sus instalaciones resultaban en un fracaso financiero. En vez de más construcciones, se decidió entrar en arreglos con la compañía Mobile Homes Manufacturing Company, que proporciona casas móviles de tipo campestre muy atractivas. Mobile Homes convino en suministrar un hogar móvil los sábados por $300 (dólares) semanales. Esta empresa debe saber por anticipado en la mañana del sábado, cuántas casas móviles necesita Dude Ranches para la semana próxima. Tienen otros clientes que atender y sólo el sábado pueden disponer de las casas. Se presenta un problema. Dude Ranches tendrá algunas reservaciones el sábado, pero el caso es que muchas familias no hacen reservación. Primero prefieren examinar las instalaciones antes de tomar una decisión. Un análisis de los costos implicados indica que se deben cobrar $350 semanales por cada hogar campestre, incluyendo todas las prestaciones. El problema básico es cuántas casas móviles deben solicitarse a Mobile Homes cada semana. ¿Dude Ranches debe ordenar 10 (considerado el mínimo), 11, 12, 13 o 14 (considerado el máximo)?
Sin embargo, cualquier decisión adoptada sólo con la información de una tabla de

ganancias no tomaría en cuenta la valiosa experiencia que Dude Ranches ha tenido en los cuatro años pasados (aproximadamente 200 semanas) en la operación real de un rancho para turistas en el suroeste. Los registros mostraron que siempre tuvieron nueve reservaciones por adelantado. También que nunca tuvieron una demanda de 15 o más cabañas. La ocupación de 10, 11, 12, 13 o 14 cabañas, en parte, representó familias que entraron e inspeccionaron las instalaciones antes de rentar. En la tabla siguiente se muestra una distribución de frecuencias del número de semanas en las que se rentaron 10, 11, 12, 13 y 14 cabañas en el lapso de 200 semanas.

Cantidad de cabañas rentadas	*Cantidad de semanas*
10	26
11	50
12	60
13	44
14	20
	200

a. Elabore una tabla de ganancias.
b. Determine las ganancias esperadas y tome una decisión.
c. Establezca una tabla de pérdida de oportunidad.
d. Calcule las pérdidas esperadas de oportunidad y tome una decisión.
e. Determine el valor de la información perfecta.

14. El propietario del recién construido Ski and Swim Lodge (SSL) considera la compra o renta de varios trineos con motor para uso de los huéspedes. El propietario se da cuenta de que otras obligaciones financieras hacen imposible la compra de las máquinas. Snowmobiles Inc. (SI) renta un mototrineo por $20 (dólares) semanales, incluyendo cualquier mantenimiento necesario. De acuerdo con SI el cargo usual para los huéspedes del SSL es $25 semanales. La gasolina y el aceite son aparte. Snowmobiles Inc. sólo renta una máquina para la estación completa. El propietario de SSL, sabiendo que el alquiler de un número excesivo de trineos le causaría una pérdida neta, investigó los registros de los propietarios de otros centros de diversión. La experiencia combinada de otros sitios resultó ser:

Cantidad de mototrineos solicitados por los huéspedes	*Cantidad de semanas*
7	10
8	25
9	45
10	20

a. Diseñe una tabla de ganancias.
b. Calcule las utilidades esperadas por alquilar 7, 8, 9 y 10 trineos con motor, con base en el costo de renta de $20, un cargo al huésped de $25 y la experiencia de otros sitios de descanso.
c. ¿Cuál alternativa da más utilidades?
d. Diseñe una tabla de pérdida de oportunidad.
e. Obtenga la pérdida esperada de oportunidad por rentar 7, 8, 9 y 10 trineos.

f. ¿Cuál acto daría la menor pérdida esperada de oportunidad?
g. Determine el valor de la información perfecta.
h. Sugiera un curso de acción al propietario de Ski and Swim Lodge e incluya en su explicación las diversas cifras, como las utilidades esperadas.

15. Una mueblería tiene numerosas solicitudes respecto a la disponibilidad de mobiliario y equipo que pudiera rentarse para grandes festejos al aire libre en verano. Esto incluiría artículos como sillas plegadizas, parrillas de lujo, gas propano y alumbrado. En la localidad no está disponible en renta equipo de esta naturaleza y la gerencia de la mueblería considera la formación de una subsidiaria que maneje el negocio de renta.

Una investigación reveló que la mayoría de la gente interesada en rentar deseaba un grupo completo de artículos básicos para festejos (unas 12 sillas, cuatro mesas, una parrilla de lujo, un tanque de gas propano, tenazas, etc.). La gerencia decidió no comprar un gran número de conjuntos completos debido al riesgo financiero implícito. Esto es, si la demanda de alquiler de conjuntos no fuera tan grande como lo esperado, sería posible incurrir en una grave pérdida financiera. Además, la compra directa del equipo significaría el almacenamiento de éste fuera de temporada.

Se supo después que una empresa en Boston rentaba un equipo completo en $560 (dólares) durante el verano completo. Esto se aproxima a $5 diarios. En la propaganda de la firma de Boston se sugería un cobro diario por renta de $15. Por cada conjunto rentado se ganarían $10. Se decidió, entonces, contratar con la firma de Boston, cuando menos para la primera temporada.

La firma de Boston sugirió, con base en la experiencia combinada de empresas similares en otras ciudades, que se rentaran 41, 42, 43, 44, 45 o 46 grupos completos durante la temporada. Con base en esta sugerencia, la administración debe decidir ahora cuál es el número de conjuntos completos con la mejor ganancia que se debería rentar para la temporada.

La firma de Boston también puso a disposición otra información recolectada en otras empresas similares a la nueva subsidiaria formada. Obsérvese en la tabla siguiente (la cual se basó en la experiencia de otras alquiladoras) que las firmas rentaron 41 conjuntos completos para festejos en 360 días del total de experiencia de 6 000 días, o sea, el 6% de los días. En el 10% de los días durante un verano común, alquilaron 42 conjuntos completos, y así sucesivamente.

Cantidad de conjuntos rentados	*Cantidad de días del total (6 000 días)*
40	0
41	360
42	600
43	840
44	2400
45	1500
46	300
47	0

a. Elabore una tabla de ganancias. (Como una cifra de verificación, para el acto de tener 41 conjuntos completos disponibles y el evento de rentar 41, el pago o ganancia es $410.)
b. La utilidad diaria esperada por rentar 43 conjuntos completos de la empresa de Boston es $426.70; por 45 conjuntos, $431.70; y por 46 conjuntos, $427.45. Organice estas

ganancias diarias esperadas en una tabla y complete la tabla encontrando la utilidad diaria esperada por rentar 41, 42 y 44 conjuntos de la empresa de Boston.

c. Con base en la ganancia diaria esperada, ¿cuál es la acción que rinde más provecho?
d. La pérdida esperada de oportunidad por rentar 43 conjuntos de festejo de la empresa de Boston es $11.60; por 45 conjuntos, $6.60; por 46 conjuntos, $10.85. Organice estas pérdidas en una tabla de pérdidas esperadas de oportunidad y complete la tabla calculando las pérdidas esperadas de oportunidad para 41, 42 y 44.
e. Con base en la tabla de pérdidas esperadas de oportunidad, ¿cuál es la acción que rinde más provecho? ¿Coincide esto con la decisión que se tomó en la parte *c*?
f. Determine el valor de información perfecta. Explique lo que ello indica en este problema.

APLICACION DE LOS CONCEPTOS

1. Kevin Waltzer es propietario y operador de Rent a Wreck, una agencia que renta automóviles con descuento cerca del Cleveland Hopkins International Airport. Alquila un automóvil usado en $20 (dólares) diarios. Tiene un arreglo con Landrum Leasing para comprar automóviles usados a $6 000 cada uno. Sus automóviles sólo reciben el mantenimiento indispensable y como resultado valen sólo $2 000 al fin del primer año de operación. Kevin ha decidido vender todos sus automóviles usados cada año y comprar un conjunto de automóviles de medio uso a Landrum Leasing.

   Su empleado de contabilidad le proporciona una distribución probable con respecto al número de automóviles rentados por día.

	Número promedio de automóviles rentados por día			
	20	*21*	*22*	*23*
Probabilidad	0.10	0.20	0.50	0.20

   Kevin es un jugador fanático de golf y tenis. Pasa los fines de semana en el campo de golf o jugando tenis bajo techo. En consecuencia, su agencia sólo abre entre semana. También la cierra dos semanas durante el verano y se va a una gira de golf.

   El empleado de contabilidad estima que la limpieza y mantenimiento mínimo cuestan $1.50 por vehículo.

   a. ¿Cuántos automóviles usados debe comprar cada año para tener la máxima utilidad?
   b. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

EXAMEN CAPITULO 20

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un fabricante tiene disponibles $100 000 (dólares) para fabricar chaquetas deportivas (o chamarras) ligeras o gruesas para uso en invierno. Debe tomar una decisión en verano con objeto de tener listas las prendas para embarque a principios del otoño. Por supuesto, el fabricante es incapaz de pronosticar si el invierno será benigno o severo. Si fabrica prendas ligeras y el invierno es benigno, la ganancia esperada será de $120 000; pero si es severo, la ganancia sólo alcanzará los $105 000 (porque los consumidores comprarán esa ropa de tipo grueso a los competidores). Si se producen chamarras gruesas, las ganancias para

inviernos benigno y severo serían $110 000 y $125 000, respectivamente. Los registros pasados muestran que el 70% de los inviernos fueron benignos y 30% fueron severos.

1. Elabore una tabla de ganancias.
2. Determine las dos ganancias esperadas y tome una decisión.
3. Elabore una tabla de pérdida de oportunidad y determine las pérdidas esperadas de oportunidad.
4. Calcule el valor de la información perfecta.
5. Diseñe el árbol de decisión para este problema.

Autoexámenes

20-1

Evento	*Ganancia*	*Probabilidad del evento*	*Valor esperado*
Mercado a la alza	$2 200	0.60	$1 320
Mercado a la baja	1 100	0.40	440
			$1 760

20-2 1. Supóngase que el inversionista compra acciones comunes de Rim Homes y el valor de sus acciones en un mercado a la baja queda en $1 100, como se anticipó (tabla 20-1). En cambio, si el inversionista compra las de Texas Electronics y el mercado baja, el valor de estas últimas sería $1 150. La diferencia de $50, obtenida por $1 150 – $1 100, representa la deploración (o arrepentimiento) del inversionista por comprar acciones de Rim Homes.

2. Supóngase que el inversionista adquiere acciones de Texas Electronics y, después, se desarrolla un mercado a la alza. Las acciones suben a $1 900 como se anticipó (tabla 20-1). Sin embargo, si el inversionista compró las de Kayser Chemicals y el valor de las acciones en el mercado sube a $2 400, como se prevé, la diferencia de $500 representa la utilidad extra que el inversionista pudo obtener por la compra de acciones de Kayser Chemicals.

20-3

Evento	*Pérdida de oportunidad*	*Probabilidad del evento*	*Pérdida esperada de oportunidad*
Mercado a la alza	$500	0.60	$300
Mercado a la baja	0	0.40	0
			$300

20-4 1.

Evento	*Ganancia*	*Probabilidad del evento*	*Valor esperado*
Mercado a la alza	$1 900	0.40	$ 760
Mercado a la baja	1 150	0.60	690
			$1 450

2.

Evento	*Ganancia*	*Probabilidad del evento*	*Valor esperado*
Mercado a la alza	$2 400	0.50	$1 200
Mercado a la baja	1 000	0.50	500
			$1 700

20-5 Para las probabilidades de que el mercado suba (o baje) hasta 0.333, las acciones de Kayser proporcionarían la utilidad esperada más alta a largo plazo. Para probabilidades de 0.333 a 0.143, Rim Homes sería la mejor compra. En el caso de 0.143 y menos, Texas Electronics daría la utilidad esperada más alta. Las soluciones algebraicas son:

$$\begin{array}{ll} \text{Kaiser:} & 2\,400P + (1 - P)1\,000 \\ \text{Rim:} & \underline{2\,200P + (1 - P)1\,100} \\ & 1\,400P + 1\,000 = 1\,100P + 1\,100 \\ & P = 0.333 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Kaiser:} & 2\,200P + (1 - P)1\,100 \\ \text{Rim:} & \underline{1\,900P + (1 - P)1\,150} \\ & 1\,100P + 1\,100 = 750P + 1\,150 \\ & P = 0.143 \end{array}$$

Examen capítulo 20

1.

	Ganancia	
Manufactura	*Invierno benigno*	*Invierno severo*
Prendas ligeras	$120 000	$105 000
Prendas gruesas	110 000	125 000

2. $\text{EMV}(A_1) = 0.70(\$120\,000) + 0.30(\$105\,000)$
$= \$115\,500$
$\text{EMV}(A_2) = 0.70(\$110\,000) + 0.30(\$125\,000)$
$= \$114\,500$

Ganancias esperadas: prendas ligeras, $115 500; prendas gruesas, $114 500. Decisión: fabricar la ropa ligera porque la ganancia es mayor.

3.

	Pérdida de oportunidad	
Manufactura	*Invierno benigno*	*Invierno severo*
Prendas ligeras	$ 0	$20 000
Prendas gruesas	10 000	0

$\text{EOL}(A_1) = 0.70(0) + 0.30(\$20\,000)$
$= \$6\,000$
$\text{EOL}(A_2) = 0.70(\$10\,000) + 0.30(0)$
$= \$7\,000$

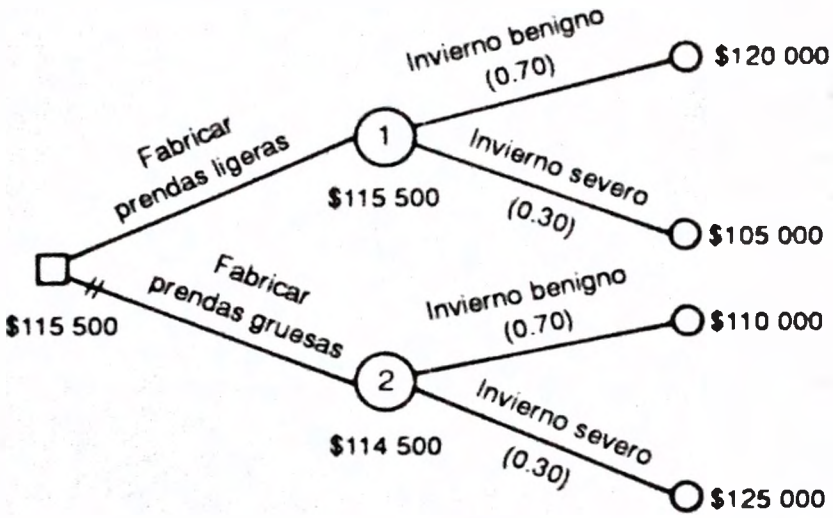
La pérdida esperada de oportunidad para las chaquetas deportivas ligeras es $6 000; para las gruesas es $7 000. Decisión: fabricar las ligeras.

4. El valor de la información perfecta es $6 000, obtenido por

$121 500	Ganancia esperada en condiciones de certeza.
− 115 500	Ganancia esperada en condiciones de incertidumbre.
$6 000	Valor de la información perfecta.

Nota: Este es el mismo valor que el de la pérdida de oportunidad mínima esperada.

5. El árbol de decisión es:



21

Control estadístico de calidad

OBJETIVOS

Al terminar de estudiar este capítulo, podrá:

1. Explicar la función del control estadístico de calidad en la evaluación de la calidad de la producción en una planta manufacturera.
2. Definir varios términos exclusivos del control estadístico de calidad, que incluyen *causas aleatorias, causas asignables, bajo control* y *fuera de control.*
3. Elaborar dos diagramas de variables: de media y de amplitud total.
4. Elaborar dos diagramas de atributos: de porcentaje de defectuosos y de número de defectos por unidad.
5. Elaborar una curva característica de operación para varios planes de muestreo.

El **control estadístico de la calidad** es relativamente nuevo. Hacia finales del siglo pasado la industria de Estados Unidos se caracterizaba por talleres pequeños que fabricaban productos sencillos como coches ligeros de un caballo, muebles, arados y estufas. En esos talleres, el trabajador por lo general era un artesano responsable por completo de la "calidad" del trabajo y podía asegurarla mediante la selección personal del material, la habilidad en la manufactura y una cuidadosa preparación y ajuste.

En la expansión de la Revolución Industrial surgieron las fábricas. Gente con limitado entrenamiento se formó en las largas líneas de ensamblaje. Los productos se volvieron más complejos. El trabajador ya no tenía control total sobre la calidad del producto. Se creó un departamento de personal semiprofesional (el departamento de inspección), al cual se le asignó la responsabilidad de la calidad. Esta responsabilidad se cumplía por medio de una evaluación de 100% de todas las características consideradas importantes, manejando la acción correctiva de las discrepancias con notificaciones a los supervisores del departamento de producción. Durante ese periodo la calidad se logró por "inspección del producto".

Durante la década de 1920 se precisaron los conceptos del "control estadístico", primero mediante el trabajo del Dr. Walter A. Shewhart de Bell Telephone Laboratories, quien introdujo el concepto de "controlar" la calidad en vez de inspeccionarla en los productos. Con el propósito de controlar la calidad, se utilizó la *técnica del diagrama de control Shewhart* para las operaciones de manufactura en proceso. Además, se introdujo el concepto de *inspección por muestreo estadístico* para estimar si los lotes de productos eran buenos o malos, reemplazando el método antiguo de inspeccionar cada pieza o parte.

El control estadístico, con énfasis en el control de la calidad en el proceso, surgió durante la Segunda Guerra Mundial. La necesidad de producción en masa de intrincadas miras de bombardeo, sistemas de radar exactos y otros equipos electrónicos, al costo más bajo, aceleró el uso de los diagramas de control y la aplicación del muestreo estadístico. Estas técnicas se retuvieron, refinaron e integraron durante y después de la guerra. La mayoría de los fabricantes usan ahora los diagramas de control y/o planes de muestreo para evaluar la producción. Los productos de alta calidad importados de Japón, Alemania y otros países industrializados han revitalizado en años recientes los programas de certificación de la calidad en la industria automotriz y otras de alta tecnología.

Este capítulo sólo se ocupará de dos técnicas estadísticas usadas en el control de la calidad: **diagramas de control y muestreo de aceptación.**

DIAGRAMA DE CONTROL

La variación es una ley básica de la naturaleza. La precipitación pluvial cada año variará, así como la estatura de estudiantes universitarios de primer ingreso y las partes producidas en un proceso de manufactura.

El concepto más importante en la línea de producción es que *no existen dos piezas idénticas*. La diferencia de una parte a la siguiente puede ser diminuta (tal

vez un millonésimo de pulgada), pero siempre habrá una diferencia. Un cierto monobloque de motor de automóvil es diferente del producido después, y cualquier válvula difiere de la siguiente que se fabrique. Aun la resistencia a la tensión del alambre de acero variará a lo largo del rollo del que provenga. Esta variación aparece en las tolerancias y límites especificados en los planos que rigen la fabricación. Por ejemplo, un rollo de alambre de acero puede aceptarse si la resistencia del material a la tensión pasa las pruebas entre 14 000 y 14 500 lb/plg^2 (o psi).

Para ilustrar el patrón de la variación inherente en la información cuantitativa, se registraron los pesos de 23 jugadores de futbol americano, universitarios de primer ingreso (véase la tabla 21-1). Obsérvese que los pesos tienden a agruparse en la cercanía de la media aritmética del peso que es 210 libras. Algunos pesaron menos y algunos más. Prácticamente todos dieron un peso entre 150 y 270 libras. Si todos los jugadores se pesaran es muy posible que unos pocos pesaran menos de 140 libras, y otros pesaran más de 280.

TABLA 21-1

Variaciones en el peso de jugadores de futbol

Peso (en libras)		*Número de jugadores*
140 hasta 160	/	1
160 hasta 180	/ /	2
180 hasta 200	~~////~~	5
200 hasta 220	~~////~~ / /	7
220 hasta 240	~~////~~	5
240 hasta 260	/ /	2
260 hasta 280	/	1
Total		23

Las piezas maquinadas en cierta forma siguen este patrón inherente. Supóngase que una taladradora automática hace agujeros en bujes, y se ajusta para que el diámetro sea de 2.9870 plg. Un muestreo en los bujes que provienen de esta máquina puede dar los resultados indicados en el diagrama 21-1.

DIAGRAMA 21-1

Variaciones en los diámetros interiores de bujes

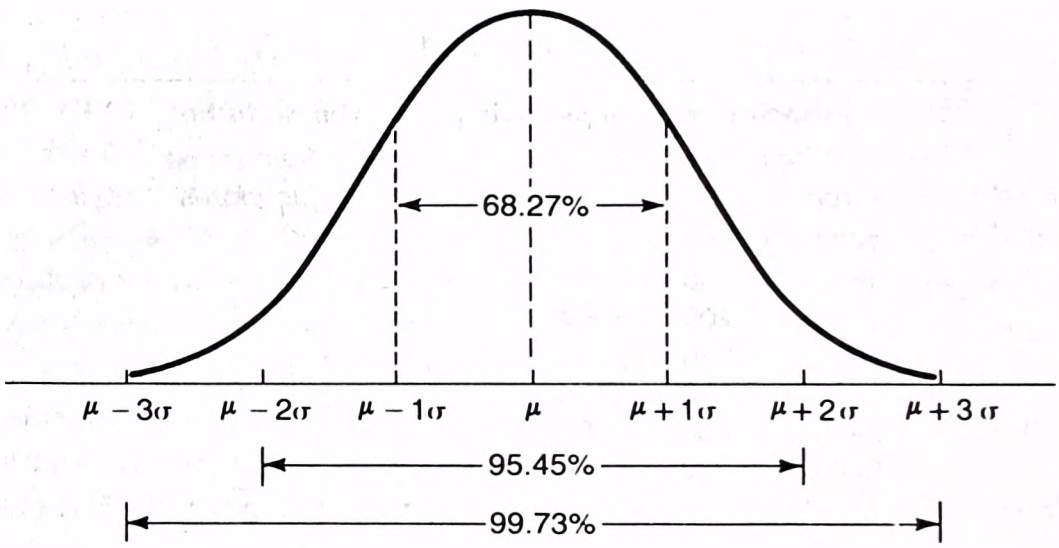
Diámetro interior							*Número de bujes*
2.9873	○						1
2.9872	○	○					2
2.9871	○	○	○	○			4
2.9870	○	○	○	○	○	○	6
2.9869	○	○	○	○			4
2.9868	○	○					2
2.9867	○						1

Puede considerarse que los diámetros interiores de los bujes siguen en forma aproximada una distribución normal. Tal distribución tiene, como ya se ha visto, el perfil de campana, y sus características en general se describen con las medidas de tendencia central expuestas en el capítulo 3 y las medidas de dispersión y áreas bajo la curva de los capítulos 4 y 7.

El promedio de uso más común en el control de calidad es la media aritmética. La amplitud total y la desviación estándar son las dos medidas usadas con más frecuencia para la dispersión. Las relaciones entre la media (μ) y la desviación estándar (σ) se presentan en el diagrama 21-2.

DIAGRAMA 21-2

Areas bajo la curva normal dentro de $\mu \pm \sigma$, $\mu \pm 2\sigma$ y $\mu \pm 3\sigma$



Para entender por qué los diagramas de control son los medios básicos en el control de la calidad, deben contestarse las dos preguntas siguientes:

1. ¿Cuáles son las causas del patrón de variación básico en un proceso de manufactura?
2. ¿Cuál es el objetivo de los diagramas de control?

Causas de variación

Existen dos causas generales de variación en un proceso de manufactura: **variación aleatoria** y **variación asignable.** Las variaciones al azar por lo general son grandes en número y no pueden eliminarse a menos que, por ejemplo, haya un cambio importante en el equipo o en el material. La fricción interna de la máquina, ligeras variaciones en materiales o condiciones de proceso (como la temperatura de un molde utilizado para formar botellas de vidrio), condiciones atmosféricas (tales como temperatura, humedad y contenido de polvo en el aire) y las vibraciones

transmitidas a la máquina por el paso de un montacargas, son algunos ejemplos de fuentes de variaciones aleatorias.

La variación propia o asignable por lo general no es de naturaleza aleatoria y puede eliminarse o reducirse. Si la perforación efectuada en una pieza es demasiado grande debido a una broca sin filo, la herramienta puede afilarse, o bien emplearse una broca nueva. Un operador que a menudo habilita en forma incorrecta la máquina puede ser sustituido. Si el rollo de acero que se va a usar en el proceso no tiene la resistencia correcta a la tensión, puede rechazarse.

¿Por qué hay que preocuparse acerca de las causas de la variación?

1. La variación puede (y lo hará) cambiar la forma, la dispersión y la tendencia central de la distribución de la característica del producto que se mide.
2. La variación asignable por lo general puede corregirse, en tanto que la variación aleatoria generalmente no puede ser corregida o estabilizada en forma económica.

Para ilustrar el efecto de la variación, la distribución de frecuencia de los diámetros interiores de los bujes indicada antes (diagrama 21-1) se ha alisado para aproximarla a una curva de distribución normal, según se muestra en el diagrama 21-3A. Si se considera que los valores, superior e inferior de lo especificado en el plano se aplican al patrón de variación inherente, 99.73% de los bujes sería aceptable. Esto indica que puede esperarse que 997 bujes de 1 000 cumplan con las tolerancias especificadas.

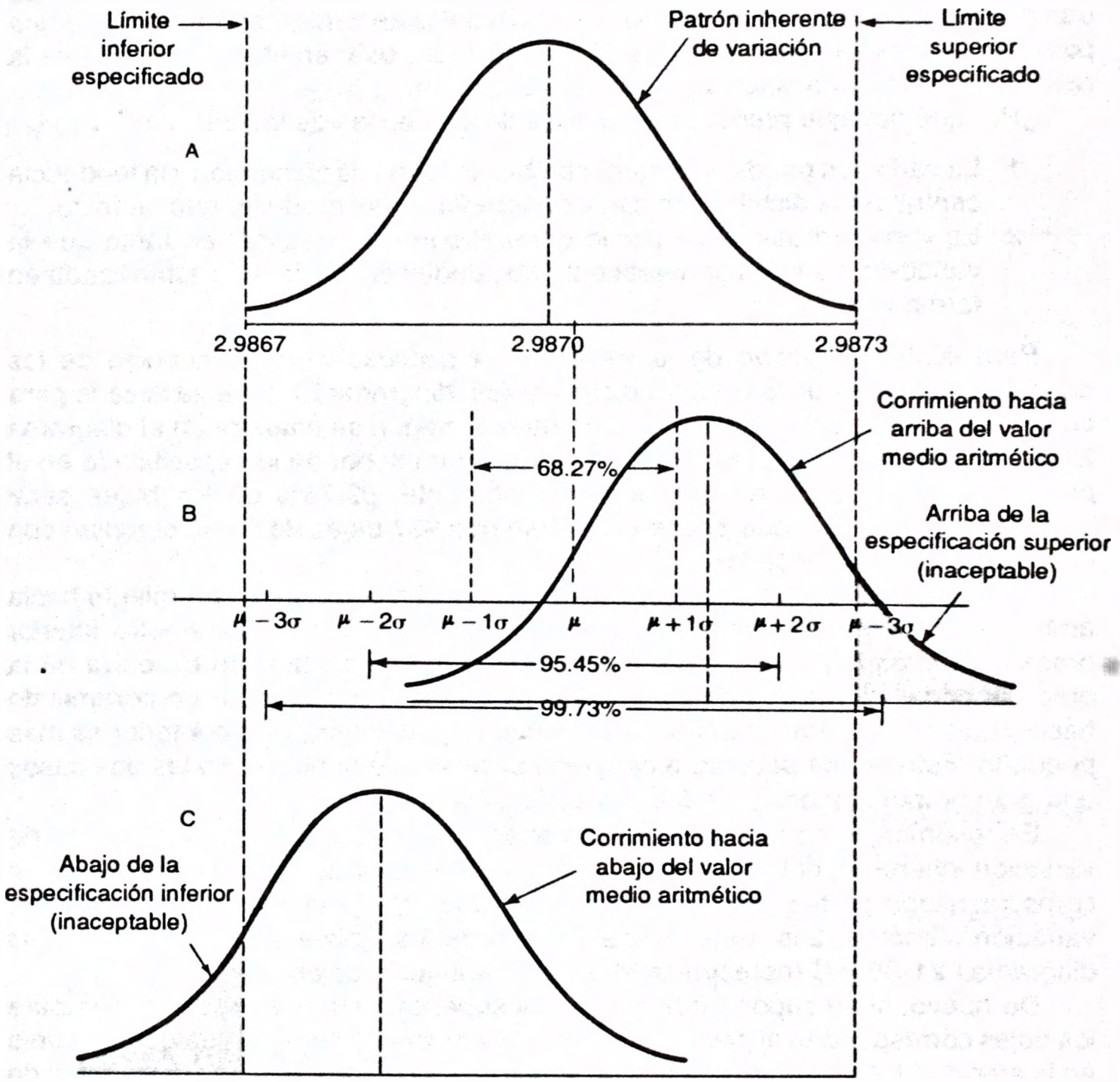
El diagrama 21-3B muestra en forma gráfica el efecto de un corrimiento hacia arriba de la media aritmética del diámetro interior; esto es, el diámetro interior promedio de los bujes es mayor. Esto puede deberse a vibración excesiva de la broca al cortar el acero. El diagrama 21-3C muestra el efecto de un corrimiento hacia abajo en la media aritmética del diámetro. El diámetro medio interior es más pequeño. Esto puede deberse a desgaste excesivo de la broca. En los dos casos una gran proporción de la producción sería inaceptable.

En resumen, si se han establecido especificaciones con base en el patrón de variación inherente, entonces un corrimiento en el valor de la media aritmética da como resultado partes defectuosas. El diagrama 21-3A representa el patrón de variación *aleatorio*. Las áreas arriba y abajo de los límites especificados en los diagramas 21-3B y C representan causas de variación *asignable*.

De nuevo, si se supone que los límites superior e inferior especificados para los bujes corresponden al patrón inherente de variación, entonces cualquier cambio en la amplitud total R de la distribución de los bujes causará que una proporción de las piezas esté más allá del límite superior o inferior especificado, aunque la media aritmética del diámetro interior permanezca igual a 2.9870. Un cambio en la amplitud indica que se han producido algunos bujes muy pequeños o muy grandes. Los diámetros grandes pueden deberse a que una de las brocas de la taladradora se dilata debido al calentamiento excesivo. El diagrama 21-4A muestra el patrón normal usual de la producción y el diagrama 21-4B ilustra el efecto de aumento en la amplitud total de la variación.

DIAGRAMA 21-3

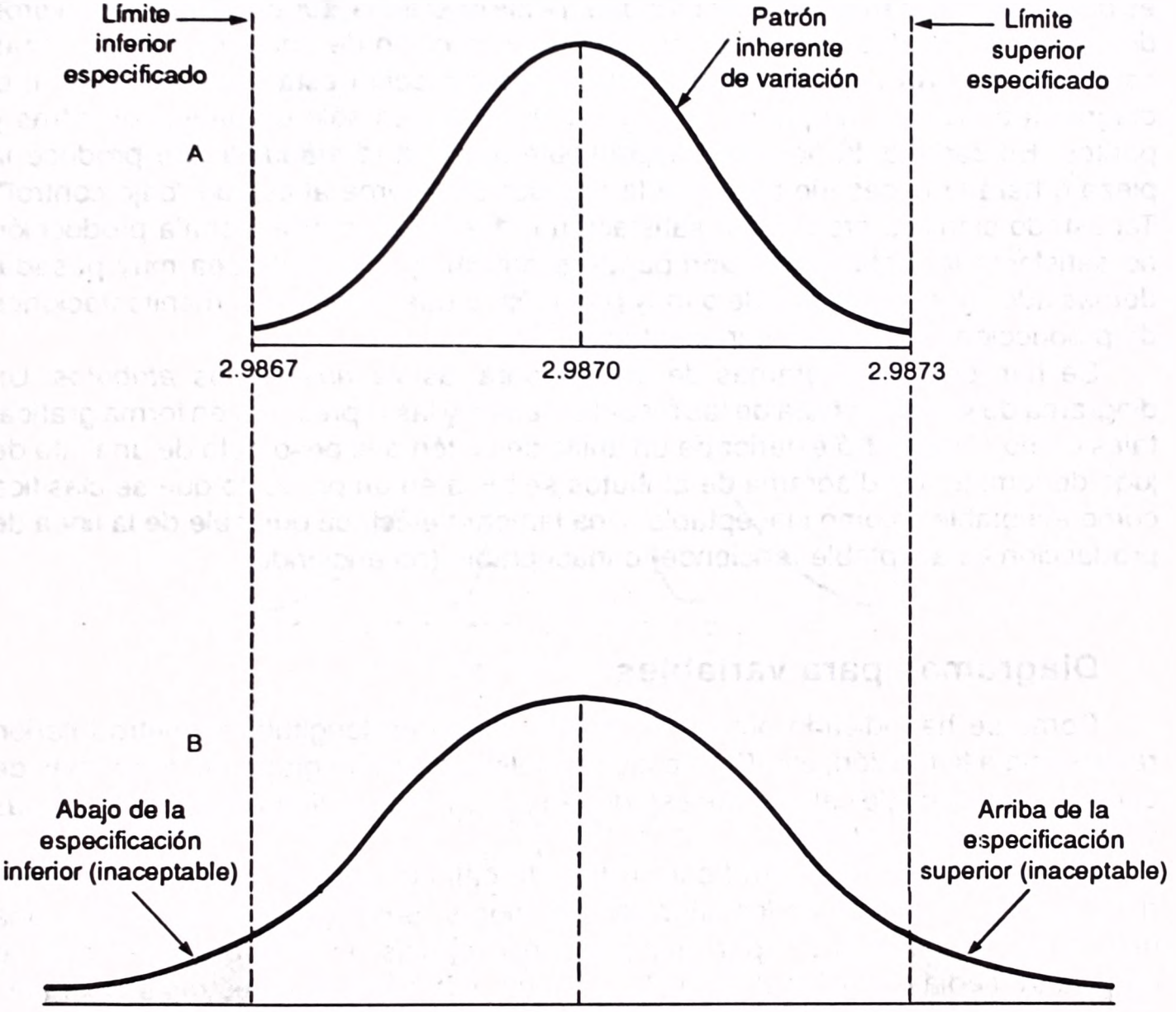
Patrón usual de variación y los efectos de corrimientos hacia arriba y hacia abajo en la media aritmética del diámetro interior



En resumen, si las especificaciones se han establecido con base en el patrón inherente, entonces un incremento en la amplitud da como resultado partes defectuosas. El diagrama 21-4A muestra el patrón de variación aleatoria. Las áreas fuera de las especificaciones superior e inferior en el diagrama 21-4B representan causas de variación asignables.

DIAGRAMA 21-4

Patrón usual de variación y los efectos de un incremento en la amplitud de los diámetros interiores



OBJETIVO Y TIPOS DE LOS DIAGRAMAS DE CONTROL DE CALIDAD

¿Cuál es el objetivo de un diagrama de control estadístico de calidad? Su propósito fundamental es identificar *cuándo* se han presentado causas de variación asignables a nivel del proceso en el sistema de producción. Es importante saber cuándo

han ocurrido dichos cambios para que pueda ser identificada y corregida la causa antes de que se produzca un gran número de partes defectuosas.

Un diagrama de control estadístico de la calidad puede compararse a un tablero de puntuaciones. Al mirar el tablero, los aficionados, entrenadores y jugadores pueden decir qué equipo tiene la mejor actuación. El tablero no puede hacer que un equipo gane o pierda un juego. Sólo indica al entrenador del equipo en desventaja que tiene que hacer algo para corregir la situación. Por ejemplo, cambiar a un jugador puede invertir las cosas. La función de los diagramas de control de calidad es parecida. Estos medios gráficos indican a los operarios, supervisores, ingenieros de control de calidad y gerentes cuando la producción de una o de varias piezas está **bajo control** o **fuera de control.** Si la producción está fuera de control, el diagrama de control no puede corregir la situación; es sólo un papel con cifras y puntos. En cambio, la persona responsable ajustará la máquina que produce la pieza o hará lo necesario para que la producción retorne al estado "bajo control". Tal estado significa producción satisfactoria; "fuera de control" señala producción no satisfactoria. Esta producción puede significar que la parte sea muy pesada, demasiado ligera, muy grande o muy pequeña, o que tenga otras manifestaciones de producción inadecuada e inaceptable.

Se han creado diagramas de control para las *variables* y los *atributos*. Un diagrama de variables trata de las medidas reales y las representa en forma gráfica, tales como el diámetro exterior de un anillo de pistón o el peso neto de una lata de jugo de tomate. Un diagrama de atributos se basa en un producto que se clasifica como aceptable o como inaceptable. Una lámpara eléctrica que sale de la línea de producción es aceptable (enciende) o inaceptable (no enciende).

Diagramas para variables

Como se ha indicado antes, las piezas varían en longitud, diámetro interior, resistencia a la tensión, etc. Para esas variables se usa un grupo de diagramas de control estadístico de calidad. Se estudiarán dos clases de diagramas: el de *medias* y el de *amplitudes totales*.

Los diagramas de control estadístico de calidad utilizan los conceptos teóricos que se mostraron en los capítulos anteriores. Supóngase que se selecciona una muestra pequeña de, por ejemplo, cinco piezas de la población y que se calcula la media (aritmética). Se seleccionan luego muchas muestras adicionales de cinco piezas y se calculan sus medias. Las medias de tales muestras pueden designarse como $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$, y así sucesivamente. La media de esas medias muestrales se denota por $\overline{\overline{X}}$

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\text{Suma de las medias de los subgrupos (muestras)}}{\text{Número de las medias muestrales}}$$

$$= \frac{\Sigma \overline{X}}{n}$$

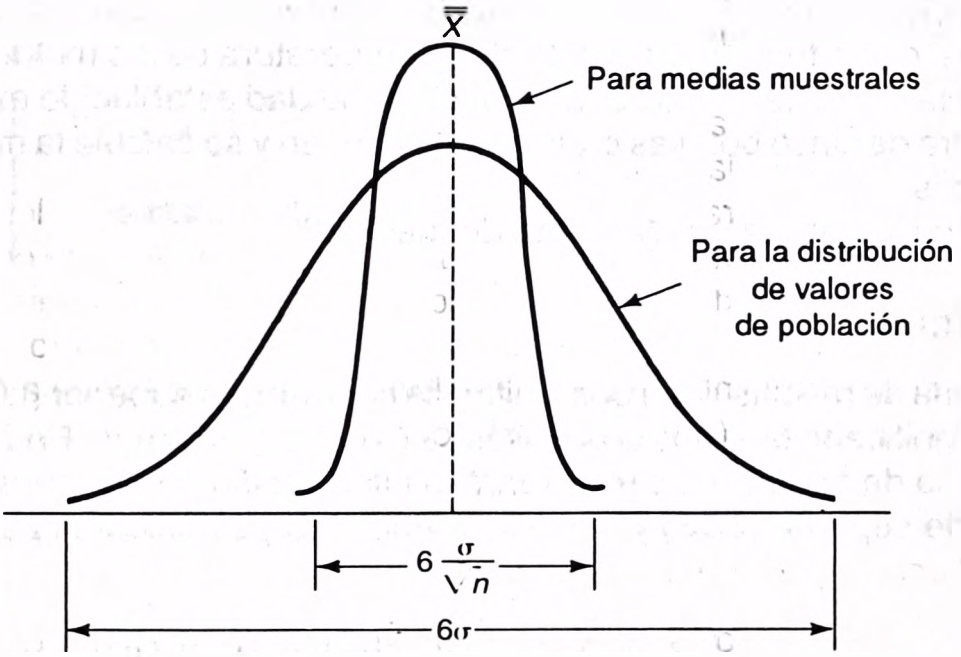
El error estándar de la distribución de las medias muestrales (subgrupo) se denota por $\sigma_{\bar{x}}$ y se evalúa por

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si todas las medias muestrales se transportan a una distribución de frecuencias, la gráfica se aproximaría a la curva de campana mostrada en el diagrama 21-5. La gráfica de la distribución de las medias muestrales superpuesta a la distribución de las mediciones reales aparecería como se muestra en el diagrama.

DIAGRAMA 21-5

Distribución de las medias muestrales y los valores de población



La media aritmética de una población es igual a la media de todas las medias de las muestras aleatorias seleccionadas a partir de esa población. Asimismo, la dispersión total en la población es mayor que la de la distribución de las medias muestrales, en el factor $\sqrt{n}$. También debe observarse que aun si la población es normal sólo en forma aproximada, las inferencias con respecto a la distribución de las medias muestrales pueden obtenerse con base en la distribución normal. Tales son:

68.27% de los promedios del subgrupo estarán dentro de más o menos 1 error (o desviación) estándar de la media ($\sigma_{\bar{x}}$) de la media de la población.

95.45% de los promedios del subgrupo estarán dentro de más o menos 2 errores estándares de la media ($\sigma_{\bar{x}}$) de la media de la población.

99.73% de los promedios del subgrupo estarán dentro de más o menos 3 errores estándares de la media ($\sigma_{\bar{x}}$) de la media de la población.

Estas relaciones permiten establecer límites alrededor de los promedios de los subgrupos para mostrar qué tanta variación puede esperarse para muestras de subgrupo de un tamaño dado. Estos límites esperados se llaman *límites de control superiores,* LCS, y *límites de control inferiores,* LCI.

Diagrama de medias

El primer diagrama diseñado para variables se denomina **diagrama de medias.** Su objetivo es exponer la fluctuación de las medias muestrales.

✱ Ejemplo

Supóngase que se tiene una máquina nueva recién instalada para fabricar botellas. La máquina está ajustada para producir botellas de 41 onzas, pero se espera que haya variación en los pesos. Tal variación esperada se deberá a un cierto número de factores, como temperatura del vidrio, temperatura de los moldes y composición de la mezcla del material vítreo. El control de calidad establecido exige que se tome una muestra de cinco botellas cada hora, se pesen y se calcule la media (aritmética) de los pesos.

¿Cómo se elabora un diagrama de medias?

✔ Solución

Un diagrama de medias tiene dos límites de control: uno superior (LCS) y uno inferior (LCI). El significado de estos dos límites se expondrá en breve. Primero se elaborará un diagrama de medias y se transferirá la información de las muestras a la gráfica.

El límite superior (LCS) y el límite inferior (LCI) se calculan por:

$$LCS = \overline{\overline{X}} + \frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \qquad LCI = \overline{\overline{X}} - \frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

donde $\hat{\sigma}$ es una estimación de la desviación estándar de la población, σ. El cálculo de LCS y LCI se ha simplificado por el uso de:[1]

$$\boxed{LCS = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} \qquad LCI = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}}$$

donde

A_2 es un factor que se usa en el cálculo de los límites superior e inferior con base en la amplitud total R. Los factores para los diversos tamaños pueden verse en el apéndice L. *(Nota:* la n en la tabla se refiere al número en la muestra.) A continuación se muestra una parte de la tabla. Para

[1] Para esta conversión, véase Acheson J. Duncan, *Quality Control and Industrial Statistics,* 5a. ed. (Homewood, Ill.:Richard D. Irwin, 1986) págs. 479-87.

determinar el factor, se localiza primero el tamaño de la muestra, n (5 en este ejemplo), en el margen izquierdo. Se pasa luego siguiendo la horizontal a la columna A_2 y se lee el factor, que es 0.577.

Factores para diagramas de control

Número de elementos en la muestra	Diagrama para promedios	Diagrama para amplitudes		
	Factores para límites de control	Factores para línea central	Factores para límites de control	
n	A_2	d_2	D_3	D_4
2	1.880	1.128	0	3.267
3	1.023	1.693	0	2.575
4	0.729	2.059	0	2.282
5	0.577	2.326	0	2.115
6	0.483	2.534	0	2.004

$\overline{\overline{X}}$ es la media de las medias muestrales calculada por $\Sigma\overline{X}/N$, donde N es el número de muestras seleccionadas. En este problema se tomará una muestra cada hora durante cuatro horas, así que $N = 4$.

$\overline{R}$ es la media de las amplitudes muestrales, $\overline{R}$ se calcula con $\Sigma R/N$.

El inspector del control de calidad registró el peso de cada una de las cinco botellas que seleccionó. La información de las muestras, tomada a las 8, 9, 10 y 11 horas (A.M.), se encuentran en la tabla 21-2.

TABLA 21-2

Pesos de cinco botellas tomadas al azar, 8–11 A.M. (en onzas)

	Botella					*Media (aritmética)*	*Amplitud*
Hora	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	$\overline{X}$	R
8 A.M.	41	43	42	41	43	42	2
9 A.M.	39	40	40	39	42	40	3
10 A.M.	41	44	43	46	41	43	5
11 A.M.	38	39	40	39	39	39	2
Total						164	12

La línea central ($\overline{X}$) para el diagrama de medias es 41, determinada por medio de 164/4. La media de las amplitudes ($\overline{R}$) es 3, determinada por 12/4.

El límite de control superior (LCS) del diagrama de medias es:

$$\overline{X} + A_2\overline{R} = 41 + 0.577(3)$$
$$= 42.731$$

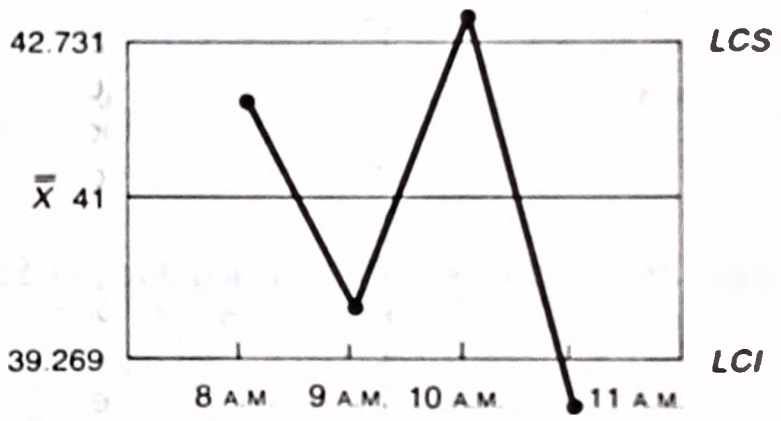
El límite de control inferior (LCI) del diagrama de medias es:

$$\overline{X} - A_2\overline{R} = 41 - 0.577(3)$$
$$= 39.269$$

$\overline{X}$, LCS, LCI y las medias de las muestras se indican en el diagrama 21-6.

DIAGRAMA 21-6

Diagrama de medias para los pesos de las botellas



Hay variación considerable en la media del proceso. De hecho, las muestras de las 10 A.M. y las 11 A.M. indican que el proceso está fuera de control. Es responsabilidad del inspector de control de calidad informar al departamento de producción que se haga un ajuste lo más pronto posible. En este caso, es esencial que la media del proceso vuelva a ser aproximadamente de 41 onzas.

Interpretación Con base en sólo las primeras cuatro horas de experiencia con la nueva máquina productora de botellas: 1) Si se escoge al azar una muestra de cinco botellas y se determinan los pesos, la media (aritmética) quedará entre 39.269 y 42.731 onzas aproximadamente, el 99.73% de las veces. 2) Si se toman muchas muestras de cinco botellas y se calculan las medias aritméticas, el promedio de 41 onzas aparecerá más que cualquier otro promedio. Esta cifra (41 onzas) es el promedio global de las medias de subgrupos. Los valores LCS y LCI se representan como $\overline{X} \pm 3\sigma$.

En general, los diagramas de control de calidad deben utilizarse después de la estabilización del proceso. Una regla empírica es diseñar un diagrama después de seleccionar cuando menos 25 muestras. En este ejemplo, el diagrama de medias se trazó después de seleccionar sólo cuatro muestras.

AUTOEXAMEN 21-1

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Cada media hora el inspector de control de calidad verifica cuatro piezas y registra los diámetros exteriores de cada una. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

	Pieza de muestra			
Hora	*1*	*2*	*3*	*4*
9:00 A.M.	1	4	5	2
9:30 A.M.	2	3	2	1
10:00 A.M.	1	7	3	5

Calcule la media general, determine los límites de control y muestre los límites y la media en un diagrama de medias. Luego grafique las medias muestrales.

Diagrama de amplitudes

Un **diagrama de amplitudes** muestra la variación en las amplitudes (totales) de las muestras. Si los puntos que representan dichas amplitudes se encuentran dentro de los límites superior e inferior, se concluye que la producción está bajo control. De acuerdo con el azar, 997 veces de 1 000 la amplitud total de variación de las muestras quedará dentro de los dos límites. Si una amplitud queda arriba o abajo de los límites, se concluye que alguna causa *asignable* afecta a la producción de modo que resultan algunas piezas más grandes, más pequeñas, más pesadas o más ligeras, dependiendo del atributo que se mida. LCS y LCI se representan con $\overline{R} \pm 3\sigma_R$. Los límites de control superior e inferior para el diagrama de amplitudes pueden determinarse con rapidez usando:

$$\boxed{LCS = D_4\overline{R}} \qquad \boxed{LCI = D_3\overline{R}}$$

donde D_3 y D_4 son factores tomados del apéndice L (también se muestran en la tabla parcial de la página 805).

✱ Ejemplo

Los pesos de las muestras de cinco botellas de la tabla 21-2 se presentan a continuación:

	Pesos (en onzas)				
Hora	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
8 A.M.	41	43	42	41	43
9 A.M.	39	40	40	39	42
10 A.M.	41	44	43	46	41
11 A.M.	38	39	40	39	39

¿Cómo se puede elaborar un diagrama de amplitudes para dichos pesos?

✔ Solución

El primer paso es determinar la amplitud promedio, $\overline{R}$. La amplitud de la muestra tomada a las 8 A.M. es 2, determinada por 43 − 41 . La amplitud de la muestra tomada a las 9 A.M. es 3, calculada 42 − 39. Las amplitudes para las muestras tomadas a las 10 A.M. y 11 A.M. son 5 y 2, respectivamente. La amplitud promedio, $\overline{R}$, es 3 que se obtiene por $(2 + 3 + 5 + 2)/4 = 12/4 = 3$.

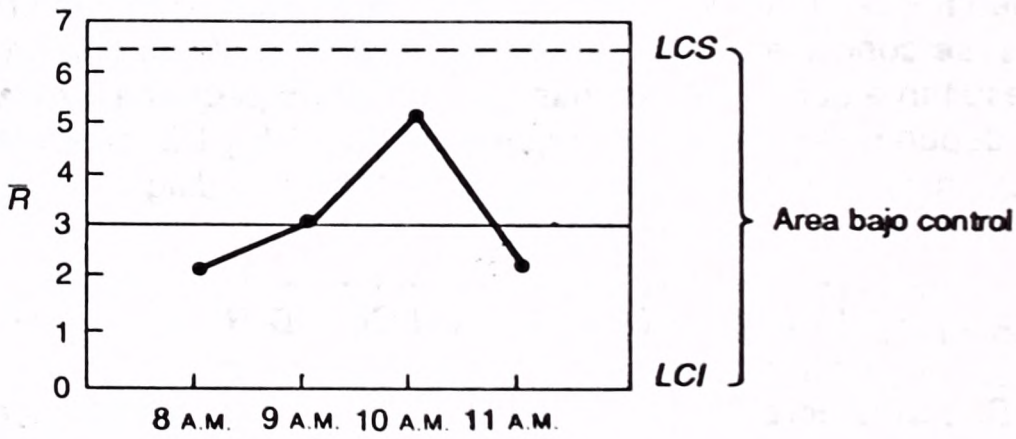
Tomando del apéndice L los valores de D_3 y D_4, y un tamaño de muestra de 5, se obtiene $D_4 = 2.115$ y $D_3 = 0$. Determinando los límites superior e inferior para el diagrama de amplitudes:

$$\begin{aligned} LCS &= D_4\overline{R} \\ &= 2.115(3) \\ &= 6.345 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} LCI &= D_3\overline{R} \\ &= (0)(3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La elaboración del diagrama de amplitudes y la representación de las amplitudes de las 8-11 A.M. se muestran en el diagrama 21-7.

DIAGRAMA 21-7

Diagrama de amplitudes de los pesos de botellas



Obsérvese que todas las amplitudes están dentro del área de "bajo control", lo cual indica que la fluctuación de los pesos de las botellas es la esperada. Esto es, no hay fluctuaciones inusitadas en los pesos, de modo que no se necesitan ajustes del proceso.

AUTOEXAMEN 21-2

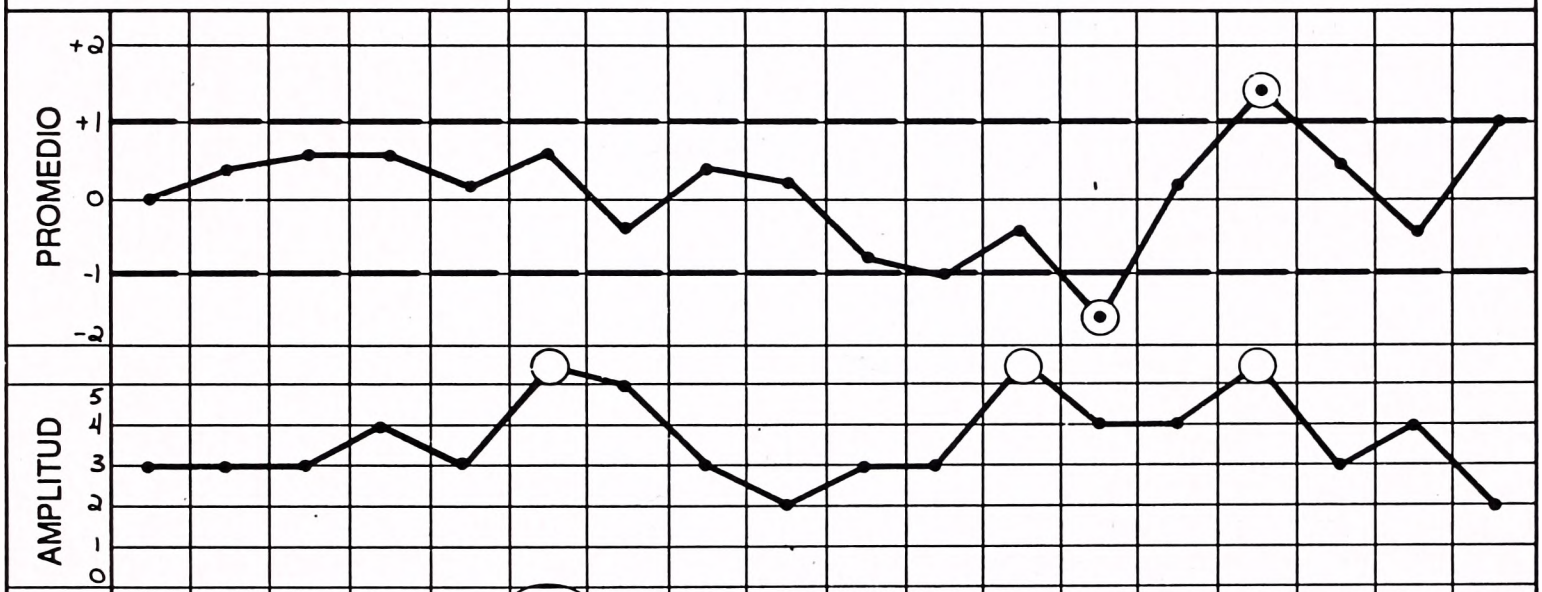
Las respuestas se dan al final del capítulo.

1. Usando la información del autoexamen 21-1 (repetida aquí), elabore un diagrama de amplitud que muestre los límites de control. Muestre las amplitudes.
2. ¿El proceso está bajo control?

	Pieza de muestra			
Tiempo	*1*	*2*	*3*	*4*
9:00 A.M.	1	4	5	2
9:30 A.M.	2	3	2	1
10:00 A.M.	1	7	3	5

La siguiente ilustración es un diagrama real combinado de medias y de amplitudes (sólo se ha cambiado el nombre de la máquina rectificadora). Para trazar el diagrama, un inspector de control de calidad verifica el diámetro interior de cinco piezas cada tres horas. La rectificadora "Sun Grinder" se ha ajustado en esta operación para un diámetro interior de 3.87525 plg. El inspector inserta el calibrador en la pieza número 1842B5 y registra la lectura en el diagrama, como – 1.0. Se suman las cinco lecturas muestrales y se calcula la media y la amplitud. (La lectura – 1.0 del calibrador indica que la pieza tiene un diezmilésimo de pulgada por abajo de la media. Una lectura + 2.0 indicaría que la pieza tiene dos diezmilésimos de pulgada por arriba de la media.)

MAQ. NO. 13-271-64	UNID. DE MED. 0.001	VERIF. PZS.CADA 3hrs.
DEPT. NO. 103	OPERACION Rectificar diámetros interiores	
PARTE NO. 184285	SEMANA DE 8-17	DIAGRAMA NO. 52



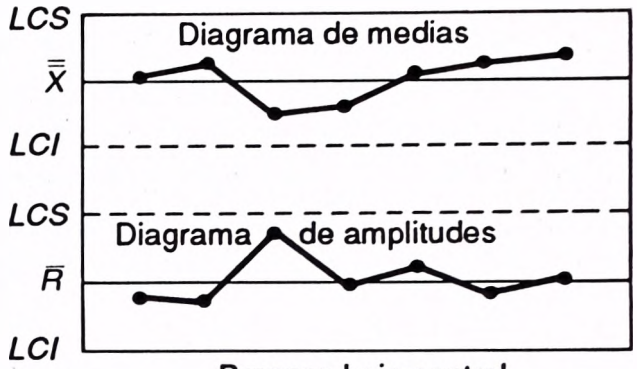
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	+1.0	+1.0	+2.0	-1.0	+2.0	+5.0	+2.0	+1.0	+1.0	-2.0	+1.0	-3.0	-3.0	+2.0	+4.0	+1.0	-1.0	0.0
2	-1.0	+1.0	+2.0	+3.0	-1.0	-1.0	-1.0	+2.0	+1.0	+1.0	-1.0	-3.0	-3.0	+1.0	-2.0	-1.0	+2.0	+1.0
3	+1.0	+1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	0.0	+1.0	0.0	-1.0	-2.0	+3.0	-2.0	-2.0	-1.0	0.0	0.0	+1.0
4	+1.0	-2.0	-1.0	0.0	+1.0	+2.0	-3.0	-1.0	-1.0	-2.0	-2.0	-1.0	+1.0	+1.0	+3.0	+1.0	-2.0	+2.0
5	-2.0	+1.0	+1.0	+2.0	0.0	-2.0	0.0	-1.0	0.0	0.0	-1.0	+2.0	-1.0	-1.0	+3.0	+1.0	-1.0	+1.0
SUMA	0.0	+2.0	+3.0	+3.0	+1.0	+3.0	-2.0	+2.0	+1.0	-4.0	-5.0	-2.0	-8.0	+1.0	+7.0	+2.0	-2.0	+5.0
PROM.	0.0	+0.4	+0.6	+0.6	+0.2	+0.6	-0.4	+0.4	+0.2	-0.8	-1.0	-0.4	-1.6	+0.2	+1.4	+0.4	-0.4	+1.0
AMPL.	3.0	3.0	3.0	4.0	3.0	7.0	5.0	3.0	2.0	3.0	3.0	6.0	4.0	4.0	6.0	3.0	4.0	2.0
HORA	8:50	12:00	2:50	9:00	11:50	3:00	9:05	11:55	3:00	8:55	11:50	3:05	9:10	12:05	3:00	8:55	12:05	3:10

Algunas situaciones controladas y fuera de control

A continuación se muestran tres ejemplos de procesos de producción bajo control y fuera de control.

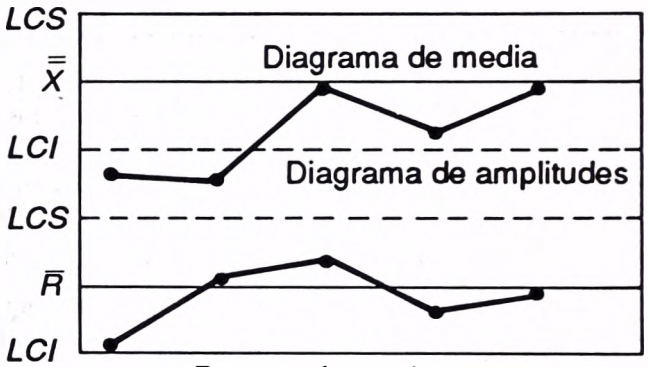
1. El diagrama de medias y el de amplitudes indican conjuntamente que el proceso está bajo control. Obsérvese que las medias muestrales y las amplitudes muestrales se agrupan alrededor de las líneas de centro. Algunas se hallan arriba y otras abajo de dichas líneas centrales, lo que indica que el proceso es bastante

estable. Esto es, no hay tendencia visible de las medias y las amplitudes de moverse hacia las áreas "fuera de control".



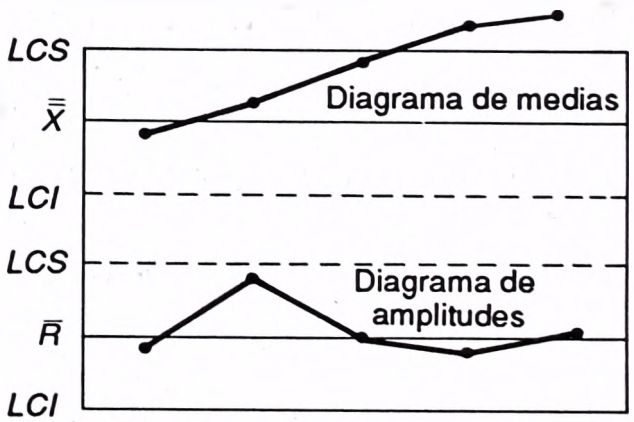
Proceso bajo control

2. Las medias muestrales están bajo control, pero las amplitudes de las dos últimas muestras están fuera de él. Algunas piezas son muy grandes y otras son extremadamente pequeñas. Es necesario un ajuste del proceso.



Proceso fuera de control

3. La media aritmética del peso está bajo control en las primeras tres muestras, pero existe una tendencia hacia el LCS. Las medias de los pesos en las últimas dos muestras están fuera de control. El diagrama de medias y el de amplitudes juntos indican que todos los elementos se vuelven cada vez más pesados. Está indicado un ajuste al proceso.



Proceso fuera de control

Este es un ejemplo de la información adicional que ofrece un diagrama de control. Obsérvese que la tendencia de las medias muestrales es hacia arriba, y

que dos de las cinco medias están arriba de la media global, $\overline{\overline{X}}$. Parece ser que para la tercera muestra, se ha establecido una tendencia hacia arriba, aunque el proceso todavía está bajo control.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

1. Se acaba de instalar un nuevo horno industrial. Con objeto de adquirir experiencia respecto a la temperatura del horno, el inspector toma lecturas de la temperatura en cuatro lugares cada media hora. La primera lectura tomada a las 8 A.M. fue de 2 040 grados Fahrenheit. (En la siguiente tabla se dan sólo los dos últimos dígitos para facilitar los cálculos.)

	Lectura			
Tiempo	*1*	*2*	*3*	*4*
8:00 A.M.	40	50	55	39
8:30 A.M.	44	42	38	38
9:00 A.M.	41	45	47	43
9:30 A.M.	39	39	41	41
10:00 A.M.	37	42	46	41
10:30 A.M.	39	40	39	40

   a. Con base en esta experiencia inicial, establezca un diagrama de medias. Señale los límites superior e inferior y la media global. Luego grafique la experiencia de las 8:00-10:30.
   b. Interprete el diagrama.
2. a. Diseñe un diagrama de amplitudes para los datos del ejercicio 1, y trácelo inmediatamente abajo del diagrama de medias. Incluya los límites de control superior e inferior y la amplitud media.
   b. Interprete el diagrama.

Diagramas de atributos

Una soldadura puede tener o no una grieta; un relevador funcionar o no; un radiador tener fugas o no; la cerradura de un automóvil puede cerrar o no hacerlo; una llanta ajustará en su aro (o rin) o no lo hará. Estos son ejemplos de *atributos*. Si una pieza tiene fugas, no ajusta, no cierra o no funciona, se dice que está (o es) *defectuosa*. Los calibradores de "pasa/no pasa" son un tipo de instrumento para la inspección de atributos; otro tipo es un aparato de rayos X. Se examinarán dos tipos de diagramas para el control de calidad de atributos. Un **diagrama de porcentaje de defectuosos** muestra el porcentaje de la producción que tiene defectos. Un **diagrama c** muestra el número de defectos por unidad.

Diagramas de porcentaje de defectuosos

Los *diagramas de porcentaje de defectuosos* también se conocen como *diagramas P, o diagramas* $\overline{p}$. El diagrama de porcentaje de defectuosos muestra gráficamente el porcentaje de la producción que no es aceptable.

✱ Ejemplo

Una cizalla nueva se ajusta o habilita para cortar un trozo de una barra larga de acero. Por diversas razones, algunas veces la máquina corta una pieza que es demasiado larga o demasiado corta. Estas piezas inaceptables se rechazan en forma automática y caen a una caja; el operador de la cizalla debe contar las defectuosas después de 100 piezas cortadas. El informe después del primer día de trabajo es:

Número de piezas cortadas	*Número de defectuosos*	*Porcentaje de defectuosos*
100	5	0.05
100	6	0.06
100	7	0.07
100	4	0.04
100	8	0.08
		0.30

¿Cómo se elabora un diagrama del porcentaje de defectuosos?

✔ Solución

La media aritmética del porcentaje de elementos defectuosos ($\bar{p}$) es 0.06, que se obtiene de:

$$\bar{p} = \frac{\text{Suma de porcentaje de defectuosos}}{\text{Número de muestras}}$$
$$= \frac{0.30}{5}$$
$$= 0.06$$

Los límites de control superior e inferior se calculan como la media del porcentaje de defectuosos más y menos tres veces el error estándar de los porcentajes.

$$\boxed{\text{LCS y LCI} = \bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}$$

Determinación de los límites de control superior e inferior:

$$\text{LCS y LCI} = \bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$
$$= 0.06 \pm 3\sqrt{\frac{(0.06)(0.94)}{100}}$$

$$= 0.06 \pm 0.0712$$

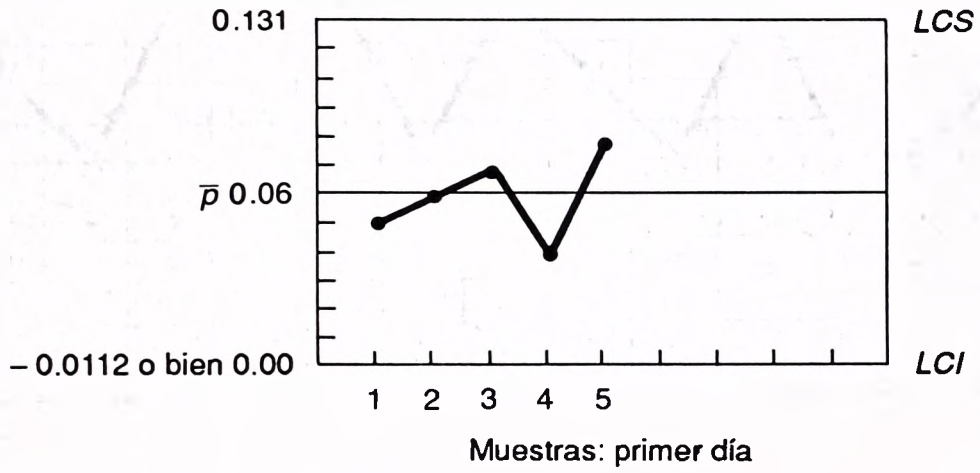
$$= 0.1312 \text{ y } - 0.0112$$

El límite superior es 0.1312, y el inferior es 0, ya que no puede ser menor de 0%.

Obsérvese que en el diagrama 21-8 se presenta el promedio del porcentaje de defectuosos ($\overline{p}$) de 0.06, junto con LCS y LCI. Para completar la gráfica, se determina el porcentaje de defectuosos de cada muestra, esto es, 0.05, 0.06, 0.07, 0.04 y 0.08, respectivamente.

DIAGRAMA 21-8

Diagrama de porcentaje de defectuosos para la cizalladora



Pueden hacerse varias observaciones después del primer día de operación: 1) La media aritmética del porcentaje de defectuosos es 6%. 2) Alrededor de 99.7% habrá entre 0% y 13.1% de piezas defectuosas. 3) Sólo en 3 de 1 000 muestras de tamaño 100 (lo cual viene de 1 000 – 997) del promedio de defectuosos excederá del 13.1% o, teóricamente, quedará abajo de 0%. 4) Las primeras muestras revelaron que el proceso está controlado. No se garantizan ajustes.

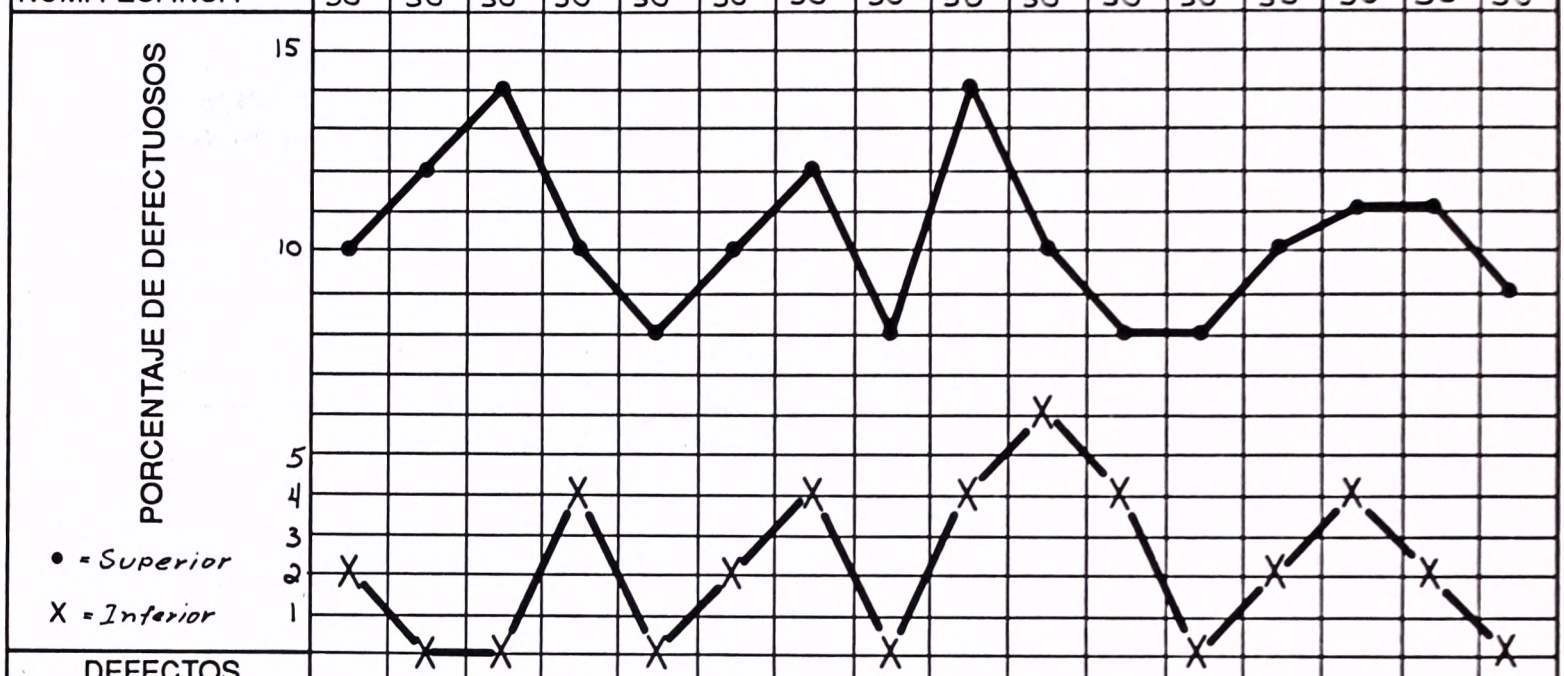
La administración puede o no quedar satisfecha con un promedio de 6% de desperdicio o tan elevado como 13.1%. El diagrama no puede tomar una decisión, esto es responsabilidad de la administración. El diagrama $\overline{p}$ sólo muestra los límites basados en la experiencia real.

En la página siguiente se muestra un diagrama $\overline{p}$ real de una planta manufacturera de automóviles. (El nombre se ha cambiado ligeramente, pero la información no se ha alterado.)

CONTROL DE CALIDAD

DEPTO. 108 | PARTE 1016934 | NOMBRE DE PARTE Engrane de pivote corto

FECHA	9-11	9-11	9-11	9-11	9-11	9-11	9-11	9-11	9-12	9-12	9-12	9-12	9-12	9-12	9-12	9-12
HORA	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	1:00	2:00	3:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	1:00	2:00	3:00
NUM. PZS. INSP.	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50



DEFECTOS																
CARA SUP. NO TRAB.	5	6	7	5	4	5	6	4	7	5	4	4	5	6	6	5
CARA INF.	1	0	0	2	0	1	2	0	2	3	2	0	1	2	1	0
TOTAL (Sup. / Inf.)	5/1	6/0	7/0	5/2	4/0	5/1	6/2	4/0	7/2	5/3	4/2	4/0	5/1	6/2	6/1	5/0
% DEFECTUOSOS	10/2	12/0	14/0	10/4	8/0	10/2	12/4	8/0	14/4	10/6	8/4	8/0	10/2	12/4	12/2	10/0

AUTOEXAMEN 21-3

Las respuestas se dan al final del capítulo.

De un lote de fabricación se escogen muestras de 200 partes cada día, y se cuenta el número de defectuosas.

Día	*Número de verificadas*	*Número de defectuosos*
1	200	4
2	200	3
3	200	5
4	200	4

Con los datos anteriores elabore un diagrama de porcentaje de defectuosos y trace el porcentaje de las muestras.

Diagrama C (o de C)

El **diagrama de $\bar{c}$** (que se llama también **diagrama C**) muestra el *número de defectuosos por unidad.* Una botella de vidrio puede considerarse defectuosa si contiene burbujas o imperfecciones con tamaño de $\frac{1}{32}$ de pulgada o mayor. Si en una botella tomada al azar de la línea de producción se encuentran ocho burbujas, entonces el número de defectos por unidad es ocho. En una planta armadora de automóviles se cuenta el número de defectos por puerta de coche. Los defectos pueden ser dos soldaduras abiertas, tres astillas de lámina que pueden dañar al nuevo propietario, una sección ondulada y tres pequeñas áreas con pintura incompleta. Por tanto, en esa puerta de automóvil habría nueve defectos.

El propósito de un diagrama de $\bar{c}$ (expresado como "C testada") es mostrar en forma gráfica cuántos defectos aparecen en una unidad de producción. Los diagramas de $\bar{c}$ en los subensambles y en el ensamble final muestran las áreas débiles en el proceso de construcción. Pueden determinarse acciones de corrección que incluyen cambios de personal o supervisión más estricta en ciertos subensambles.

✱ Ejemplo

Un sintonizador de alta fidelidad se somete a una inspección final. Se enchufa y prueba sintonizando una emisora de radio local. Los sintonizadores que funcionan se empacan y se envían. Los otros deben repararse antes de que salgan a la venta. Los defectos posibles pueden recaer en la soldadura o en la omisión de partes. El inspector de calidad verifica esos sintonizadores defectuosos y cuenta el número de defectos por sintonizador. Las verificaciones en 10 sintonizadores de nuevo modelo revelaron el siguiente número de defectos por sintonizador: 8, 5, 6, 4, 3, 8, 8, 10, 9 y 9.

¿Cómo se elabora un diagrama *C*?

✔ Solución

La fórmula para los límites superior e inferior de un diagrama *C* es:

$$\boxed{\text{LCS y LCI } \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}}}$$

El número total de defectos en 10 sintonizadores de nuevo modelo es 70, encontrado por 8 + 5 + 6 + 4 + 3 + 8 + 8 + 10 + 9 + 9.

El número medio de defectos por sintonizador ($\bar{c}$) es:

$$\bar{c} = \frac{\text{Suma de defectos}}{\text{Total de sintonizadores}}$$

$$= \frac{70}{10}$$

$$= 7$$

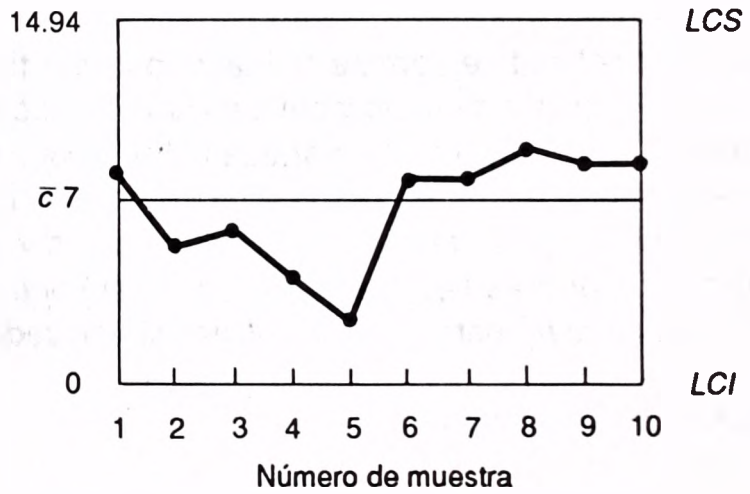
Los límites superior e inferior son

$$\begin{aligned} \text{LCS y LCI} &= \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}} \\ &= 7 \pm 3\sqrt{7} \\ &= 7 \pm 7.94 \\ \text{LCS} &= 14.94 \\ \text{LCI} &= 0 \text{ (ya que el número de defectos no puede ser menor de 0)} \end{aligned}$$

Los números de defectos por sintonizador se indican en el diagrama 21-9.

DIAGRAMA 21-9

Diagrama para el sintonizador de alta fidelidad



Interpretación El número medio de defectos por unidad es 7. A la larga, alrededor de 997 de 1 000 sintonizadores tendrían entre 0 y 15 defectos. Los valores de LCS y LCI son $\bar{c} \pm 3\sigma_c$.

El diagrama $\bar{c}$ puede revisarse sin duda después de tomar más muestras. Se razona que durante la producción de las primeras unidades de un nuevo modelo, los operadores de las máquinas y el grupo de supervisores no conocen el proceso. Es usual que se necesiten días o semanas antes de que el proceso sea estable.

El siguiente diagrama $\bar{c}$ real para una planta manufacturera de automóviles puede ser de interés. (El nombre de la pieza se ha cambiado, pero la información no se ha alterado.)

9-11

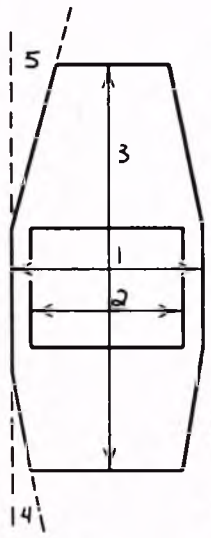
DIAGRAMA

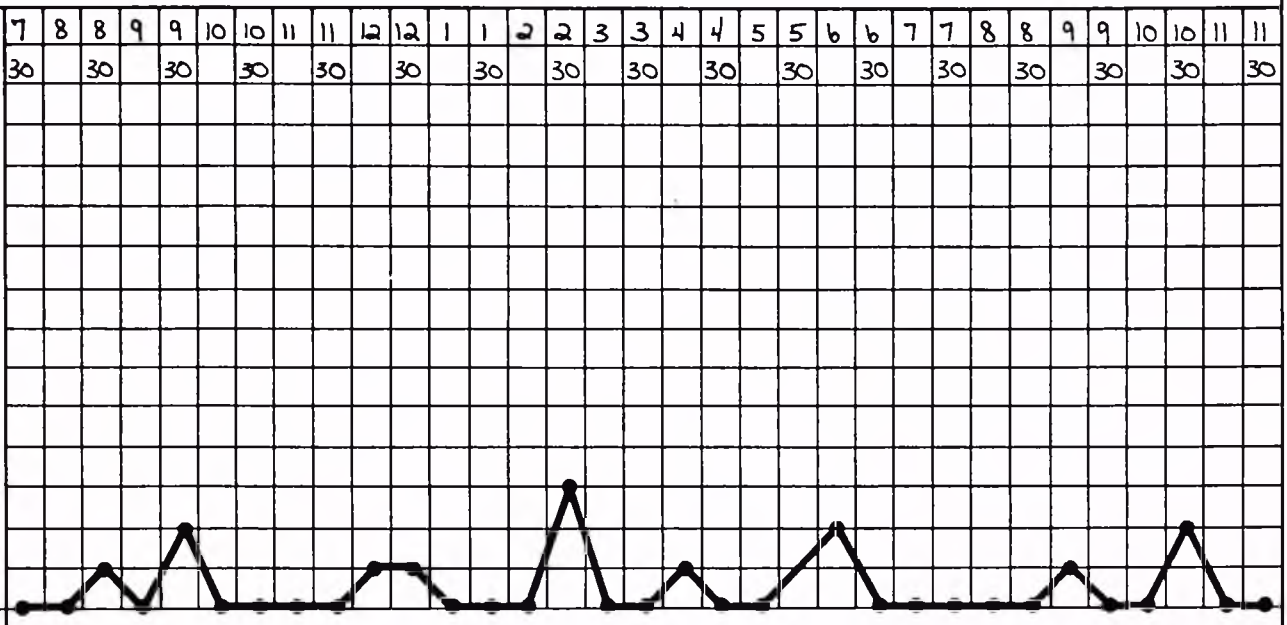
NOMB. Y NUM. PARTE Engrane Pivote corto 1016934

OPERADORES 1º Figueroa
2º A. Sema

NOMB. Y NUM. MAQ. Shearomatic AL 339-62-1

OPERACION Desbastar chaflán





	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11
	30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30		30
DEFECTOS																																	
1) 6.013 - 6.015 O.D.										1					1						1										1		
2) 3.221 - 3.223 I.D.					1						1				1							1											
3) 4.412 - 4.414 OAL.																																	
4) .035 - .045 15° CH.			1															1															
5) .035 - .045 30° CH.																												1			1		
6) 2.790 - 3.794 O.D. - I.D					1										1							1											
TOTAL	0	0	1	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	3	0	0	1	0	0	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0

AUTOEXAMEN 21-4

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Un subensamble se inspecciona a conciencia y se registra el número de defectos encontrados. Un nuevo grupo de ensambladores principia su trabajo en la mañana del lunes. Los números de defectos por subensamble para los primeros 10 producidos fueron: 3, 2, 0, 5, 4, 6, 0, 7, 7 y 6.

1. Establezca un diagrama de control para el número medio de defectos por subensamble y transporte los números de defectos por subensamble.
2. ¿Es evidente que el proceso está bajo control?

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

3. En una fábrica una nueva máquina de alta velocidad produce un gran porcentaje de pernos defectuosos. Las frecuentes verificaciones de su producción en martes dieron los resultados siguientes:

Número de muestra	*Tamaño de muestra*	*Número de defectos*	*Número de muestra*	*Tamaño de muestra*	*Número de defectos*
1	50	4	11	50	2
2	50	0	12	50	3
3	50	3	13	50	6
4	50	5	14	50	4
5	50	6	15	50	5
6	50	4	16	50	7
7	50	1	17	50	6
8	50	6	18	50	5
9	50	7	19	50	10
10	50	8	20	50	2

   a. Diseñe un diagrama de porcentaje de defectuosos. Indique los LCS, LCI y $\overline{p}$ en el diagrama. Grafique la experiencia del martes.
   b. Interprete el diagrama.

4. El fabricante de un gabinete de metal para almacenamiento, de diseño nuevo, lo envía sin ensamblar, y el comprador lo arma. Se reciben quejas en número creciente respecto a partes faltantes, aristas cortantes o filosas, bisagras desalineadas, imperfecciones en el esmalte y así sucesivamente. Con objeto de eliminar en lo posible esas quejas, al principiar la producción del lunes, cada gabinete se ensambló por completo en la fábrica y se corrigieron los defectos antes de desensamblarlo para su embarque. Un registro del número de defectos por gabinete para los primeros 12 fue:

Designación de gabinete	*Número de defectos*	*Designación de gabinete*	*Número de defectos*
OA1	7	OA7	9
OA2	6	OA8	3
OA3	8	OA9	4
OA4	10	OA10	6
OA5	8	OA11	5
OA6	4	OA12	2

   a. Diseñe un diagrama que muestre el número de defectos por unidad. Muestre los límites de control superior e inferior y cualquier otra información esencial. Grafique la experiencia lograda en los primeros 12 gabinetes inspeccionados.
   b. Interprete el diagrama.

MUESTREO DE ACEPTACION

En la sección anterior se estudió el mantenimiento de la *calidad de un producto conforme se estaba produciendo.* En muchas empresas la situación que también preocupa es la *calidad del producto acabado que se recibe.*

- La empresa Sims Software, Inc. compra disquetes de la compañía Diskettes International. La orden normal de compra es por 100 000 empacados en lotes de 1 000. La empresa no espera que todos los disquetes sean perfectos. De hecho, ha convenido en aceptar lotes de 1 000 con hasta un 10% de defectuosos. Le agradaría tener un plan para inspeccionar los lotes que recibe, a fin de asegurar que se cumple la norma de calidad. El propósito del procedimiento de inspección es separar la parte aceptable de la inaceptable, en los lotes.
- La empresa Zenith Electric compra magnetrones a la Bono Electronics para usarlos en su nuevo horno de microondas. Los magnetrones se envían a Zenith en lotes de 10 000. Zenith admite que los lotes que recibe tengan un 5% de defectuosos. Buscan idear un plan de muestreo para determinar cuáles lotes cumplen con el criterio establecido, y cuáles no.
- General Motors compra parabrisas a muchos proveedores. La GM insiste en que los parabrisas lleguen en lotes de 1 000. Puede aceptar 50 o menos defectuosos en cada lote; esto es, 5% de defectuosos. Desea tener un procedimiento de muestreo para verificar que los envíos que recibe cumplen con el criterio establecido.

Lo común en estos casos es la necesidad de verificar que los productos que se reciben cumplan con los requisitos estipulados. La situación se asemeja a una puerta con una criba que permite el paso del aire mientras mantiene fuera los insectos. El muestreo de aceptación permite que los lotes de calidad aceptable pasen al área de manufactura y evita que se reciban lotes no aceptables.

Por supuesto, la situación en los negocios modernos es más compleja. El comprador necesita protección contra la aceptación de lotes por debajo de la norma de calidad. La mejor protección contra calidad inferior es la inspección del 100%. Desafortunadamente, el costo de la citada inspección con frecuencia es prohibitivo. Otro problema con la verificación de cada elemento es que la prueba puede ser destructiva. Si se probaran todas las lámparas de fotodestello antes de embarcarlas, no habría nada que vender, también la inspección al 100% puede no conducir a la identificación de todos los defectos debido a la fatiga y la consecuente pérdida de percepción por parte de los inspectores. Así, la inspección completa, rara vez se emplea en los casos prácticos.

El procedimiento usual es filtrar o tamizar la calidad de las piezas que se reciben, mediante un plan estadístico de muestreo; de acuerdo con dicho plan; se selecciona al azar una muestra de n unidades del lote de N unidades (la población). Esto se llama **muestreo de aceptación.** La inspección determinará el número de unidades defectuosas en la muestra. Tal número se compara con uno predeterminado que se llama **número crítico** o **número de aceptación.** Este número se designa generalmente por **c.** Si el número de unidades defectuosas en la muestra de tamaño n es menor que o igual a **c,** el lote se acepta. Si el número de unidades defectuosas excede a **c** el lote se rechaza y se devuelve al proveedor, o tal vez se somete a una inspección de 100%.

El citado muestreo de aceptación es un proceso de toma de decisiones. Hay dos decisiones posibles: aceptar o rechazar el lote. Además, existen dos casos en los cuales se toma una decisión: el lote está bien o el lote está mal. Estos son los estados de la naturaleza. Si el lote está bien y la inspección de la muestra revela que el mismo es bueno, o si el lote está mal y la inspección de la muestra demuestra que así es, entonces se ha tomado una decisión correcta. Sin embargo, hay otras dos posibilidades. El lote puede en realidad contener más defectuosos de los debidos, pero se le acepta. Esto se llama *riesgo del consumidor* o *error beta.* En forma similar, el lote puede estar dentro de los límites convenidos, pero se le rechaza durante la inspección de la muestra. Esto se llama *riesgo del productor* o *error alfa.* La siguiente tabla resume las decisiones de aceptación mostrando esas posibilidades.

	Estados de la naturaleza	
Decisión	*Lote bueno*	*Lote malo*
Se acepta	Correcto	Error
Se rechaza	Error	Correcto

Para evaluar un plan de muestreo y determinar qué es justo tanto para el productor como para el consumidor, el procedimiento usual es utilizar un diagrama llamado **curva característica de operación,** o **curva CO,** como se le llama usualmente. Una curva CO presenta el porcentaje de defectuosos a lo largo del eje horizontal y la probabilidad de aceptar tal porcentaje de defectuosos, a lo largo del eje vertical. Generalmente se dibuja una curva regular (o alisada) que une todos los niveles posibles de calidad. La distribución binomial sirve para obtener las probabilidades para una curva CO.

✱ Ejemplo

La empresa Sims Software, como se mencionó antes, compra disquetes a Diskettes International. Los elementos se empacan en lotes de 1 000 cada uno. Todd Sims, el director de Sims Software, ha convenido en aceptar lotes con 10% o menos de defectuosos, y ha instruido a su departamento de inspección para seleccionar una muestra de 20 disquetes y examinarlos con cuidado. Aceptará el lote si tiene 2 o menos defectuosos en la muestra. Obtenga una curva CO para el plan de inspección. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote que tiene 20% de defectuosos?

✔ Solución

Este tipo de muestreo de llama **muestreo de atributos** porque el elemento muestreado, en este caso un disquete, se clasifica como aceptable o inaceptable. No se obtiene "lectura" o "medición" sobre el disquete. Ahora se analizará el problema en términos de los estados de la naturaleza. Sea p la representación del porcentaje real de defectuosos en la población.

El lote es bueno si $p \leq 0.10$
El lote es malo si $p > 0.10$

Sea X el número de defectuosos en la muestra. La regla de decisión es:

Rechazar el lote si $X \geq 3$
Aceptar el lote si $X \leq 2$

Aquí el lote aceptable es el que tiene 10% o menos discos defectuosos. Si el lote es aceptable cuando tiene exactamente 10% de defectuosos sería aún más aceptable si contuviera menos de 10% de defectuosos. En consecuencia, la práctica usual es trabajar con el límite superior de defectuosos.

La distribución binomial se utiliza para calcular los diversos valores de la curva CO. Recuérdese que para usar la binomial se exigen cuatro requisitos.

1. Hay sólo dos consecuencias posibles. El disquete es aceptable o no lo es.
2. Existe un número fijo de pruebas. En este caso el número de pruebas es el tamaño de la muestra, 20.
3. Hay una probabilidad constante de éxito. Un éxito es la probabilidad de encontrar una parte defectuosa. Se supone que es 0.10.
4. Las pruebas o ensayos son independientes. La probabilidad de encontrar un disquete defectuoso en la tercera selección no está relacionada con la posibilidad de encontrar uno defectuoso en la cuarta selección.

El apéndice A da las diversas probabilidades binomiales. Se necesita convertir la nomenclatura del muestreo de aceptación a la que se usó en el capítulo 6 para las distribuciones discretas de probabilidad. Sea $p = 0.10$ la probabilidad de un éxito y $n = 20$ el número de pruebas. Entonces **c** es el número de defectos tolerados: dos en este caso. Se determinará ahora la probabilidad de aceptar un lote recibido que tiene 10% de defectuosos usando un tamaño de muestra de 20 y tolerando 0, 1 o 2 defectuosos. Primero se localiza en el apéndice A el caso de $n = 20$ y $p = 0.10$. Se encuentra el renglón donde r, el número de defectos, es 0. La probabilidad es 0.122. A continuación se encuentra la probabilidad de un defecto, esto es, donde $r = 1$. Es 0.270. En forma similar, la probabilidad de $r = 2$ es 0.285. Para encontrar la probabilidad de dos o menos defectos, se necesitan sumar esas tres probabilidades. El total es 0.677. En consecuencia, la probabilidad de aceptar un lote con 10% de defectuosos, esto es, que contenga dos o menos defectuosos en una muestra de 20, es 0.677. La probabilidad de rechazar dicho lote es 0.323, encontrada por $1 - 0.677$. Este resultado se escribe en la notación abreviada de probabilidad como sigue (la barra vertical, |, significa "dado que"):

$$P(X \leq 2 \mid p = 0.10 \text{ y } n = 20) = 0.677$$

La probabilidad también puede obtenerse directamente del apéndice B. Dicho apéndice consiste en una *tabla binomial acumulativa*. Da los valores menores que o iguales a X. La tabla está estructurada igual que el apéndice A para localizar una

probabilidad. Se localiza $n = 20$, y se halla la columna donde $p = 0.10$ y el renglón donde $r = 2$. Léase el valor, que es 0.677, el mismo que se encontró antes.

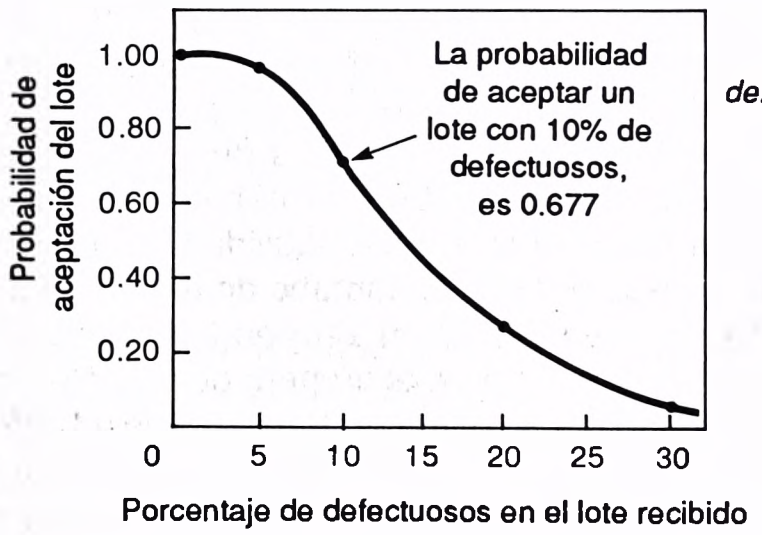
Para determinar otros valores en la curva CO, se consideran otros valores de p. Por ejemplo, para evaluar la probabilidad de aceptar un lote que realmente tiene 20% de defectuosos, puede leerse el valor directamente en el apéndice B:

$$P(X \leq 2 \mid p = 0.20 \text{ y } n = 20) = 0.206$$

La curva CO del diagrama 21-10 muestra diversos valores de p y las probabilidades correspondientes de aceptar un lote de esa calidad. La dirección de Sims Software será capaz de evaluar con rapidez las probabilidades de diversos niveles de calidad. Obsérvese que sólo se da en el apéndice B un número pequeño de valores para n y p. Pueden obtenerse otros usando la aproximación normal de la binomial.

DIAGRAMA 21-10

Curva CO para plan de muestreo
($n = 20$, $c = 2$)



X Porcentaje de defectuosos en el lote	*Y* Probabilidad de aceptación del lote
0	1.000
5	0.924
10	0.667
20	0.206
30	0.035

AUTOEXAMEN 21-5

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Calcule la probabilidad de aceptar un lote de disquetes que tiene realmente 30% de defectuosos, usando el plan de muestreo para Sims Software. Use el apéndice B.

EJERCICIOS

Las respuestas a los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

5. La empresa Warren Electric manufactura fusibles para muchos clientes. A fin de asegurar la calidad del producto para el envío, se prueban 10 fusibles cada hora. Si no más de un fusible está defectuoso, los fusibles se empacan y preparan para su embarque. Elabore una curva CO para este plan de muestreo. Calcule las probabilidades de aceptación de lotes que tienen 10%, 20%, 30% y 40% de defectuosos. Trace la curva CO para este plan de muestreo usando los cuatro niveles de calidad.
6. La empresa Grills Radio Products compra transistores a Mira Electronics. De acuerdo con su plan de muestreo Grills Radio aceptará un embarque de transistores si tres o menos están defectuosos en una muestra de 25. Muestre una curva CO para estos porcentajes de defectos: 10%, 20% y 30%.

RESUMEN

En este capítulo se consideran dos aspectos del control de calidad: *diagramas de control* y *muestreo de aceptación*. Los diagramas de control sirven para informarse sobre la calidad durante la operación. También son útiles para vigilar la calidad durante la producción. Intervienen dos tipos de variación en un proceso de manufactura: *aleatoria* y *asignable* (o propia). La variación aleatoria se debe a causas fortuitas no recurrentes. La variación asignable se debe a cierta causa específica, como una broca desgastada. La variación esperada o asignable puede reducirse o eliminarse.

Se consideraron diagramas de control para *variables* y *atributos*. Un diagrama de control de variable se basa en una medición o en una lectura. Se describieron diagramas de control de variable para valores medios y de amplitud. Un diagrama de control de atributo clasifica el producto o servicio como aceptable o no aceptable. Se describieron los diagramas de porcentajes de defectuosos y el *C*. Una característica común de todos los diagramas es que se determina una línea central que corresponde a la media junto con límites de control. Los límites de control generalmente difieren de la media en tres errores estándares.

El segundo aspecto considerado del control de calidad fue el muestreo de aceptación. Tal muestreo se usa con frecuencia para determinar si las partes compradas que llegan en un envío cumplen con las normas convenidas. Se obtiene una muestra aleatoria del lote recibido y, con base en los resultados de dicha muestra, se toma una decisión para aceptar o rechazar el lote.

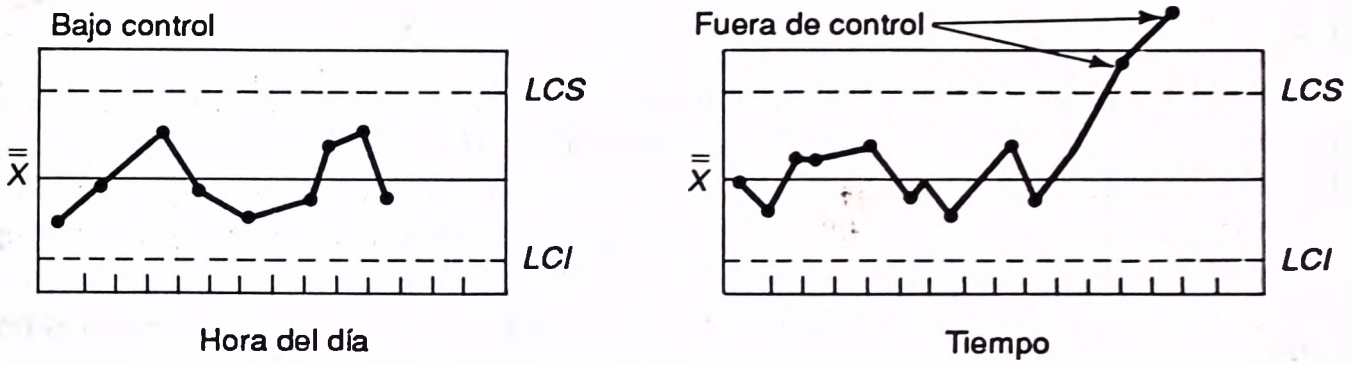
Recapitulación

I. El objetivo del control estadístico de calidad es controlar la calidad de una operación de manufactura o servicio usando técnicas de muestreo.
II. Diagrama de control.
   A. Existen dos causas de variación en la producción.
      1. Causas aleatorias: pocas en número, son de naturaleza al azar y no pueden eliminarse por completo.
      2. Causas asignables: pocas en número, no son aleatorias y pueden reducirse o eliminarse.

B. El objetivo de los diagramas de control de calidad es determinar y visualizar en una gráfica si una causa asignable ha ingresado en el sistema de producción, de modo que puede identificarse y corregirse. Esto se lleva a cabo mediante la selección periódica de muestras aleatorias muy pequeñas durante las operaciones de producción.

C. Tipos de diagramas.

1. Diagramas de media, también llamados "de X testada", están diseñados para controlar variables tales como pesos, longitudes y resistencias a la tensión. El límite de control superior (LCS) y el límite de control inferior (LCI) se encuentran por la fórmula $\overline{X} \pm A_2\overline{R}$, donde $\overline{X}$ es la media de las medias muestrales. A_2 es un factor del Apéndice L, y $\overline{R}$ es la media de las amplitudes muestrales. El diagrama a la izquierda indica que la producción está "bajo control". La gráfica de la derecha indica una situación "fuera de control", con el diámetro exterior de la parte en cuestión demasiado grande y no aceptable en las dos últimas verificaciones.



2. Un diagrama de amplitudes es otro medio gráfico para variables. Muestra si la amplitud global de medición está bajo o fuera de control. Los límites LCS y LCI se encuentran por medio de $D_4\overline{R}$ y $D_3\overline{R}$, respectivamente. Los factores D_4 y D_3 se tienen en el apéndice L. $\overline{R}$ es la media de las amplitudes muestrales.
3. El diagrama del porcentaje de defectuosos es una gráfica de atributos. Un ejemplo es: un cojinete está o no defectuoso. Los límites LCS y LCI se hallan mediante:

$$\overline{p} \pm 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$$

$\overline{p}$ es la media del porcentaje de defectuosos de las muestras.

4. El diagrama $\overline{c}$ es otra gráfica de atributos diseñada para controlar el número de defectos por unidad. LCS y LCI se encuentran por medio de:

$$\overline{c} \pm 3\sqrt{\overline{c}}$$

donde $\overline{c}$ es la media del número de defectos por unidad.

III. El muestreo de aceptación es un método para determinar si un lote recibido de un producto cumple las normas especificadas.

A. Se basa en técnicas de muestreo aleatorio.

B. Se consigue del lote completo una muestra aleatoria de n unidades.

C. **c** es el número máximo de unidades defectuosas que pueden encontrarse en la muestra del lote para que todavía se le considere aceptable.

D. Se elabora una curva característica de operación (CO), usando la distribución binomial de probabilidad, a fin de determinar las probabilidades de aceptar lotes con diversos niveles de calidad.

EJERCICIOS

Las respuestas de los ejercicios de número impar se dan al final del libro.

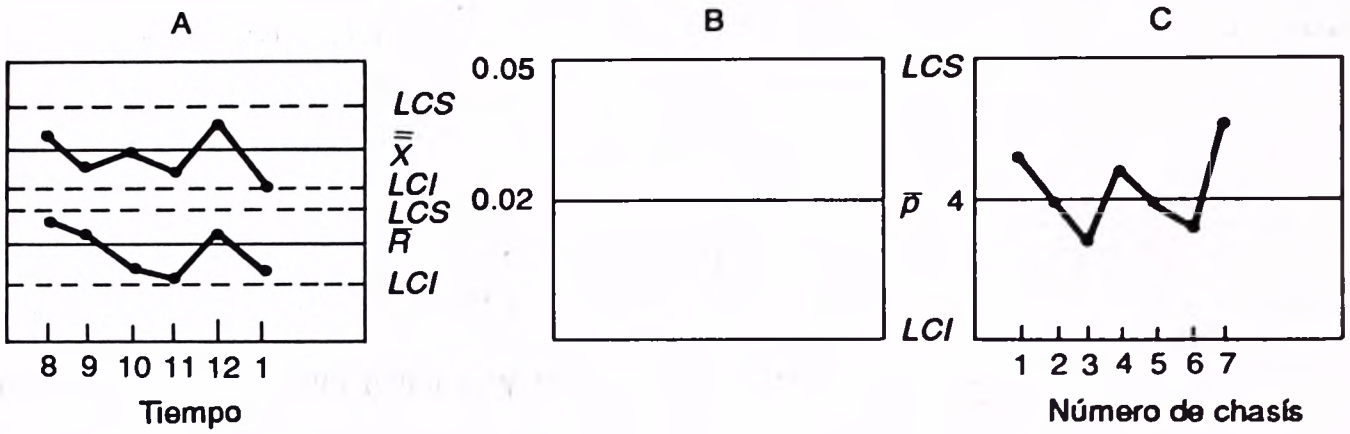
7. Un diagrama de medias y uno de amplitudes (o "rangos") se han de diseñar. Cada hora un técnico mide el espesor de la parte fabricada y registra las mediciones. También calcula el espesor medio de cuatro piezas y determina la amplitud de variación. Después de que han transcurrido 30 horas, la suma de las 30 medias se calcula como 1 356 plg y la suma de las amplitudes es 375 plg. Se considera que el proceso está bajo control.
   a. Determine la línea central, el límite superior y el límite inferior del control, para el diagrama de medias.
   b. Determine la línea central, el límite superior y el límite inferior del control para el diagrama de amplitudes.
   c. Interprete los diagramas establecidos. ¿Indican que la producción es aceptable?
8. Un fabricante de vidrio instala un horno nuevo y equipo automático para hacer tazones de vidrio. Uno de los problemas asociados con la fabricación del vidrio es la aparición de "impurezas" o defectos. (Las impurezas son burbujas que se consideran imperfecciones si pasan de un diámetro especificado.)

   Con objeto de vigilar el número de impurezas por tazón, un inspector de control de calidad selecciona 15 tazones y cuenta el número de burbujas con más de 1.5 mm de diámetro en cada uno. Los números de burbujas por tazón fueron 14, 15, 10, 10, 14, 13, 12, 10, 11, 12, 9, 12, 12, 8 y 21.
   a. Elabore un diagrama diseñado específicamente para vigilar el número de defectos por unidad. Márquense las cifras fundamentales en la gráfica.
   b. Grafique el número de imperfecciones para los 15 tazones seleccionados al azar.
   c. Interprete el diagrama.
9. Una máquina automática produce pernos de 5.0 mm a gran velocidad. Se ha iniciado un programa de calidad para controlar el número de pernos defectuosos. El inspector selecciona al azar 50 pernos y determina cuántos hay defectuosos. Los números de defectuosos para las primeras 10 muestras se indican a continuación:

Número de muestra	*Tamaño de muestra*	*Número de defectos*
1	50	3
2	50	5
3	50	0
4	50	4
5	50	1
6	50	2
7	50	6
8	50	5
9	50	7
10	50	7

   a. Diseñe un diagrama de porcentaje de defectuosos. Introduzca $\overline{p}$, LCI y el porcentaje de defectuosos en el diagrama.
   b. Localice en la gráfica el número de defectos de las primeras 10 muestras.
   c. Interprete el resultado.

10 Las siguientes cuestiones se basan en los diagramas A, B y C.



a. ¿Cuáles son los dos diagramas que se combinan en el A?
b. Según el diagrama A, ¿el proceso está bajo control o fuera de control?
c. ¿Cómo se llama el diagrama B cuando termine su elaboración?
d. ¿Con referencia otra vez al diagrama B, ¿cuál es el límite de control inferior?
e. Con referencia al diagrama C, y fundándose en la experiencia, ¿cuántos defectos hay por chasís en promedio?
f. ¿Cómo se llama el diagrama C?
g. ¿Cuáles son los límites superior e inferior de control del diagrama C?

11. Una nueva máquina se ha instalado recientemente para cortar y desbastar piezas cilíndricas grandes. Las piezas se pasan después a una rectificadora de precisión. Una medida crítica es la del diámetro exterior. El inspector de control de calidad recibió la instrucción de seleccionar cinco piezas al azar cada media hora de la producción de la máquina nueva, medir su diámetro exterior y registrar los resultados. Las medidas (en milímetros) para el periodo de 8.00 A.M. a 10.30 A.M. son las siguientes:

	Diámetro exterior (en milímetros)				
Hora	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
8:00 A.M.	87.1	87.3	87.9	87.0	87.0
8:30 A.M.	86.9	88.5	87.6	87.5	87.4
9:00 A.M.	87.5	88.4	86.9	87.6	88.2
9:30 A.M.	86.0	88.0	87.2	87.6	87.1
10:00 A.M.	87.1	87.1	87.1	87.1	87.1
10:30 A.M.	88.0	86.2	87.4	87.3	87.8

a. Diseñe un diagrama de medias. Señale los límites de control y otras cifras esenciales en la gráfica.
b. Localice las medias en el diagrama.
c. Inmediatamente abajo del diagrama de medias, trace un diagrama de amplitudes. Localice las amplitudes en la gráfica.
d. Interprete los dos diagramas.

12. Los números de pérdidas de vuelo registrados en los últimos 20 meses en un aeropuerto internacional se muestran a continuación. Elabore un diagrama de control apropiado. ¿Qué puede concluirse de una tendencia general ascendente, aun cuando el límite de control superior no se haya alcanzado?

Mes	Vuelos perdidos	Mes	Vuelos perdidos
1	3	11	5
2	2	12	2
3	1	13	3
4	4	14	1
5	5	15	1
6	0	16	3
7	1	17	3
8	3	18	2
9	0	19	3
10	2	20	3

13. Al inicio de cada temporada de futbol americano, una tienda de artículos deportivos, compra 5 000 balones. Se selecciona una muestra de 25 balones, se inflan, se prueban y se desinflan después. Si se encuentra que más de dos están defectuosos, el lote de 5 000 se devuelve al fabricante. Elabore una curva CO para este plan de muestreo.
    a. ¿Cuáles son las probabilidades de aceptar lotes que tengan 10%, 20% y 30% de defectuosos?
    b. Estime la probabilidad de aceptar un lote que tenga 15% de defectuosos.
    c. Al propietario de la tienda le agradaría que la probabilidad de aceptar un lote con 5% de defectuosos resultara superior a 90%. ¿Será este el caso con el plan de muestreo?
14. Una compañía compra cerraduras para puertas a varios vendedores. El departamento de compras es responsable de la inspección de los artículos que se reciben. Se compran 10 000 aldabas al mes y se inspeccionan 20 al azar. Obtenga una curva CO para el plan de muestreo si se admite que 3 cerraduras estén defectuosas y se acepta el lote recibido.

EXAMEN CAPITULO 21

Las respuestas se dan al final del capítulo.

Para los problemas 1 y 2, una inspectora de control de calidad verifica cada hora cinco piezas de la producción de una máquina cortadora. Mide cada pieza y registra las mediciones con aproximación a centésimos de pulgada. El registro de las primeras cuatro horas es:

Tiempo	1	2	3	4	5
8 A.M.	6.04	6.01	6.05	6.02	6.06
9 A.M.	6.01	6.02	6.03	6.02	6.02
10 A.M.	6.01	6.05	6.07	6.03	6.04
11 A.M.	6.02	6.04	6.04	6.03	6.02

1. a. Diseñe un diagrama de medias y grafique la información esencial para las cuatro horas.
   b. Interprete dicho diagrama.
2. a. Diseñe un diagrama de amplitudes y grafique la información esencial para las cuatro horas.
   b. Interprete los resultados.
3. La inspectora de control de calidad pasa luego a otra operación, donde verifica 200 piezas. Cada elemento está correcto o defectuoso. El registro para nueve horas es:

Hora	Número de piezas verificadas	Número de defectuosos
8 A.M.	200	0
9 A.M.	200	3
10 A.M.	200	4
11 A.M.	200	0
12 A.M.	200	5
1 P.M.	200	2
2 P.M.	200	0
3 P.M.	200	1
4 P.M.	200	3

a. Diseñe un diagrama de porcentaje de defectos y señale la información básica.
b. Interprete el diagrama.

4. Se inicia una nueva operación de ensamble. Un grupo pequeño de operarios en la línea de ensamble inserta partes, suelda, etc., para producir un chasís o bastidor de radio. El elemento terminado se verifica y todos los defectos deben repararse. El número de defectos por bastidor en los primeros 10 producidos es:

Número de chasís	Número de defectos
1	0
2	1
3	0
4	2
5	3
6	0
7	1
8	1
9	2
10	4

a. Diseñe un diagrama de $\overline{c}$ y grafique la información esencial.
b. Interprete el resultado.

5. Una fábrica compra cabezas para relojes en lotes de 10 000. El plan de muestreo exige la verificación de 20 cabezas, y si 3 o menos están defectuosas, se acepta el lote.
   a. Con base en dicho plan, ¿cuál es la probabilidad de que se acepte un lote con 40% de defectuosos?
   b. Diseñe una curva CO para lotes recibidos que tengan 0, 10%, 20%, 30% y 40% de cabezas defectuosas.

Autoexámenes

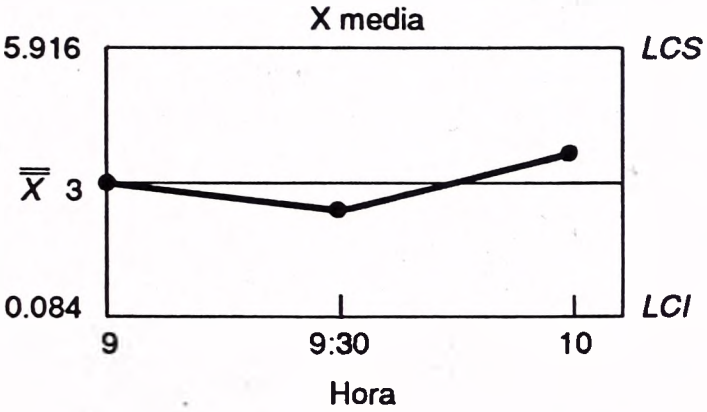
21-1

Pieza de muestra 1	2	3	4	Total	Promedio	Amplitud
1	4	5	2	12	3	4
2	3	2	1	8	2	2
1	7	3	5	16	4	6
					9	12

$$\overline{\overline{X}} = \frac{9}{3} = 3$$

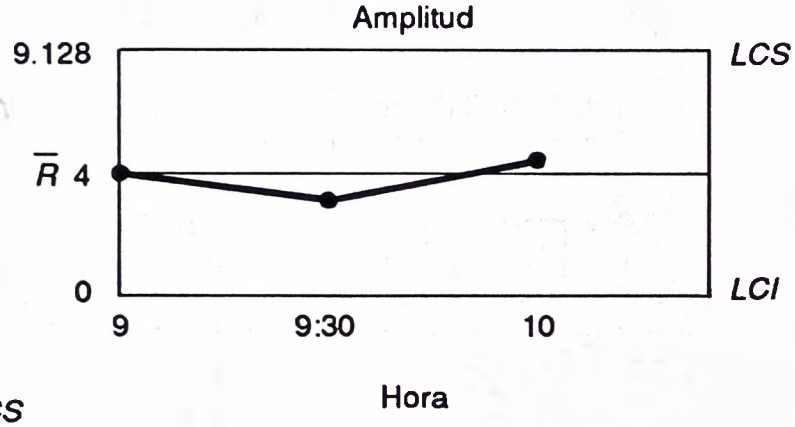
$$\overline{R} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\text{LCS y LCI} = \overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R}$$
$$= 3 \pm 0.729(4)$$
$$\text{LCS} = 5.916$$
$$\text{LCI} = 0.084$$



21-2 1.

$$\text{LCS} = \overline{R} - 3\sigma_R$$
$$= D_3\overline{R}$$
$$= 0(4)$$
$$= 0$$
$$\text{LCI} = \overline{R} + 3\sigma_R$$
$$= D_4\overline{R}$$
$$= 2.282(4)$$
$$= 9.128$$



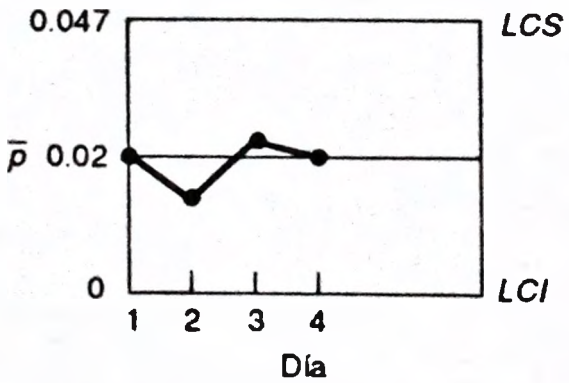
2. Sí. Tanto el diagrama de medias (autoexamen 21-1) como el de amplitudes indican que el proceso está bajo control.

21-3

Día	Número de verificación	Número de defectuosos	Porcentaje de defectuosos
1	200	4	0.02
2	200	3	0.015
3	200	5	0.025
4	200	4	0.02
			0.080

$$\bar{p} = \frac{0.08}{4} = 0.02$$

$$\text{LCS y LCI} = 0.02 \pm 3\sqrt{\frac{0.02(0.98)}{200}}$$
$$= 0.02 \pm 0.0297$$
$$= 0.497 \text{ y } 0$$

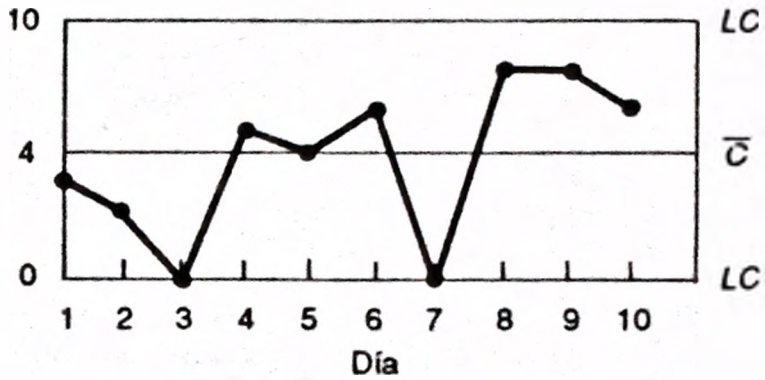


21-4 1.

$$\bar{c} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\text{LCS y LCI} = \bar{c} \pm 3\sqrt{\bar{c}} = 4 \pm 3\sqrt{4}$$
$$= 10, -2 \text{ (o bien 0)}$$

2. Sí

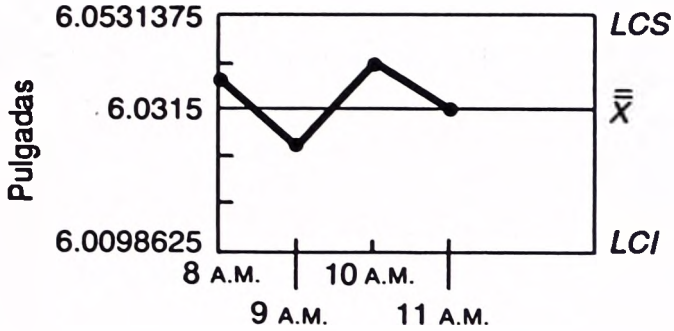


21-5

$P(x \leq 2 \mid p = 0.30 \text{ y } n = 20) = 0.035$

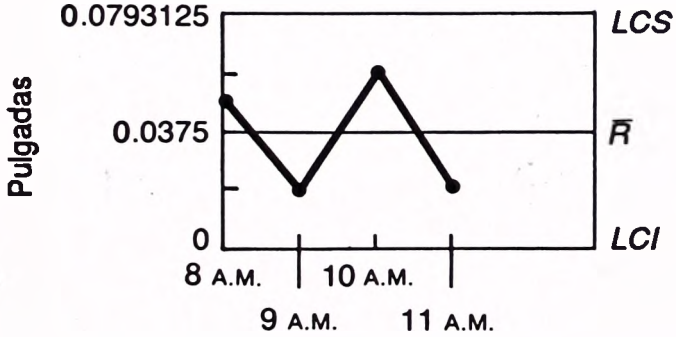
Examen capítulo 21

1. a. Los valores de LCS y LCI son 6.0531375 y 6.0098625 plg, respectivamente, encontrados por $\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R} = 6.0315 \pm 0.577(0.0375)$. Los puntos marcados son 6.036, 6.020, 6.04 y 6.03, respectivamente.



b. Si el proceso está bajo control, más del 99% de las medias muestrales de cinco piezas quedarán entre 6.0531375 plg y 6.0098625 plg. La medición media es 6.0315 plg.

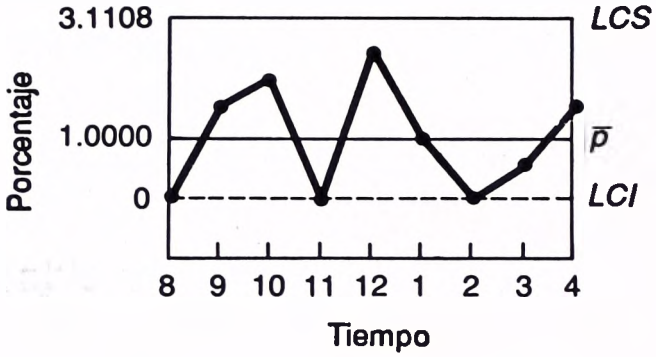
2. a. Los valores de LCS y LCI para el diagrama de amplitudes son 0.0793125 y 0, encontrados por $D_4\overline{R} = (2.115)(0.0375)$ y $D_3\overline{R} = (0)(0.0375)$. Los puntos marcados son 0.05, 0.02, 0.06 y 0.02, respectivamente.



b. Si el proceso está bajo control más del 99% de las amplitudes muestrales de cinco piezas quedarán entre 0.0793125 y 0 plg. La amplitud media es de 0.0375 plg.

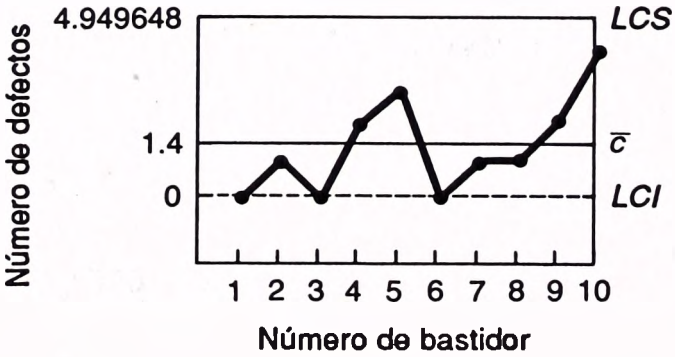
3. a. Los valores de LCS y LCI son 3.1108% y 0%, que se obtienen por:

$$0.01 \pm 3\sqrt{\frac{(0.01)(0.99)}{200}}$$



b. Si continúa la producción, como se evidencia a partir de las nueve muestras de 200 piezas seleccionadas al azar, entonces el promedio de porcentaje de defectuosos será 1.0%. Más del 99% de las muestras de 200 contendrá entre 0% y 3.1108% de defectuosos.

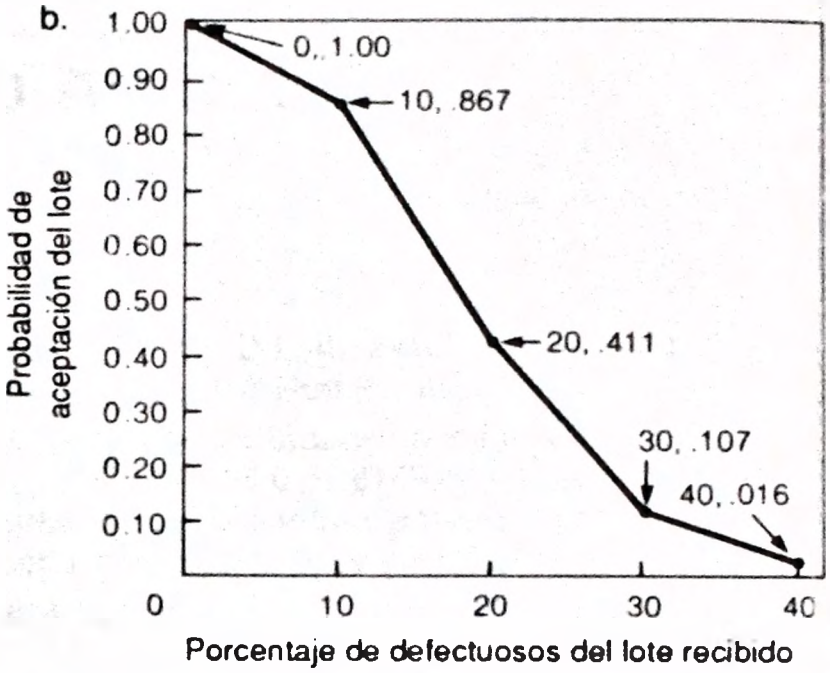
4. a. Los valores de LCS y LCI para el diagrama $\overline{c}$ son 4.949648 y 0, respectivamente, calculados con $\overline{c} \pm 3\sqrt{\overline{c}} = 1.4 \pm 3\sqrt{1.4}$.



b. Si el proceso de ensamblaje continúa, como indican los primeros 10 producidos, más del 99% de los bastidores tendrán entre 0 y 4.949648 defectos. El promedio será 1.4 defectos por bastidor.

5. a. 0.016, del apéndice B.

b.



Tablas

Apéndice A	Distribución probabilística binomial
Apéndice B	Distribución probabilística binomial acumulativa
Apéndice C	Distribución de Poisson: probabilidad de exactamente x ocurrencias
Apéndice D	Areas bajo la curva normal
Apéndice E	Tabla de números aleatorios
Apéndice F	Distribución *t* de Student
Apéndice G	Valores críticos de la distribución *F* al nivel de significación de 5% $\alpha = 0.05$
Apéndice H	Valores críticos de ρ, coeficiente de correlación de rangos de Spearman
Apéndice I	Valores críticos de ji-cuadrada
Apéndice J	Valores críticos de *U* en la prueba de Mann-Whitney
Apéndice K	Valores *T* de Wilcoxon
Apéndice L	Factores para diagramas de control

APENDICE A

Distribución probabilística binomial

n= 1

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.050
1	.050	.100	.200	.300	.400	.500	.600	.700	.800	.900	.950

n= 2

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.903	.810	.640	.490	.360	.250	.160	.090	.040	.010	.003
1	.095	.180	.320	.420	.480	.500	.480	.420	.320	.180	.095
2	.003	.010	.040	.090	.160	.250	.360	.490	.640	.810	.903

n= 3

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.857	.729	.512	.343	.216	.125	.064	.027	.008	.001	.000
1	.135	.243	.384	.441	.432	.375	.288	.189	.096	.027	.007
2	.007	.027	.096	.189	.288	.375	.432	.441	.384	.243	.135
3	.000	.001	.008	.027	.064	.125	.216	.343	.512	.729	.857

APENDICE A

(continúa)

n= 4

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.815	.656	.410	.240	.130	.063	.026	.008	.002	.000	.000
1	.171	.292	.410	.412	.346	.250	.154	.076	.026	.004	.000
2	.014	.049	.154	.265	.346	.375	.346	.265	.154	.049	.014
3	.000	.004	.026	.076	.154	.250	.346	.412	.410	.292	.171
4	.000	.000	.002	.008	.026	.063	.130	.240	.410	.656	.815

n= 5

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.774	.590	.328	.168	.078	.031	.010	.002	.000	.000	.000
1	.204	.328	.410	.360	.259	.156	.077	.028	.006	.000	.000
2	.021	.073	.205	.309	.346	.313	.230	.132	.051	.008	.001
3	.001	.008	.051	.132	.230	.313	.346	.309	.205	.073	.021
4	.000	.000	.006	.028	.077	.156	.259	.360	.410	.328	.204
5	.000	.000	.000	.002	.010	.031	.078	.168	.328	.590	.774

n= 6

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.735	.531	.262	.118	.047	.016	.004	.001	.000	.000	.000
1	.232	.354	.393	.303	.187	.094	.037	.010	.002	.000	.000
2	.031	.098	.246	.324	.311	.234	.138	.060	.015	.001	.000
3	.002	.015	.082	.185	.276	.313	.276	.185	.082	.015	.002
4	.000	.001	.015	.060	.138	.234	.311	.324	.246	.098	.031
5	.000	.000	.002	.010	.037	.094	.187	.303	.393	.354	.232
6	.000	.000	.000	.001	.004	.016	.047	.118	.262	.531	.735

APENDICE A

(continúa)

n= 7

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.698	.478	.210	.082	.028	.008	.002	.000	.000	.000	.000
1	.257	.372	.367	.247	.131	.055	.017	.004	.000	.000	.000
2	.041	.124	.275	.318	.261	.164	.077	.025	.004	.000	.000
3	.004	.023	.115	.227	.290	.273	.194	.097	.029	.003	.000
4	.000	.003	.029	.097	.194	.273	.290	.227	.115	.023	.004
5	.000	.000	.004	.025	.077	.164	.261	.318	.275	.124	.041
6	.000	.000	.000	.004	.017	.055	.131	.247	.367	.372	.257
7	.000	.000	.000	.000	.002	.008	.028	.082	.210	.478	.698

n= 8

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.663	.430	.168	.058	.017	.004	.001	.000	.000	.000	.000
1	.279	.383	.336	.198	.090	.031	.008	.001	.000	.000	.000
2	.051	.149	.294	.296	.209	.109	.041	.010	.001	.000	.000
3	.005	.033	.147	.254	.279	.219	.124	.047	.009	.000	.000
4	.000	.005	.046	.136	.232	.273	.232	.136	.046	.005	.000
5	.000	.000	.009	.047	.124	.219	.279	.254	.147	.033	.005
6	.000	.000	.001	.010	.041	.109	.209	.296	.294	.149	.051
7	.000	.000	.000	.001	.008	.031	.090	.198	.336	.383	.279
8	.000	.000	.000	.000	.001	.004	.017	.058	.168	.430	.663

n= 9

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.630	.387	.134	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000	.000
1	.299	.387	.302	.156	.060	.018	.004	.000	.000	.000	.000
2	.063	.172	.302	.267	.161	.070	.021	.004	.000	.000	.000
3	.008	.045	.176	.267	.251	.164	.074	.021	.003	.000	.000
4	.001	.007	.066	.172	.251	.246	.167	.074	.017	.001	.000
5	.000	.001	.017	.074	.167	.246	.251	.172	.066	.007	.001
6	.000	.000	.003	.021	.074	.164	.251	.267	.176	.045	.008
7	.000	.000	.000	.004	.021	.070	.161	.267	.302	.172	.063
8	.000	.000	.000	.000	.004	.018	.060	.156	.302	.387	.299
9	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.010	.040	.134	.387	.630

APENDICE A

(continúa)

n= 10

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
1	.315	.387	.268	.121	.040	.010	.002	.000	.000	.000	.000
2	.075	.194	.302	.233	.121	.044	.011	.001	.000	.000	.000
3	.010	.057	.201	.267	.215	.117	.042	.009	.001	.000	.000
4	.001	.011	.088	.200	.251	.205	.111	.037	.006	.000	.000
5	.000	.001	.026	.103	.201	.246	.201	.103	.026	.001	.000
6	.000	.000	.006	.037	.111	.205	.251	.200	.088	.011	.001
7	.000	.000	.001	.009	.042	.117	.215	.267	.201	.057	.010
8	.000	.000	.000	.001	.011	.044	.121	.233	.302	.194	.075
9	.000	.000	.000	.000	.002	.010	.040	.121	.268	.387	.315
10	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.006	.028	.107	.349	.599

n= 11

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.569	.314	.086	.020	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.329	.384	.236	.093	.027	.005	.001	.000	.000	.000	.000
2	.087	.213	.295	.200	.089	.027	.005	.001	.000	.000	.000
3	.014	.071	.221	.257	.177	.081	.023	.004	.000	.000	.000
4	.001	.016	.111	.220	.236	.161	.070	.017	.002	.000	.000
5	.000	.002	.039	.132	.221	.226	.147	.057	.010	.000	.000
6	.000	.000	.010	.057	.147	.226	.221	.132	.039	.002	.000
7	.000	.000	.002	.017	.070	.161	.236	.220	.111	.016	.001
8	.000	.000	.000	.004	.023	.081	.177	.257	.221	.071	.014
9	.000	.000	.000	.001	.005	.027	.089	.200	.295	.213	.087
10	.000	.000	.000	.000	.001	.005	.027	.093	.236	.384	.329
11	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.004	.020	.086	.314	.569

APENDICE A

(continúa)

n= 12

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.540	.282	.069	.014	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.341	.377	.206	.071	.017	.003	.000	.000	.000	.000	.000
2	.099	.230	.283	.168	.064	.016	.002	.000	.000	.000	.000
3	.017	.085	.236	.240	.142	.054	.012	.001	.000	.000	.000
4	.002	.021	.133	.231	.213	.121	.042	.008	.001	.000	.000
5	.000	.004	.053	.158	.227	.193	.101	.029	.003	.000	.000
6	.000	.000	.016	.079	.177	.226	.177	.079	.016	.000	.000
7	.000	.000	.003	.029	.101	.193	.227	.158	.053	.004	.000
8	.000	.000	.001	.008	.042	.121	.213	.231	.133	.021	.002
9	.000	.000	.000	.001	.012	.054	.142	.240	.236	.085	.017
10	.000	.000	.000	.000	.002	.016	.064	.168	.283	.230	.099
11	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.017	.071	.206	.377	.341
12	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.014	.069	.282	.540

n= 13

PROBABILIDAD

	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.513	.254	.055	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.351	.367	.179	.054	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000
2	.111	.245	.268	.139	.045	.010	.001	.000	.000	.000	.000
3	.021	.100	.246	.218	.111	.035	.006	.001	.000	.000	.000
4	.003	.028	.154	.234	.184	.087	.024	.003	.000	.000	.000
5	.000	.006	.069	.180	.221	.157	.066	.014	.001	.000	.000
6	.000	.001	.023	.103	.197	.209	.131	.044	.006	.000	.000
7	.000	.000	.006	.044	.131	.209	.197	.103	.023	.001	.000
8	.000	.000	.001	.014	.066	.157	.221	.180	.069	.006	.000
9	.000	.000	.000	.003	.024	.087	.184	.234	.154	.028	.003
10	.000	.000	.000	.001	.006	.035	.111	.218	.246	.100	.021
11	.000	.000	.000	.000	.001	.010	.045	.139	.268	.245	.111
12	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.011	.054	.179	.367	.351
13	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.010	.055	.254	.513

APENDICE A

(continúa)

n= 14

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.488	.229	.044	.007	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.359	.356	.154	.041	.007	.001	.000	.000	.000	.000	.000
2	.123	.257	.250	.113	.032	.006	.001	.000	.000	.000	.000
3	.026	.114	.250	.194	.085	.022	.003	.000	.000	.000	.000
4	.004	.035	.172	.229	.155	.061	.014	.001	.000	.000	.000
5	.000	.008	.086	.196	.207	.122	.041	.007	.000	.000	.000
6	.000	.001	.032	.126	.207	.183	.092	.023	.002	.000	.000
7	.000	.000	.009	.062	.157	.209	.157	.062	.009	.000	.000
8	.000	.000	.002	.023	.092	.183	.207	.126	.032	.001	.000
9	.000	.000	.000	.007	.041	.122	.207	.196	.086	.008	.000
10	.000	.000	.000	.001	.014	.061	.155	.229	.172	.035	.004
11	.000	.000	.000	.000	.003	.022	.085	.194	.250	.114	.026
12	.000	.000	.000	.000	.001	.006	.032	.113	.250	.257	.123
13	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.007	.041	.154	.356	.359
14	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.007	.044	.229	.488

n= 15

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.463	.206	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.366	.343	.132	.031	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.135	.267	.231	.092	.022	.003	.000	.000	.000	.000	.000
3	.031	.129	.250	.170	.063	.014	.002	.000	.000	.000	.000
4	.005	.043	.188	.219	.127	.042	.007	.001	.000	.000	.000
5	.001	.010	.103	.206	.186	.092	.024	.003	.000	.000	.000
6	.000	.002	.043	.147	.207	.153	.061	.012	.001	.000	.000
7	.000	.000	.014	.081	.177	.196	.118	.035	.003	.000	.000
8	.000	.000	.003	.035	.118	.196	.177	.081	.014	.000	.000
9	.000	.000	.001	.012	.061	.153	.207	.147	.043	.002	.000
10	.000	.000	.000	.003	.024	.092	.186	.206	.103	.010	.001
11	.000	.000	.000	.001	.007	.042	.127	.219	.188	.043	.005
12	.000	.000	.000	.000	.002	.014	.063	.170	.250	.129	.031
13	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.022	.092	.231	.267	.135
14	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.031	.132	.343	.366
15	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.035	.206	.463

APENDICE A

(continúa)

n=16

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.440	.185	.028	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.371	.329	.113	.023	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.146	.275	.211	.073	.015	.002	.000	.000	.000	.000	.000
3	.036	.142	.246	.146	.047	.009	.001	.000	.000	.000	.000
4	.006	.051	.200	.204	.101	.028	.004	.000	.000	.000	.000
5	.001	.014	.120	.210	.162	.067	.014	.001	.000	.000	.000
6	.000	.003	.055	.165	.198	.122	.039	.006	.000	.000	.000
7	.000	.000	.020	.101	.189	.175	.084	.019	.001	.000	.000
8	.000	.000	.006	.049	.142	.196	.142	.049	.006	.000	.000
9	.000	.000	.001	.019	.084	.175	.189	.101	.020	.000	.000
10	.000	.000	.000	.006	.039	.122	.198	.165	.055	.003	.000
11	.000	.000	.000	.001	.014	.067	.162	.210	.120	.014	.001
12	.000	.000	.000	.000	.004	.028	.101	.204	.200	.051	.006
13	.000	.000	.000	.000	.001	.009	.047	.146	.246	.142	.036
14	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.015	.073	.211	.275	.146
15	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.023	.113	.329	.371
16	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.028	.185	.440

n= 17

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.418	.167	.023	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.374	.315	.096	.017	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.158	.280	.191	.058	.010	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3	.041	.156	.239	.125	.034	.005	.000	.000	.000	.000	.000
4	.008	.060	.209	.187	.080	.018	.002	.000	.000	.000	.000
5	.001	.017	.136	.208	.138	.047	.008	.001	.000	.000	.000
6	.000	.004	.068	.178	.184	.094	.024	.003	.000	.000	.000
7	.000	.001	.027	.120	.193	.148	.057	.009	.000	.000	.000
8	.000	.000	.008	.064	.161	.185	.107	.028	.002	.000	.000
9	.000	.000	.002	.028	.107	.185	.161	.064	.008	.000	.000
10	.000	.000	.000	.009	.057	.148	.193	.120	.027	.001	.000
11	.000	.000	.000	.003	.024	.094	.184	.178	.068	.004	.000
12	.000	.000	.000	.001	.008	.047	.138	.208	.136	.017	.001
13	.000	.000	.000	.000	.002	.018	.080	.187	.209	.060	.008
14	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.034	.125	.239	.156	.041
15	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.010	.058	.191	.280	.158
16	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.017	.096	.315	.374
17	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.023	.167	.418

APENDICE A

(continúa)

n= 18

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.397	.150	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.376	.300	.081	.013	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.168	.284	.172	.046	.007	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3	.047	.168	.230	.105	.025	.003	.000	.000	.000	.000	.000
4	.009	.070	.215	.168	.061	.012	.001	.000	.000	.000	.000
5	.001	.022	.151	.202	.115	.033	.004	.000	.000	.000	.000
6	.000	.005	.082	.187	.166	.071	.015	.001	.000	.000	.000
7	.000	.001	.035	.138	.189	.121	.037	.005	.000	.000	.000
8	.000	.000	.012	.081	.173	.167	.077	.015	.001	.000	.000
9	.000	.000	.003	.039	.128	.185	.128	.039	.003	.000	.000
10	.000	.000	.001	.015	.077	.167	.173	.081	.012	.000	.000
11	.000	.000	.000	.005	.037	.121	.189	.138	.035	.001	.000
12	.000	.000	.000	.001	.015	.071	.166	.187	.082	.005	.000
13	.000	.000	.000	.000	.004	.033	.115	.202	.151	.022	.001
14	.000	.000	.000	.000	.001	.012	.061	.168	.215	.070	.009
15	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.025	.105	.230	.168	.047
16	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.007	.046	.172	.284	.168
17	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.013	.081	.300	.376
18	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.018	.150	.397

n= 19

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.377	.135	.014	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.377	.285	.068	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.179	.285	.154	.036	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.053	.180	.218	.087	.017	.002	.000	.000	.000	.000	.000
4	.011	.080	.218	.149	.047	.007	.001	.000	.000	.000	.000
5	.002	.027	.164	.192	.093	.022	.002	.000	.000	.000	.000
6	.000	.007	.095	.192	.145	.052	.008	.001	.000	.000	.000
7	.000	.001	.044	.153	.180	.096	.024	.002	.000	.000	.000
8	.000	.000	.017	.098	.180	.144	.053	.008	.000	.000	.000
9	.000	.000	.005	.051	.146	.176	.098	.022	.001	.000	.000
10	.000	.000	.001	.022	.098	.176	.146	.051	.005	.000	.000
11	.000	.000	.000	.008	.053	.144	.180	.098	.017	.000	.000
12	.000	.000	.000	.002	.024	.096	.180	.153	.044	.001	.000
13	.000	.000	.000	.001	.008	.052	.145	.192	.095	.007	.000
14	.000	.000	.000	.000	.002	.022	.093	.192	.164	.027	.002
15	.000	.000	.000	.000	.001	.007	.047	.149	.218	.080	.011
16	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.017	.087	.218	.180	.053
17	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.036	.154	.285	.179
18	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.009	.068	.285	.377
19	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.014	.135	.377

APENDICE A

(continúa)

n= 20

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.358	.122	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.377	.270	.058	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.189	.285	.137	.028	.003	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.060	.190	.205	.072	.012	.001	.000	.000	.000	.000	.000
4	.013	.090	.218	.130	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000
5	.002	.032	.175	.179	.075	.015	.001	.000	.000	.000	.000
6	.000	.009	.109	.192	.124	.037	.005	.000	.000	.000	.000
7	.000	.002	.055	.164	.166	.074	.015	.001	.000	.000	.000
8	.000	.000	.022	.114	.180	.120	.035	.004	.000	.000	.000
9	.000	.000	.007	.065	.160	.160	.071	.012	.000	.000	.000
10	.000	.000	.002	.031	.117	.176	.117	.031	.002	.000	.000
11	.000	.000	.000	.012	.071	.160	.160	.065	.007	.000	.000
12	.000	.000	.000	.004	.035	.120	.180	.114	.022	.000	.000
13	.000	.000	.000	.001	.015	.074	.166	.164	.055	.002	.000
14	.000	.000	.000	.000	.005	.037	.124	.192	.109	.009	.000
15	.000	.000	.000	.000	.001	.015	.075	.179	.175	.032	.002
16	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.035	.130	.218	.090	.013
17	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.012	.072	.205	.190	.060
18	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.003	.028	.137	.285	.189
19	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.058	.270	.377
20	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.012	.122	.358

APENDICE A

(concluye)

n= 25

PROBABILIDAD

r	.05	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.95
0	.277	.072	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.365	.199	.024	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.231	.266	.071	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	.093	.226	.136	.024	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	.027	.138	.187	.057	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	.006	.065	.196	.103	.020	.002	.000	.000	.000	.000	.000
6	.001	.024	.163	.147	.044	.005	.000	.000	.000	.000	.000
7	.000	.007	.111	.171	.080	.014	.001	.000	.000	.000	.000
8	.000	.002	.062	.165	.120	.032	.003	.000	.000	.000	.000
9	.000	.000	.029	.134	.151	.061	.009	.000	.000	.000	.000
10	.000	.000	.012	.092	.161	.097	.021	.001	.000	.000	.000
11	.000	.000	.004	.054	.147	.133	.043	.004	.000	.000	.000
12	.000	.000	.001	.027	.114	.155	.076	.011	.000	.000	.000
13	.000	.000	.000	.011	.076	.155	.114	.027	.001	.000	.000
14	.000	.000	.000	.004	.043	.133	.147	.054	.004	.000	.000
15	.000	.000	.000	.001	.021	.097	.161	.092	.012	.000	.000
16	.000	.000	.000	.000	.009	.061	.151	.134	.029	.000	.000
17	.000	.000	.000	.000	.003	.032	.120	.165	.062	.002	.000
18	.000	.000	.000	.000	.001	.014	.080	.171	.111	.007	.000
19	.000	.000	.000	.000	.000	.005	.044	.147	.163	.024	.001
20	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.020	.103	.196	.065	.006
21	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.057	.187	.138	.027
22	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.002	.024	.136	.226	.093
23	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.071	.266	.231
24	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.024	.199	.365
25	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.004	.072	.277

APENDICE B

Distribuciones probabilísticas binomiales acumulativas

n= 1

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.900	0.800	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 2

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010
1	0.990	0.960	0.910	0.840	0.750	0.640	0.510	0.360	0.190
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 3

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001
1	0.972	0.896	0.784	0.648	0.500	0.352	0.216	0.104	0.028
2	0.999	0.992	0.973	0.936	0.875	0.784	0.657	0.488	0.271
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 4

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.656	0.410	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.002	0.000
1	0.948	0.819	0.652	0.475	0.313	0.179	0.084	0.027	0.004
2	0.996	0.973	0.916	0.821	0.688	0.525	0.348	0.181	0.052
3	1.000	0.998	0.992	0.974	0.938	0.870	0.760	0.590	0.344
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 5

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.000	0.000
1	0.919	0.737	0.528	0.337	0.188	0.087	0.031	0.007	0.000
2	0.991	0.942	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.058	0.009
3	1.000	0.993	0.969	0.913	0.813	0.663	0.472	0.263	0.081
4	1.000	1.000	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.672	0.410
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 6

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000
1	0.886	0.655	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.002	0.000
2	0.984	0.901	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.017	0.001
3	0.999	0.983	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.099	0.016
4	1.000	0.998	0.989	0.959	0.891	0.767	0.580	0.345	0.114
5	1.000	1.000	0.999	0.996	0.984	0.953	0.882	0.738	0.469
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 7

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000
1	0.850	0.577	0.329	0.159	0.063	0.019	0.004	0.000	0.000
2	0.974	0.852	0.647	0.420	0.227	0.096	0.029	0.005	0.000
3	0.997	0.967	0.874	0.710	0.500	0.290	0.126	0.033	0.003
4	1.000	0.995	0.971	0.904	0.773	0.580	0.353	0.148	0.026
5	1.000	1.000	0.996	0.981	0.938	0.841	0.671	0.423	0.150
6	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.972	0.918	0.790	0.522
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 8

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.813	0.503	0.255	0.106	0.035	0.009	0.001	0.000	0.000
2	0.962	0.797	0.552	0.315	0.145	0.050	0.011	0.001	0.000
3	0.995	0.944	0.806	0.594	0.363	0.174	0.058	0.010	0.000
4	1.000	0.990	0.942	0.826	0.637	0.406	0.194	0.056	0.005
5	1.000	0.999	0.989	0.950	0.855	0.685	0.448	0.203	0.038
6	1.000	1.000	0.999	0.991	0.965	0.894	0.745	0.497	0.187
7	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.942	0.832	0.570
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 9

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.775	0.436	0.196	0.071	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000
2	0.947	0.738	0.463	0.232	0.090	0.025	0.004	0.000	0.000
3	0.992	0.914	0.730	0.483	0.254	0.099	0.025	0.003	0.000
4	0.999	0.980	0.901	0.733	0.500	0.267	0.099	0.020	0.001
5	1.000	0.997	0.975	0.901	0.746	0.517	0.270	0.086	0.008
6	1.000	1.000	0.996	0.975	0.910	0.768	0.537	0.262	0.053
7	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.929	0.804	0.564	0.225
8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.990	0.960	0.866	0.613
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 10

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.736	0.376	0.149	0.046	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000
2	0.930	0.678	0.383	0.167	0.055	0.012	0.002	0.000	0.000
3	0.987	0.879	0.650	0.382	0.172	0.055	0.011	0.001	0.000
4	0.998	0.967	0.850	0.633	0.377	0.166	0.047	0.006	0.000
5	1.000	0.994	0.953	0.834	0.623	0.367	0.150	0.033	0.002
6	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.013
7	1.000	1.000	0.998	0.988	0.945	0.833	0.617	0.322	0.070
8	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	0.954	0.851	0.624	0.264
9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.972	0.893	0.651
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 11

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.314	0.086	0.020	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.697	0.322	0.113	0.030	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.910	0.617	0.313	0.119	0.033	0.006	0.001	0.000	0.000
3	0.981	0.839	0.570	0.296	0.113	0.029	0.004	0.000	0.000
4	0.997	0.950	0.790	0.533	0.274	0.099	0.022	0.002	0.000
5	1.000	0.988	0.922	0.753	0.500	0.247	0.078	0.012	0.000
6	1.000	0.998	0.978	0.901	0.726	0.467	0.210	0.050	0.003
7	1.000	1.000	0.996	0.971	0.887	0.704	0.430	0.161	0.019
8	1.000	1.000	0.999	0.994	0.967	0.881	0.687	0.383	0.090
9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.970	0.887	0.678	0.303
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.980	0.914	0.686
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 12

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.282	0.069	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.659	0.275	0.085	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.889	0.558	0.253	0.083	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000
3	0.974	0.795	0.493	0.225	0.073	0.015	0.002	0.000	0.000
4	0.996	0.927	0.724	0.438	0.194	0.057	0.009	0.001	0.000
5	0.999	0.981	0.882	0.665	0.387	0.158	0.039	0.004	0.000
6	1.000	0.996	0.961	0.842	0.613	0.335	0.118	0.019	0.001
7	1.000	0.999	0.991	0.943	0.806	0.562	0.276	0.073	0.004
8	1.000	1.000	0.998	0.985	0.927	0.775	0.507	0.205	0.026
9	1.000	1.000	1.000	0.997	0.981	0.917	0.747	0.442	0.111
10	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.980	0.915	0.725	0.341
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.986	0.931	0.718
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 13

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.254	0.055	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.621	0.234	0.064	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.866	0.502	0.202	0.058	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000
3	0.966	0.747	0.421	0.169	0.046	0.008	0.001	0.000	0.000
4	0.994	0.901	0.654	0.353	0.133	0.032	0.004	0.000	0.000
5	0.999	0.970	0.835	0.574	0.291	0.098	0.018	0.001	0.000
6	1.000	0.993	0.938	0.771	0.500	0.229	0.062	0.007	0.000
7	1.000	0.999	0.982	0.902	0.709	0.426	0.165	0.030	0.001
8	1.000	1.000	0.996	0.968	0.867	0.647	0.346	0.099	0.006
9	1.000	1.000	0.999	0.992	0.954	0.831	0.579	0.253	0.034
10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.942	0.798	0.498	0.134
11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.987	0.936	0.766	0.379
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.945	0.746
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 14

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.229	0.044	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.585	0.198	0.047	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.842	0.448	0.161	0.040	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
3	0.956	0.698	0.355	0.124	0.029	0.004	0.000	0.000	0.000
4	0.991	0.870	0.584	0.279	0.090	0.018	0.002	0.000	0.000
5	0.999	0.956	0.781	0.486	0.212	0.058	0.008	0.000	0.000
6	1.000	0.988	0.907	0.692	0.395	0.150	0.031	0.002	0.000
7	1.000	0.998	0.969	0.850	0.605	0.308	0.093	0.012	0.000
8	1.000	1.000	0.992	0.942	0.788	0.514	0.219	0.044	0.001
9	1.000	1.000	0.998	0.982	0.910	0.721	0.416	0.130	0.009
10	1.000	1.000	1.000	0.996	0.971	0.876	0.645	0.302	0.044
11	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.960	0.839	0.552	0.158
12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.953	0.802	0.415
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.956	0.771
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 15

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.206	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.549	0.167	0.035	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.816	0.398	0.127	0.027	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.944	0.648	0.297	0.091	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000
4	0.987	0.836	0.515	0.217	0.059	0.009	0.001	0.000	0.000
5	0.998	0.939	0.722	0.403	0.151	0.034	0.004	0.000	0.000
6	1.000	0.982	0.869	0.610	0.304	0.095	0.015	0.001	0.000
7	1.000	0.996	0.950	0.787	0.500	0.213	0.050	0.004	0.000
8	1.000	0.999	0.985	0.905	0.696	0.390	0.131	0.018	0.000
9	1.000	1.000	0.996	0.966	0.849	0.597	0.278	0.061	0.002
10	1.000	1.000	0.999	0.991	0.941	0.783	0.485	0.164	0.013
11	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.909	0.703	0.352	0.056
12	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.973	0.873	0.602	0.184
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.965	0.833	0.451
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.965	0.794
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 16

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.185	0.028	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.515	0.141	0.026	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.789	0.352	0.099	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.932	0.598	0.246	0.065	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000
4	0.983	0.798	0.450	0.167	0.038	0.005	0.000	0.000	0.000
5	0.997	0.918	0.660	0.329	0.105	0.019	0.002	0.000	0.000
6	0.999	0.973	0.825	0.527	0.227	0.058	0.007	0.000	0.000
7	1.000	0.993	0.926	0.716	0.402	0.142	0.026	0.001	0.000
8	1.000	0.999	0.974	0.858	0.598	0.284	0.074	0.007	0.000
9	1.000	1.000	0.993	0.942	0.773	0.473	0.175	0.027	0.001
10	1.000	1.000	0.998	0.981	0.895	0.671	0.340	0.082	0.003
11	1.000	1.000	1.000	0.995	0.962	0.833	0.550	0.202	0.017
12	1.000	1.000	1.000	0.999	0.989	0.935	0.754	0.402	0.068
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.901	0.648	0.211
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.974	0.859	0.485
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.972	0.815
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 17

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.167	0.023	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.482	0.118	0.019	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.762	0.310	0.077	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.917	0.549	0.202	0.046	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.978	0.758	0.389	0.126	0.025	0.003	0.000	0.000	0.000
5	0.995	0.894	0.597	0.264	0.072	0.011	0.001	0.000	0.000
6	0.999	0.962	0.775	0.448	0.166	0.035	0.003	0.000	0.000
7	1.000	0.989	0.895	0.641	0.315	0.092	0.013	0.000	0.000
8	1.000	0.997	0.960	0.801	0.500	0.199	0.040	0.003	0.000
9	1.000	1.000	0.987	0.908	0.685	0.359	0.105	0.011	0.000
10	1.000	1.000	0.997	0.965	0.834	0.552	0.225	0.038	0.001
11	1.000	1.000	0.999	0.989	0.928	0.736	0.403	0.106	0.005
12	1.000	1.000	1.000	0.997	0.975	0.874	0.611	0.242	0.022
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.954	0.798	0.451	0.083
14	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.923	0.690	0.238
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.981	0.882	0.518
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.977	0.833
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 18

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.150	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.450	0.099	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.734	0.271	0.060	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.902	0.501	0.165	0.033	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.972	0.716	0.333	0.094	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000
5	0.994	0.867	0.534	0.209	0.048	0.006	0.000	0.000	0.000
6	0.999	0.949	0.722	0.374	0.119	0.020	0.001	0.000	0.000
7	1.000	0.984	0.859	0.563	0.240	0.058	0.006	0.000	0.000
8	1.000	0.996	0.940	0.737	0.407	0.135	0.021	0.001	0.000
9	1.000	0.999	0.979	0.865	0.593	0.263	0.060	0.004	0.000
10	1.000	1.000	0.994	0.942	0.760	0.437	0.141	0.016	0.000
11	1.000	1.000	0.999	0.980	0.881	0.626	0.278	0.051	0.001
12	1.000	1.000	1.000	0.994	0.952	0.791	0.466	0.133	0.006
13	1.000	1.000	1.000	0.999	0.985	0.906	0.667	0.284	0.028
14	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.967	0.835	0.499	0.098
15	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.940	0.729	0.266
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.986	0.901	0.550
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.850
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(continúa)

n= 19

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.135	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.420	0.083	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.705	0.237	0.046	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.885	0.455	0.133	0.023	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.965	0.673	0.282	0.070	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000
5	0.991	0.837	0.474	0.163	0.032	0.003	0.000	0.000	0.000
6	0.998	0.932	0.666	0.308	0.084	0.012	0.001	0.000	0.000
7	1.000	0.977	0.818	0.488	0.180	0.035	0.003	0.000	0.000
8	1.000	0.993	0.916	0.667	0.324	0.088	0.011	0.000	0.000
9	1.000	0.998	0.967	0.814	0.500	0.186	0.033	0.002	0.000
10	1.000	1.000	0.989	0.912	0.676	0.333	0.084	0.007	0.000
11	1.000	1.000	0.997	0.965	0.820	0.512	0.182	0.023	0.000
12	1.000	1.000	0.999	0.988	0.916	0.692	0.334	0.068	0.002
13	1.000	1.000	1.000	0.997	0.968	0.837	0.526	0.163	0.009
14	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.930	0.718	0.327	0.035
15	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.977	0.867	0.545	0.115
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.995	0.954	0.763	0.295
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.990	0.917	0.580
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.986	0.865
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

n= 20

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.122	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.392	0.069	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.677	0.206	0.035	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.867	0.411	0.107	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.957	0.630	0.238	0.051	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.989	0.804	0.416	0.126	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000
6	0.998	0.913	0.608	0.250	0.058	0.006	0.000	0.000	0.000
7	1.000	0.968	0.772	0.416	0.132	0.021	0.001	0.000	0.000
8	1.000	0.990	0.887	0.596	0.252	0.057	0.005	0.000	0.000
9	1.000	0.997	0.952	0.755	0.412	0.128	0.017	0.001	0.000
10	1.000	0.999	0.983	0.872	0.588	0.245	0.048	0.003	0.000
11	1.000	1.000	0.995	0.943	0.748	0.404	0.113	0.010	0.000
12	1.000	1.000	0.999	0.979	0.868	0.584	0.228	0.032	0.000
13	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	0.750	0.392	0.087	0.002
14	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	0.874	0.584	0.196	0.011
15	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.949	0.762	0.370	0.043
16	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.893	0.589	0.133
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.965	0.794	0.323
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.931	0.608
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.878
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE B

(concluye)

n= 25

PROBABILIDAD

r	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0	0.072	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.271	0.027	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.537	0.098	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.764	0.234	0.033	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.902	0.421	0.090	0.009	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.967	0.617	0.193	0.029	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.991	0.780	0.341	0.074	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.998	0.891	0.512	0.154	0.022	0.001	0.000	0.000	0.000
8	1.000	0.953	0.677	0.274	0.054	0.004	0.000	0.000	0.000
9	1.000	0.983	0.811	0.425	0.115	0.013	0.000	0.000	0.000
10	1.000	0.994	0.902	0.586	0.212	0.034	0.002	0.000	0.000
11	1.000	0.998	0.956	0.732	0.345	0.078	0.006	0.000	0.000
12	1.000	1.000	0.983	0.846	0.500	0.154	0.017	0.000	0.000
13	1.000	1.000	0.994	0.922	0.655	0.268	0.044	0.002	0.000
14	1.000	1.000	0.998	0.966	0.788	0.414	0.098	0.006	0.000
15	1.000	1.000	1.000	0.987	0.885	0.575	0.189	0.017	0.000
16	1.000	1.000	1.000	0.996	0.946	0.726	0.323	0.047	0.000
17	1.000	1.000	1.000	0.999	0.978	0.846	0.488	0.109	0.002
18	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.926	0.659	0.220	0.009
19	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.971	0.807	0.383	0.033
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.910	0.579	0.098
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.967	0.766	0.236
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.991	0.902	0.463
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.973	0.729
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.928
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

APENDICE C

Distribución de Poisson: probabilidad de exactamente x ocurrencias

	μ								
x	*0.1*	*0.2*	*0.3*	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4		0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5					0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020
6							0.0001	0.0002	0.0003

APENDICE C

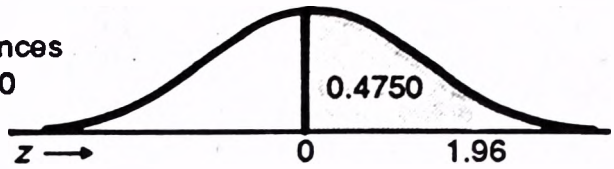
(concluye)

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.3679	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1839	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050
3	0.0613	0.1804	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.0153	0.0902	0.1680	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0573	0.0337
5	0.0031	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.0005	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0001	0.0034	0.0216	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171
8		0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318
9		0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318
10			0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186
11			0.0002	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12			0.0001	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13				0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14				0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15					0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16						0.0003	0.0014	0.0045	0.0109
17						0.0001	0.0006	0.0021	0.0058
18							0.0002	0.0009	0.0029
19							0.0001	0.0004	0.0014
20								0.0002	0.0006
21								0.0001	0.0003
22									0.0001

APENDICE D

Areas bajo la curva normal

Ejemplo
Si $z = 1.96$, entonces
$P(0 \text{ a } z) = 0.4750$



z	0.00	0,01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

APENDICE E

Tabla de números aleatorios

75421	11182	31304	08036	86922	77941	88944	30226	60766	90951
06692	19591	14171	04356	06744	46546	99184	97684	43285	86345
66065	12379	70386	09035	90126	74677	39885	84335	09442	21772
01098	06343	88773	94702	07203	60936	54445	12423	64560	99694
93526	56837	42025	45578	95193	97695	53146	51370	79913	83145
85129	31088	36253	40011	62078	72245	58783	47555	55681	45450
74312	81501	94303	30800	60660	69979	57625	00050	69795	15120
67348	11345	13361	40573	75687	78415	42407	97830	98069	98605
29241	77892	67728	60876	53046	75840	18933	18108	73509	76958
04366	94984	95131	22993	17240	63185	54786	31607	50705	61581
54205	61584	99698	74013	88263	96563	18003	77390	05762	40975
52801	44366	19745	74219	20982	91400	50685	56541	68392	96624
02573	59494	26362	40769	39340	19677	16923	04761	65952	03630
15896	32426	64984	99029	58073	28814	44849	39871	00825	29966
26032	33340	54573	55786	75383	14546	37499	43894	86358	19706
41349	18921	50835	65861	79521	38319	33999	74851	97319	17221
31246	35797	89051	36319	38137	11101	02808	36771	63163	00816
55704	87671	81967	18984	94617	89097	91625	49172	07106	06218
09107	53117	75664	25300	98186	29702	73632	77044	08238	08097
53779	05917	99367	58743	33981	66547	45685	11168	81086	29458
05252	99475	70537	29636	46984	49231	73571	64092	26162	26361
92966	81458	79792	39399	39278	20247	45367	76937	64563	73930
68109	88529	70116	11782	24198	68334	83184	26202	49315	38471
53118	70359	68973	95173	29213	29969	00445	24846	50957	80443
60924	44136	71034	80642	62977	93957	21006	66422	96753	69814
11151	59784	77446	64703	22038	40357	57749	62349	88018	20160
32731	14203	36222	13436	16935	26412	09878	27931	54679	35275
04037	48341	95595	26036	57521	16245	71204	44232	09527	49083
75807	89169	30622	23911	73689	50718	33796	30145	97763	75437
93509	65893	82351	54938	26829	04823	71697	46159	43465	99159
93528	38008	53069	29029	36617	09019	95758	52955	75018	83253
10603	93078	11673	36373	71957	89710	15378	52022	57934	86236
99155	30214	58351	16606	08569	19665	22531	58753	22759	90501
97268	87653	40124	51615	27365	26827	70255	23368	78952	05515
93564	66965	91850	25093	53517	39997	17521	57074	76743	11610
06959	27612	66188	19351	17367	84340	00247	49881	01997	33756
13172	61241	53558	59919	15082	75692	43138	22677	55844	70034
03690	57173	38889	03032	69496	42566	23096	43416	78732	12420
38005	70085	74744	32644	88440	12489	39538	64712	92792	51310
28758	45596	59049	79799	68763	49827	57854	76334	99237	11388
84260	58136	31250	88953	04929	06903	21175	42463	15227	15205
77800	77252	68397	37935	53941	59771	92875	37004	57044	18210
99505	24764	22807	54083	90303	43362	71223	96233	88058	03268
53803	68932	38510	87838	68543	73671	57403	50077	63351	55781
68379	47885	33501	10666	74222	81999	16699	51745	84672	11640
30033	45809	69655	31679	56931	40579	53867	22586	00794	67305
73888	69685	91050	60898	06171	01165	04192	03700	27979	76516
50935	51867	76172	52543	38383	43396	67725	68868	15571	78654
04689	09839	31801	18560	21328	87664	08203	82426	23946	82792
65860	84568	88383	49927	52267	63736	01964	86914	14949	55467

APENDICE F

Distribución *t* de Student

g.l.	*Nivel de significación para pruebas de una cola*					
	0.10	*0.05*	*0.025*	*0.01*	*0.005*	*0.0005*
	Nivel de significación para pruebas de dos colas					
	0.20	*0.10*	*0.05*	*0.02*	*0.01*	*0.001*
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.681	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Fuente: Esta tabla es un resumen de la Tabla III de Fisher y Yates: *Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research*, obra publicada por Oliver & Boyd Ltd., Edimburgo, con autorización de los autores y el editor.

Valores críticos de la distribución *F* al nivel de significación de 5%, $\alpha = 0.05$

Grados de libertad del numerador

Grados de libertad del denominador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.17	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.81	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Fuente: Esta tabla se ha tomado de M. Merrington y C.M. Thompson, "Tables of Percentage Points of the Inverted Beta (*F*) Distribution", *Biometrika*, Vol. 33 (1943), con autorización de Biometrika.

Valores críticos de la distribución *F* al nivel de 1% de significación, $\alpha = 0.01$

Grados de libertad del numerador

Grados de libertad del denominador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6.056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

APENDICE H

Valores críticos de ρ, coeficiente de correlación de rangos de Spearman

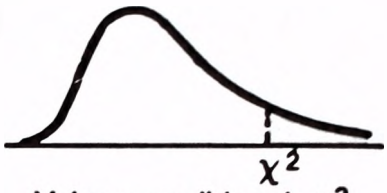
N	*Nivel de significación (prueba de una cola)*	
	0.05	*0.01*
4	1.000	
5	.900	1.000
6	.829	.943
7	.714	.893
8	.643	.833
9	.600	.783
10	.564	.746
12	.506	.712
14	.456	.645
16	.425	.601
18	.399	.564
20	.377	.534
22	.359	.508
24	.343	.485
26	.329	.465
28	.317	.448
30	.306	.432

Fuentes: Adaptado de E.G. Olds, "Distributions of Sums of Squares of Rank Differences for Small Numbers of Individuals", *Annals of Mathematical Statistics* 9 (1938), págs. 133-48; y de E.G. Olds, "The 5 Percent Significance Levels for Sums of Squares of Rank Differences and a Correction", *Annals of Mathematical Statistics* 20 (1949), págs. 117-18, con autorización del autor y del editor.

APENDICE I

Valores críticos de ji cuadrada

Esta tabla contiene los valores de χ^2 que corresponden a un área específica de la cola de la derecha y a números específicos de grados de libertad, g.l.



Valores posibles de χ^2

GRADOS DE LIBERTAD g.l.	AREA DE LA COLA DE LA DERECHA			
	0.10	0.05	0.02	0.01
1	2.706	3.841	5.412	6.635
2	4.605	5.991	7.824	9.210
3	6.251	7.815	9.837	11.345
4	7.779	9.488	11.668	13.277
5	9.236	11.070	13.388	15.086
6	10.645	12.592	15.033	16.812
7	12.017	14.067	16.622	18.475
8	13.362	15.507	18.168	20.090
9	14.684	16.919	19.679	21.666
10	15.987	18.307	21.161	23.209
11	17.275	19.675	22.618	24.725
12	18.549	21.026	24.054	26.217
13	19.812	22.362	25.472	27.688
14	21.064	23.685	26.873	29.141
15	22.307	24.996	28.259	30.578
16	23.542	26.296	29.633	32.000
17	24.769	27.587	30.995	33.409
18	25.989	28.869	32.346	34.805
19	27.204	30.144	33.687	36.191
20	28.412	31.410	35.020	37.566
21	29.615	32.671	36.343	38.932
22	30.813	33.924	37.659	40.289
23	32.007	35.172	38.968	41.638
24	33.196	36.415	40.270	42.980
25	34.382	37.652	41.566	44.314
26	35.563	38.885	42.856	45.642
27	36.741	40.113	44.140	46.963
28	37.916	41.337	45.419	48.278
29	39.087	42.557	46.693	49.588
30	40.256	43.773	47.962	50.892

APENDICE J

Valores críticos de *U* en la prueba de Mann-Whitney

En la primera tabla las anotaciones corresponden a los valores críticos de U para una prueba de una cola en 0.025 o para una prueba de dos colas en 0.05; en la segunda, para una prueba de una cola a 0.05 para una prueba de dos colas en 0.10.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2								0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3					0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4				0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5			0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6			1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7			1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8		0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9		0	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10		0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11		0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12		1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13		1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14		1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15		1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16		1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17		2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18		2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19		2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20		2	8	13	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																			0	0
2					0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3			0	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5		0	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6		0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7		0	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8		1	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9		1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10		1	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11		1	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12		2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13		2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14		2	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15		3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16		3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17		3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18		4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	0	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	0	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

Fuente: Reproducida de *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University,* Vol 1, No. 2; con autorización del autor y del editor.

APENDICE K

Valores *T* de Wilcoxon

Valores críticos de T, *estadística de grado con signo de Wilcoxon, en donde* T *es el mayor entero tal que* $Pr(T \leq t/N) \leq \alpha$, *probabilidad acumulativa de una cola*

N	2 α .15 α.075	.10 .050	.05 .025	.04 .020	.03 .015	.02 .010	.01 .005
4	0						
5	1	0					
6	2	2	0	0			
7	4	3	2	1	0	0	
8	7	5	3	3	2	1	0
9	9	8	5	5	4	3	1
10	12	10	8	7	6	5	3
11	16	13	10	9	8	7	5
12	19	17	13	12	11	9	7
13	24	21	17	16	14	12	9
14	28	25	21	19	18	15	12
15	33	30	25	23	21	19	15
16	39	35	29	28	26	23	19
17	45	41	34	33	30	27	23
18	51	47	40	38	35	32	27
19	58	53	46	43	41	37	32
20	65	60	52	50	47	43	37
21	73	67	58	56	53	49	42
22	81	75	65	63	59	55	48
23	89	83	73	70	66	62	54
24	98	91	81	78	74	69	61
25	108	100	89	86	82	76	68
26	118	110	98	94	90	84	75
27	128	119	107	103	99	92	83
28	138	130	116	112	108	101	91
29	150	140	126	122	117	110	100
30	161	151	137	132	127	120	109
31	173	163	147	143	137	130	118
32	186	175	159	154	148	140	128
33	199	187	170	165	159	151	138
34	212	200	182	177	171	162	148
35	226	213	195	189	182	173	159
40	302	286	264	257	249	238	220
50	487	466	434	425	413	397	373
60	718	690	648	636	620	600	567
70	995	960	907	891	872	846	805
80	1318	1276	1211	1192	1168	1136	1086
90	1688	1638	1560	1537	1509	1471	1410
100	2105	2045	1955	1928	1894	1850	1779

Fuente: Compendiada de Robert L. McCormack, "Extended Tables of the Wilcoxon Matched-Pair Signed Rank Statistic", *Journal of the American Statistical Association*, septiembre 1965, págs. 866-67.

APENDICE L

Factores para diagramas de control

Número de elementos en la muestra, n	*Diagrama para promedios*	*Diagrama para amplitudes*		
	Factores para límites de control	*Factores para línea central*	*Factores para límites de control*	
	A_2	d_2	D_3	D_4
2	1.880	1.128	0	3.267
3	1.023	1.693	0	2.575
4	.729	2.059	0	2.282
5	.577	2.326	0	2.115
6	.483	2.534	0	2.004
7	.419	2.704	.076	1.924
8	.373	2.847	.136	1.864
9	.337	2.970	.184	1.816
10	.308	3.078	.223	1.777
11	.285	3.173	.256	1.744
12	.266	3.258	.284	1.716
13	.249	3.336	.308	1.692
14	.235	3.407	.329	1.671
15	.223	3.472	.348	1.652

Fuente: Adaptado de American Society for Testing and Materials, *Manual on Quality Control of Materials*, 1951, Tabla B2, pág. 115. Si se necesita una tabla más detallada con explicaciones, véase Acheson J. Duncan, *Quality Control and Industrial Statistics*, 3a. ed. (Homewood, Ill.: Richard D. Irwin, 1974), Tabla M, pág. 927.

Ejercicios impares de los capítulos

CAPITULO 1 / ¿Qué es la Estadística?

1. Al conjunto de hechos y cifras con frecuencia se les denomina en el uso cotidiano como estadísticas. Son ejemplos: Greg Norman obtuvo 68 al encabezar el USF&G Classic en Nueva Orleans; el valor bajo anual de las acciones comunes de IBM es $104\frac{1}{2}$ y el alto $130\frac{7}{8}$. Aquí se define como Estadística a la ciencia de recolectar, organizar e interpretar datos numéricos a fin de tomar decisiones con más información. Por ejemplo, para tomar una decisión acerca de un cereal de reciente desarrollo, la Kellogg Company podría tomar una muestra de 270 personas seleccionadas al azar para que lo probaran y dieran su opinión. Se podría probar la resistencia a la tensión de 10 trozos de alambre de acero para tomar una decisión sobre todo el alambre producido durante el día.
3. Podríamos usar estos resultados muestrales para inferir algo sobre todos los ejecutivos. En este caso, se estimaría que aproximadamente 30% de todos los ejecutivos sufren cierto grado de hipertensión, calculado con (60/200)100. Este es sólo un ejemplo del amplio uso del muestreo para inferir algo acerca de una población.
5. Para sugerir varios sitios a la gerencia, es probable que usted primero recolectara datos sobre la población en las áreas metropolitanas de Orlando, Birmingham, Atlanta y otras ciudades del suroeste. Sería necesario recolectar y analizar datos sobre la disponibilidad y precios de terrenos, servicios públicos, etc. Después de decidir el lugar, podría efectuarse una encuesta amplia, por ejemplo a 2 000 personas, para determinar si el parque debe construirse para todas las edades, sólo para niños o sólo para adultos.

CAPITULO 2 / Resumen de datos: distribuciones de frecuencias y representaciones gráficas

1. a.

Número de visitas	*Frecuencias de clase*
1–3	13
4–6	24
7–9	7
10–12	4
13–15	2
Total	50

b. El mayor grupo de compradores (24) visita Food Queen entre cuatro y seis veces por mes. El menor número de visitas es 1 y el mayor 15.

c. La mayoría de los clientes (37 de 50) hacen sus compras de una a seis veces al mes. Podrían planearse las promociones para más de seis visitas mensuales. Además, se necesita investigar más para determinar por qué los clientes compran en Food Queen, cuánto gastan en cada visita, etc.

3. a. \$36.60, calculado por (\$265 − \$82)/5.

b. \$40

c.

\$ 80–\$119	8
120– 159	19
160– 199	10
200– 239	6
240– 279	1
Total	44

d. Las compras variaron desde un mínimo de aproximadamente \$80 hasta un máximo aproximado de \$279. La concentración es en la clase \$120–\$159.

5. a. A continuación se presenta un listado MINITAB.

```
MTB > STEM C1;
SUBC > INCREMENT 10000.

STEM-AND-LEAF OF C1     N = 22
LEAF UNIT = 1000

 2    24  03
 6    25  0134
11    26  11568
11    27  0123789
 4    28  019
 1    29  5
```

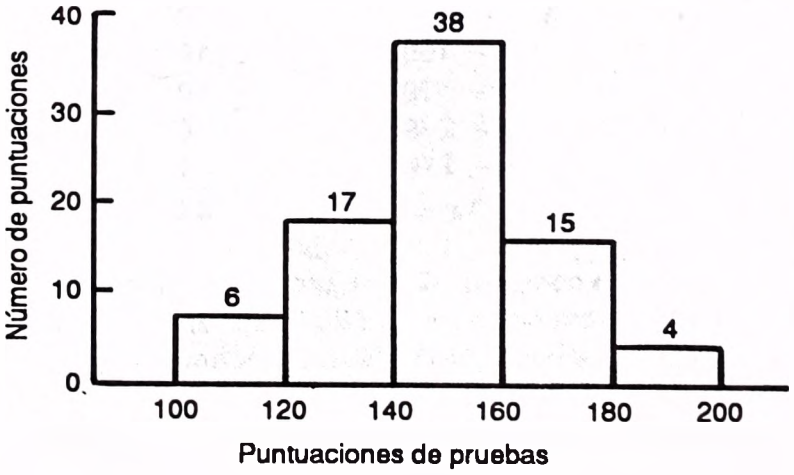
b. La mayoría de los valores se encuentran en la clase 260 000 y 270 000.

7. a. Lo que sigue se obtuvo con el sistema MINITAB.

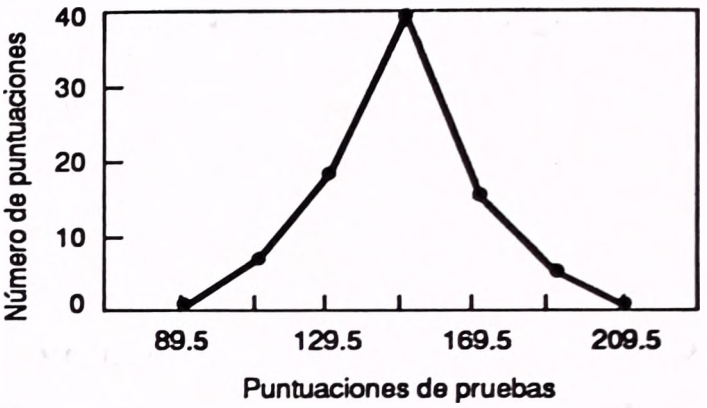
```
MTB > STEM C3

STEM-AND-LEAF OF C3     N = 21
LEAF UNIT = 0.10

 1    5  3
 2    5  8
 8    6  011223
(5)   6  67899
 8    7  02
 6    7  668
 3    8  1
 2    8  6
 1    9  0
```

b. La distribución es aproximadamente normal, con el valor medio (denominado *mediana*) aproximadamente en 6.5.

9. a.



b.

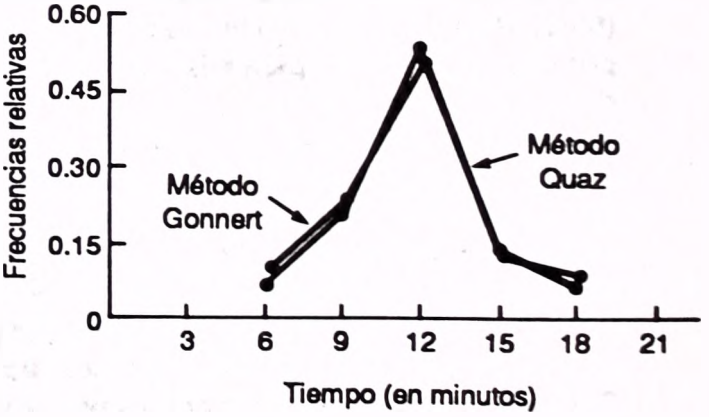


c. Las calificaciones de pruebas tienden a agruparse entre 140 y 160. Una puntuación representativa es aproximadamente 150, la puntuación mínima es cercana a 100, y la máxima, a 200.

11. a.

	Frecuencias relativas	
Tiempo en minutos	*Método Quaz*	*Método Gonnert*
5–7	0.060	0.080
8–10	0.213	0.220
11–13	0.530	0.500
14–16	0.143	0.140
17–19	0.054	0.060
Total	1.000	1.000

b.

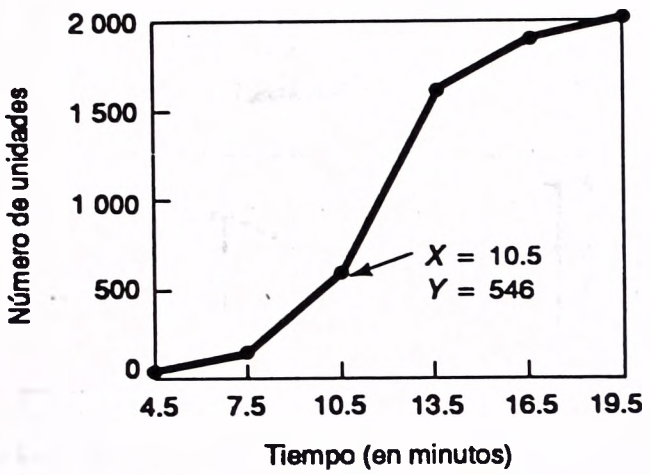


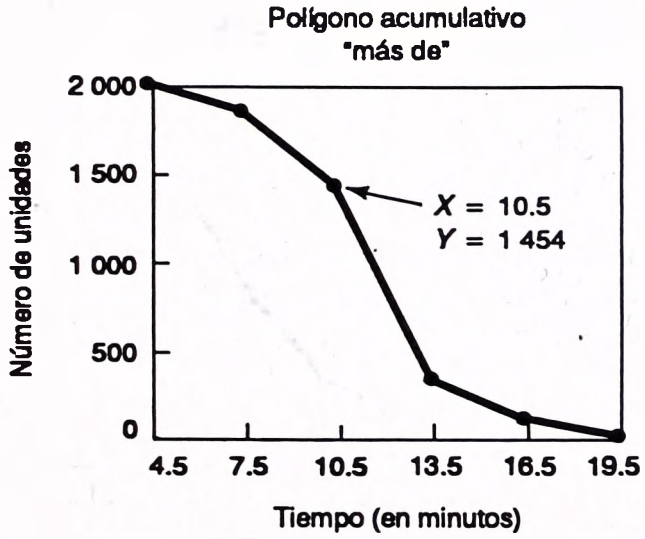
c. Las distribuciones de tiempos son casi idénticas.

13. a.

Tiempo en minutos	*Frecuencias acumuladas "menos de"*	*Frecuencias acumuladas "más de"*
5–7	120	2 000
8–10	546	1 880
11–13	1 606	1 454
14–16	1 892	394
17–19	2 000	108

b.



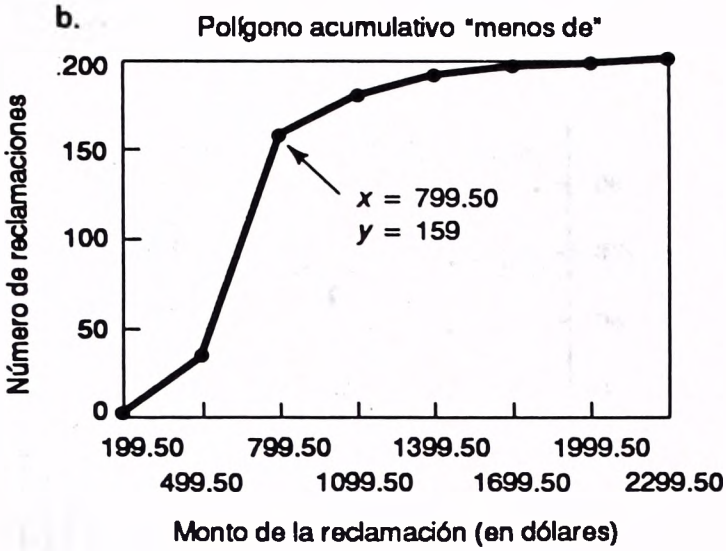


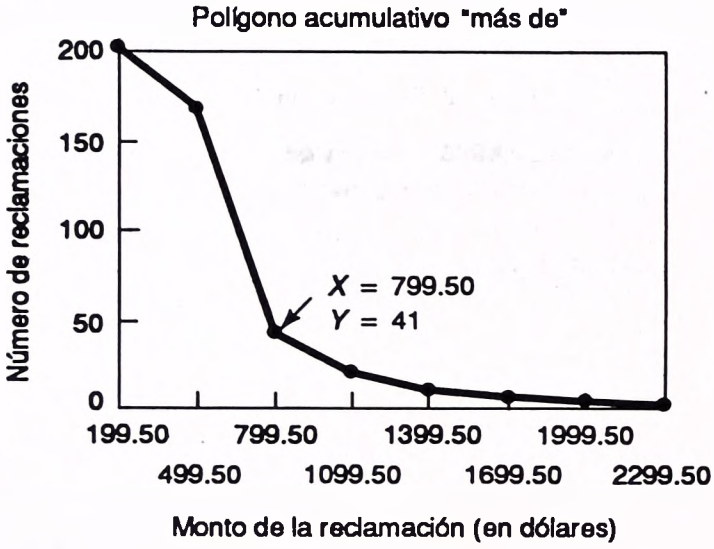
c. Aproximadamente 12 minutos. Cerca de 525 unidades.

15. a.

	Número acumulativo	
	Menos de	*Más de*
199.50	0	200
499.50	30	170
799.50	159	41
1 099.50	179	21
1 399.50	189	11
1 699.50	195	5
1 999.50	197	3
2 299.50	200	0

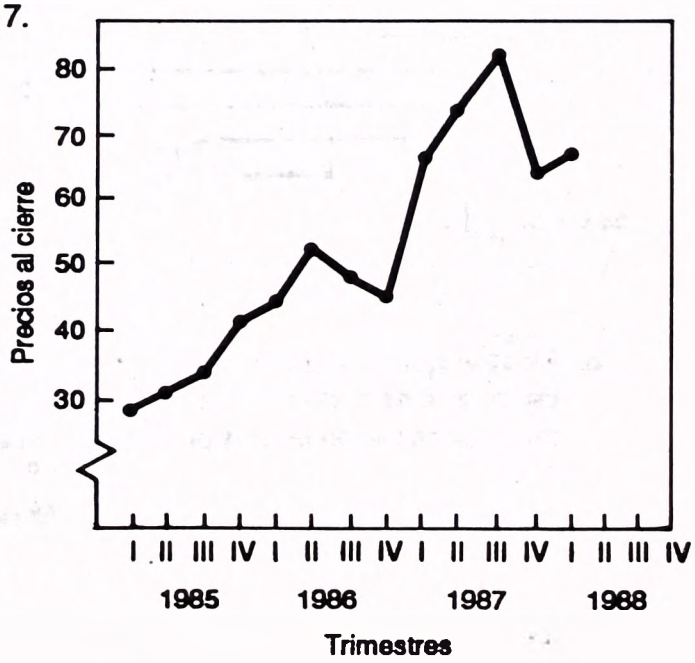
b.



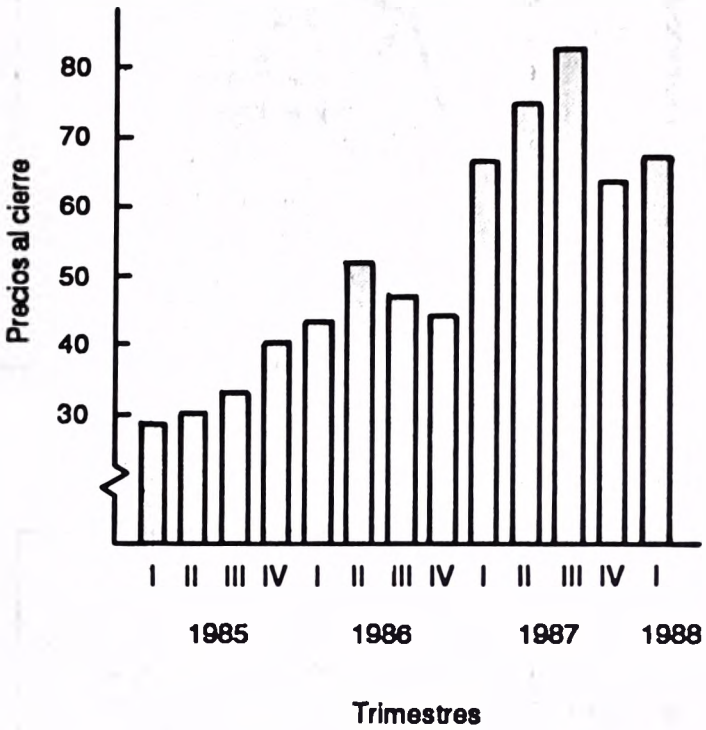


c. Aproximadamente 182. Cerca de 18. Aproximadamente 85%.

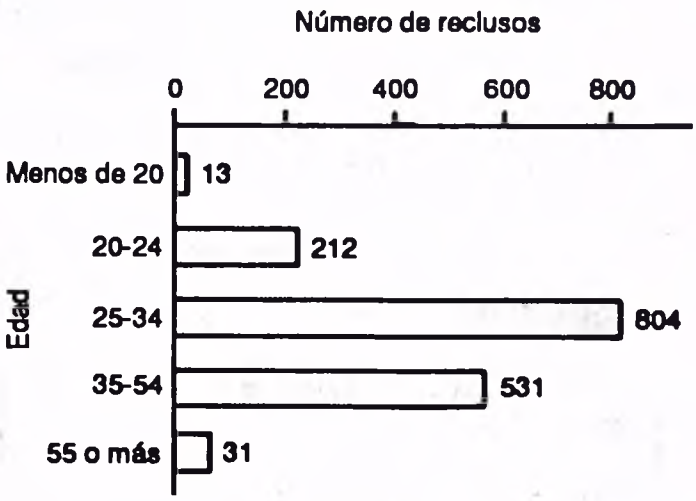
17.



17. (continúa)



19. a. Una posibilidad es:



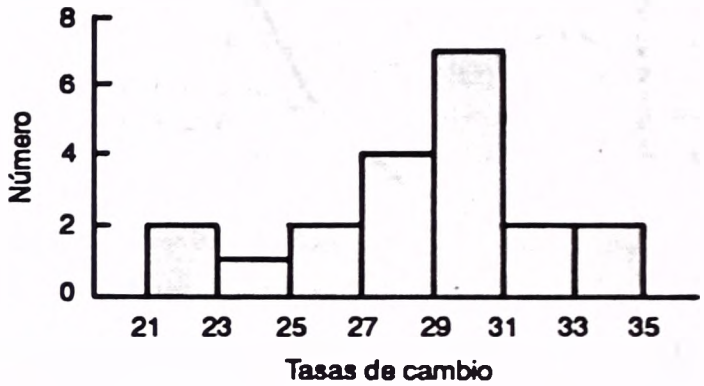
b. Mostrar que el mayor grupo con sentencia de muerte es el de edades de 25-34 y que muy pocos tienen menos de 20 o 55 o más años.

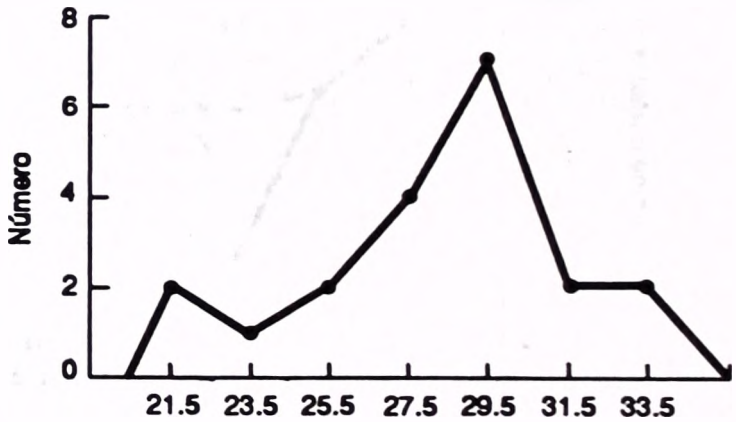
21. a. 2.25, obtenido de (34 − 22)/5.322. Sería mejor un intervalo de 2.

21. b. Usando 21 como límite inferior de la primera clase:

Tasa	Número
21–22	2
23–24	1
25–26	2
27–28	4
29–30	7
31–32	2
33–34	2
Total	20

c.

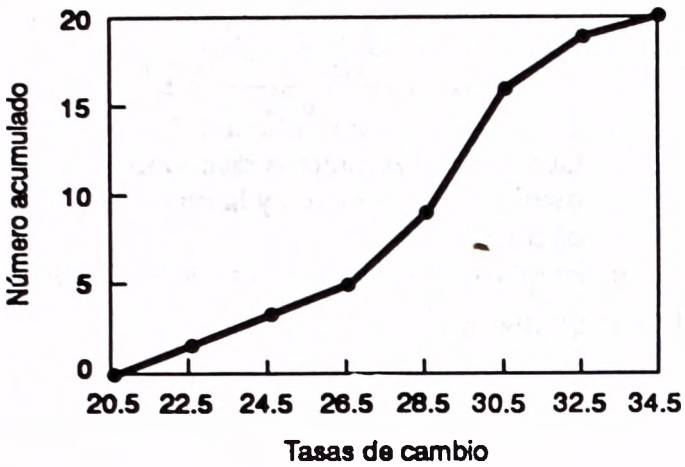


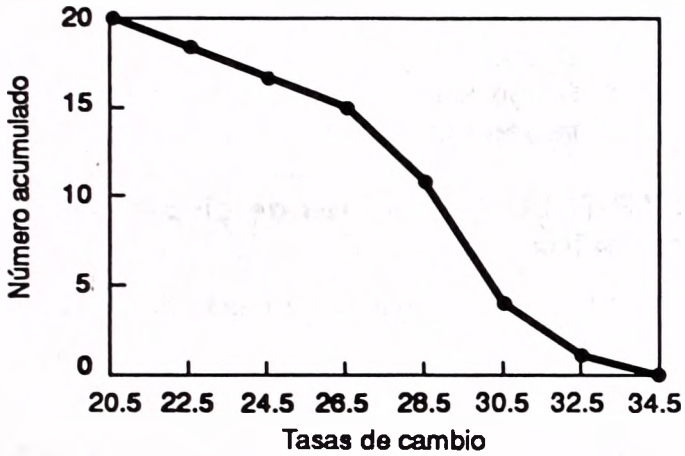


d.

	Número acumulado	
	Menor de	*Más de*
20.5	0	20
22.5	2	18
24.5	3	17
26.5	5	15
28.5	9	11
30.5	16	4
32.5	18	2
34.5	20	0

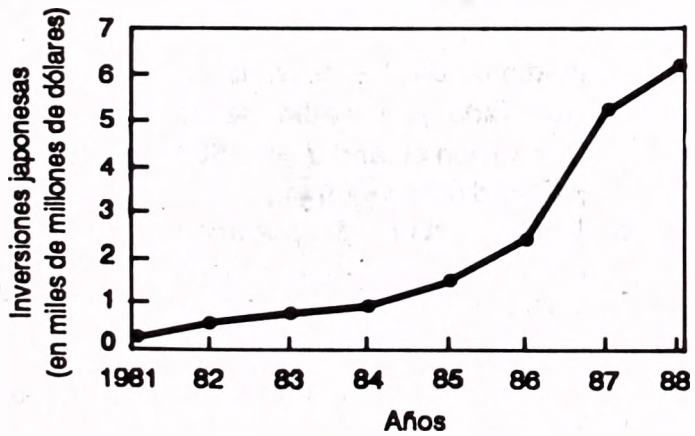
d. (continúa)





e. La concentración de tasas de cambio está entre 27 y 30. El mínimo aproximado es 21 y el máximo 34. La tasa de 18 pacientes por cama es bastante baja, por lo que en apariencia se permite que los pacientes se queden más tiempo que en otros hospitales.

23. Una posibilidad es una gráfica simple de líneas.



Las propiedades de japoneses en EE.UU. han aumentado de manera uniforme desde 1981.

CAPITULO 3 / Descripción de los datos: medidas de tendencia central

1. \$28.0955 o \$28.10
3. Aproximadamente 8 470. Población.
5. \$2.19, se utilizó:

$$\frac{1(\$1.25) + 1(\$1.31) + 1(\$1.93) + 1(\$2.43) + 6(\$2.50)}{10}$$

7. a. \$97, se utilizó:

$$\frac{100(\$70) + 60(\$100) + 40(\$160)}{100 + 60 + 40}$$

b. \$112, se utilizó:

$$\frac{160(\$100) + 40(\$160)}{160 + 40}$$

9. a. Nominal.
   b. Clase, porque es el método más utilizado.
   c. No. Los datos deben ser al menos de nivel de intervalo.
   d. No. Los datos deben ser al menos de nivel ordinal.
11. a. \$96.7 millones.
   b. No. Es el mayor valor.
   c. \$91.4 millones.
   d. \$88.7 millones, se utilizó \$620.9/7.
   e. Media o mediana.
13. 12.254%, se utilizó:

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1\,540}{864}}\right) - 1$$

15. 61.68%.
17. a. \$35 706.02, se utilizó:

$$\$29\,999.50 + \frac{\frac{100}{2} - 39.5}{18.4}(\$10\,000)$$

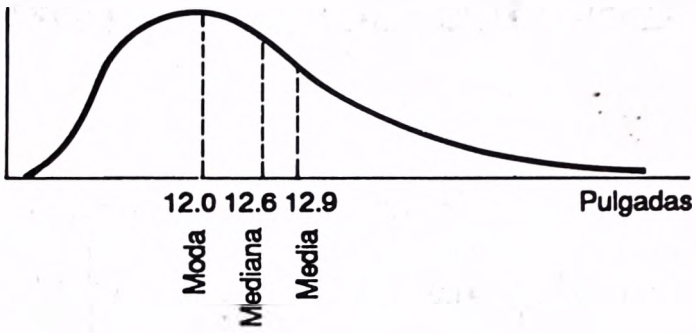
La mitad de los ingresos son superiores a \$35 706.02 y la mitad inferiores.

   b. \$24 999.50, punto medio de la clase \$10 000–\$19 999. Aparece con más frecuencia.
19. a. 26.08 años, se utilizó 1 304/50.
   b. 26.8 años, se utilizó 26.5 + (2/20)3.
21. a. 1 200 toneladas. La mitad de los pesos son superiores a 1 200 y la mitad inferiores.
   b. 1 200 toneladas. Es el valor en la parte superior de la curva.

23. a. 12.6 pulgadas, se utilizó:

$$\frac{2(12.9) + 12.0}{3}$$

b.



25. a. 1.02.
    b. 1.01.
    c. 1.01.
    d. Moda. Aparece con más frecuencia.

27. a. Media = 0.9988
    b. Mediana = 0.9250
    c. Moda = 1.05
    d. Media o mediana. La moda no está cerca del centro de los datos.

29. 7.097%, se utilizó:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{8\,455}{6\,427}}\right) - 1$$

31. 5.4%, se utilizó:

$$\left(\sqrt[5]{\frac{47\,971}{36\,878}}\right) - 1$$

33. 19.74 años, se utilizó:

$$19.5 + \frac{\frac{515.6}{2} - 249.8}{168.6}(5)$$

La mitad de las madres solteras tienen menos de 19.74 años y la otra mitad más de 19.74 años.

35. a. 45.17 años, se utilizó:

$$44.5 + \frac{\frac{1\,829}{2} - 854}{450}(5)$$

La mitad de los hombres divorciados tienen menos de 45.17 y la otra mitad más de 45.17 años.

    b. 38.89 años, se utilizó:

$$34.5 + \frac{\frac{2\,827}{2} - 837}{656}(5)$$

La mitad de las mujeres divorciadas tienen menos de 39.89 años y la otra mitad más de 39.89 años.

    c. Hombres: 49.5 años. Mujeres: 39.5 y 49.5.

37. a. \$3 330, se utilizó:

$$\frac{3(\$3\,220) - \$3\,000}{2}$$

    b. Media. La están afectando los valores extremos.
    c. \$3 000.
    d. Sesgo positivo. La mediana y la media son mayores que la moda.

CAPITULO 4 / Medidas de dispersión y asimetría

1. 13.125 %, calculado por medio de 16.125 − 3.00.

3. a. 15, calculado con 41 − 26.
   b. 33.9, calculado con 339 ÷ 10.
   c. 4.12, calculado con 41.2 ÷ 10. Las calificaciones se desvían en promedio 4.12 de la media de 33.9.
   d. Ya que 8 < 15 y 1.9 < 4.12, se concluye que hay más dispersión en el primer grupo.

5. a. \$3.27, se utilizó \$4.30 − \$1.03.
   b. \$2.77, se utilizó \$13.85 ÷ 5.
   c. 1.2586, se utilizó 6.2928 ÷ 5.
   d. \$1.1219, se utilizó $\sqrt{1.2586}$

7. a. Amplitud = 7.3, calculada por medio de 11.6 − 4.3. Media = 6.94, calculada por medio de 34.7 ÷ 5. Variancia = 6.5944, calculada por medio de 32.9720 ÷ 5. Desviación estándar = 2.5680, calculada por medio de $\sqrt{6.5944}$.
   b. La ganancia media por acción es mayor para IBM, pero la ganancia para Boise Cascade no presenta tanta dispersión como en el caso de IBM.

9. 1.3, calculado por medio de $\sqrt{12/(8 - 1)}$ o bien

$$\sqrt{\frac{734 - \frac{(76)^2}{8}}{8 - 1}}$$

11. a. 7 gramos, calculado por medio de 127 − 120.
    b. 124 gramos, calculado por medio de 1 240 ÷ 10.
    c. 4.667, calculado por medio de 42/(10 − 1) o bien:

$$\frac{153\,802 - \frac{(1\,240)^2}{10}}{10 - 1}$$

    d. 2.1602 gramos, calculado por medio de $\sqrt{4.667}$.

13. a. 17 minutos, usando los límites declarados de clase (18 − 1 = 17). Usando los verdaderos límites de clase, la amplitud es 18 minutos, calculada por medio de 18.5 − 0.5.
    b. 3.8938 minutos, calculado por medio de:

$$\sqrt{\frac{3\,759 - \frac{(363)^2}{42}}{42 - 1}}$$

    c. 15.162, calculado por medio de $(3.8938)^2$.

15. Aproximadamente 69%, calculado por medio de:

$$1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{(1.8)^2} = 0.691$$

17. a. Aproximadamente 95%, calculado por medio de 0.4750 + 0.4750.
    b. Aproximadamente 47.5%. Aproximadamente 2.5%.

19. a. Aproximadamente $1 281.32, calculado por medio de:

$$\$1\,199.5 + \frac{\frac{120}{4} - 21}{22}(\$200)$$

    b. Aproximadamente $1 657.83, calculado por medio de:

$$\$1\,599.5 + \frac{\frac{(3)(120)}{4} - 83}{24}(\$200)$$

    c. Aproximadamente $376.51, calculado por medio de $1 657.83 − $1 281.32. Es la diferencia entre el tercer y primer cuartiles.
    d. $188.26, calculado por medio de $376.51 ÷ 2. Es la mitad de la distancia entre el tercer y primer cuartiles. Abarca el 50% central de los valores.

21. a. $65.125, calculado por medio de:

$$\$59.50 + \frac{\frac{150}{4} - 24}{24}(\$10)$$

    b. $87.00, calculado por medio de:

$$\$79.50 + \frac{\frac{(3)(150)}{4} - 96}{22}(\$10)$$

    c. $21.875, calculado por medio de $87.00 − $65.125. Es la diferencia entre el tercer y el primer cuartiles.
    d. $10.9375, calculado por medio de $21.875 ÷ 2. Es la mitad de la distancia entre el tercer y primer cuartiles.
    e. El percentil 10 = $53.875, calculado por medio de:

$$\$49.50 + \frac{\frac{(10)(150)}{100} - 8}{16}(\$10)$$

    El percentil 90 es $102.2273, calculado por medio de:

$$\$99.50 + \frac{\frac{(90)(150)}{100} - 132}{11}(\$10)$$

    Aproximadamente el 80% de los ingresos semanales se encuentran entre $102.23 y $53.88.

23. a. Las razones PE y ROI están en unidades diferentes.
    b. PE es 16.5%, calculado por medio de (1.8/10.9)100. ROI es 20.8%, calculado por medio de (5.2/25)100. Existe mayor dispersión relativa en la ganancia en la inversión porque 20.8 > 16.5.

25. a. Sesgo positivo, porque la media es la mayor medida de tendencia central.
    b. 2.9, calculado por medio de 3($75 900 − $70 100)/$5 900. Sesgo elevado en sentido positivo.

27. c.
29. b.
31. a.
33. b.
35. c.
37. b.
39. d.

41. a. 28.16, se utilizó 2 253 ÷ 80.
    b. 5.76, calculado por medio de:

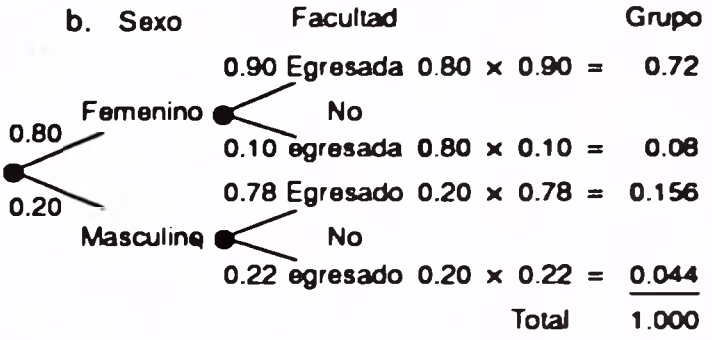
$$\sqrt{\frac{66\,069 - \frac{(2\,253)^2}{80}}{80 - 1}}$$

c. 20.45%, calculado por medio de (5.76/28.16)100.
d. Sesgo positivo, porque la media de 28.16 es mayor que la moda de 27.

CAPITULO 5 / Estudio de conceptos probabilísticos

1. a. 13/52 = 0.25.
   b. 1/52 = 0.019.
   c. Clásico.
3. a. La encuesta a 40 personas sobre el aborto.
   b. Sí o no.
   c. 10/40 = 0.25.
   d. Frecuencia relativa.
   e. No igualmente probables, mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.
5. a. 102/200 = 0.51.
   b. 0.49, calculado por medio de: 61/200 + 37/200 = 0.305 + 0.185. Regla especial de adición.
7. a. 0.65, calculado por medio de 0.35 + 0.40 − 0.10.
   b. Una probabilidad conjunta.
   c. No, un ejecutivo podría leer ambas revistas.
9. a. 1/16 o 0.0625, calculado por medio de 1/2 × 1/2 × 1/2 × 1/2.
   b. P(A y B y C y D) = P(A) · P(B) · P(C) · P(D).
   c. 1/2.
11. a. 6/380 o bien 0.01579, calculado por medio de 3/20 × 2/19.
    b. 272/380 o bien 0.7158, calculado por medio de 17/20 × 16/19.
13. a. 0.08, calculado por medio de 0.80 × 0.10.

    b.



    c. Sí, porque todos los posibles resultados se muestran en el diagrama de árbol.

15. 0.5645, calculado por medio de:

$$P(\text{noche}|\text{ganar}) = \frac{P(\text{noche})\,P(\text{ganar}|\text{noche})}{P(\text{noche})\,P(\text{ganar}|\text{noche}) + P(\text{día})\,P(\text{ganar}|\text{día})}$$

$$= \frac{(0.70)(0.50)}{[(0.70)(0.50)] + [(0.30)(0.90)]}$$

17. 0.1053, calculado por medio de:

$$P(\text{efectivo}|>\$50) = \frac{P(\text{efectivo})\,P(>\$\,50|\text{efectivo})}{P(\text{efectivo})\,P(>\$50|\text{efectivo}) + P(\text{cheque})\,P(>\$50|\text{cheque}) + P(\text{cargo})\,P(>\$50|\text{cargo})}$$

$$= \frac{(0.30)(0.20)}{[(0.30)(0.20)] + [(0.30)(0.90)] + [(0.40)(0.60)]}$$

19. 15, calculado por medio de 5 x 3.
21. 2 520, calculado por medio de:

$$_7P_5 = \frac{(7!)}{(7 - 5)!}$$

23. a. Preguntando a adolescentes sus reacciones ante una nueva bebida gaseosa.
    b. Sí, les gusta.
25. Subjetiva.
27. 3/6 o 1/2, calculado por medio de 1/6 + 1/6 + 1/6.
29. Mutuamente excluyentes, porque no es posible que al mismo tiempo un sobre contenga, por ejemplo, un donativo total de $2 y uno de $56.
31. 0.60, calculado por medio de 300/500.
33. a. La posibilidad de que un evento ocurra, considerando que el otro evento ya ocurrió.
    b. El conjunto de uno o más resultados de un experimento.
    c. Una medida de la posibilidad de que uno o más eventos ocurran en forma concurrente.
35. 0.81, calculado por medio de $(0.95)^4$, o bien (0.95)(0.95)(0.95)(0.95).
37. $P(A \text{ y } B \text{ y } C \text{ y } D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.
39. Un espacio muestral.
41. 1.00.
43. a. $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(A|B)$.
    b. 6/2 450 o 0.0024, calculado por medio de 3/50 × 2/49.
45. Todos dan en el blanco = 0.4096, calculado por medio de $(0.80)^4$. Ninguno da en el blanco = 0 .0016, calculado por medio de $(0.20)^4$.
47. a. 0.3818, calculado por medio de (9/12) (8/11) (7/10).
    b. 0.6182, calculado por medio de 1 − 0.3818.
49. 0.60, calculado por medio de 100/500 + 200/500.
51. 0.33, calculado por medio de 100/300.
53. 0.5467, calculado por medio de 82/150.
55. 0.6267, calculado por medio de 82/150 + 39/150 − 27/150. Regla general.
57. 0.2972, se utilizó (82/150)(81/149).
59. 0.28, calculado por medio de (0.40)(0.70).
61. 0.0294, calculado por medio de:

$$P(\text{defic.}|\text{útil}) = \frac{P(\text{defic.})\,P(\text{útil}\mid\text{defic.})}{P(\text{defic.})\,P(\text{útil}\mid\text{defic.}) + P(\text{bueno})\,P(\text{útil}\mid\text{bueno}) + P(\text{acept.})\,P(\text{útil}\mid\text{acept.})}$$

$$= \frac{(0.10)(0.20)}{[(0.10)(0.20)] + [(0.60)(0.80)] + [(0.30)(0.60)]}$$

63. 45 empates, calculado por medio de $\frac{10!}{2!(10 - 2)!}$
65. 0.70, calculado por medio de $P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B) = 0.60 + 0.40 - 0.30$.
67. 0.5454, calculado por medio de la aplicación del teorema de Bayes.

$$\frac{(0.50)(0.75)}{(0.50)(0.75) + (0.50)(0.625)}$$

69. 0.40, calculado por medio de la aplicación del teorema de Bayes.

$$\frac{(0.50)(0.25)}{(0.50)(0.25) + (0.50)(0.375)}$$

71. Sí. 256 calculado por medio de 2^8.

CAPITULO 6 / Distribuciones probabilísticas discretas

1. Media = 1.10 repuestos, calculado por medio de

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$
0	0.30	0
1	0.40	0.40
2	0.20	0.40
3	0.10	0.30
	$E(X)$ =	1.10

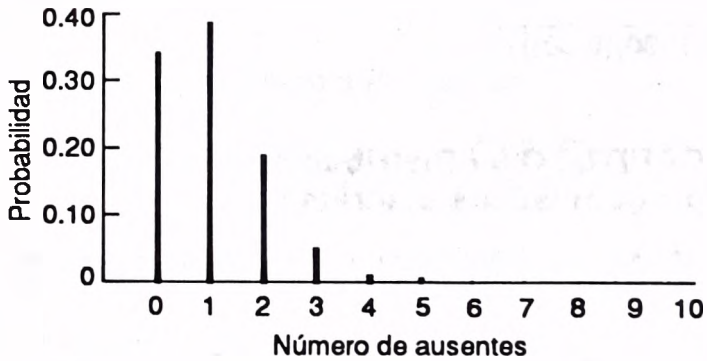
Desviación estándar = 0.943, calculada por medio de $\sqrt{0.890}$. $(X - \mu)^2 \cdot P(X) = 0.363 + 0.004 + 0.162 + 0.361 = 0.890$.

3. Media = 2.00 unidades, calculada por medio de 0 + 0.20 + 0.60 + 1.20. Desviación estándar = 1.00, calculada por medio de $(X-\mu)^2 \cdot P(X) = 0.40 + 0.20 + 0 + 0.40 = 1.00$. Después $\sqrt{1.00} = 1.00$. El número medio de vacantes es 2.00 con una desviación estándar de 1.00.

5. a. Número de empleados de producción ausentes.
   b. Discreta, porque el número de ausentes sólo puede tomar valores enteros: 0, 1, 2, ... No puede haber un número fraccionario de empleados ausentes.
   c. 0.349, calculado por medio de la consulta al apéndice A, con n de 10, r de 0 y p de 0.10.
   d.

r	$P(r)$	r	$P(r)$
0	0.349	6	0.000
1	0.387	7	0.000
2	0.194	8	0.000
3	0.057	9	0.000
4	0.011	10	0.000
5	0.001		

   e. Media = 1.00, calculada por medio de np = (10)(0.10)
      σ^2 = 0.90, calculada por medio de $np(1-p)$ = (10)(0.10)(0.90)
      σ = 0.949 calculada por medio de $\sqrt{0.90}$
   f.



   g. (1) Los resultados sólo pueden clasificarse como "ausente" o "no ausente"; (2) el número de ausentes es el resultado de conteos; (3) la probabilidad de 0.10 permanece igual; y (4) los números diarios de ausencias son independientes.

7. a. 0.50.
   b. Aproximadamente 0.40.
   c. 0.377.

9. 0.4667, calculado por medio de

$$\frac{\left(\frac{7!}{2!5!}\right)\left(\frac{3!}{0!3!}\right)}{\frac{10!}{2!8!}} = \frac{21}{45}$$

11. 0.4196, calculado por medio de:

$$\frac{\left(\frac{9!}{6!3!}\right)\left(\frac{6!}{4!2!}\right)}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{1260}{3003}$$

13. a. 0.0613, en donde n = 40, p = 0.025, y μ = 1.00, calculado por medio de np. Consúltese el apéndice C.
    b. 0.0803, calculado por medio de 0.0613 + 0.0153 + 0.0031 + 0.0005 + 0.0001, del apéndice C.

15. 0.7148, en donde $\mu = np = 0.005 \times 1\,200 = 6.0$. Sumando, 0.1606 + 0.1606 + . . . + 0.0001 = 0.7418.

17. Media = 1.30 accidentes, calculada por medio de 0.00 + 0.20 + 0.40 + 0.30 + 0.40. Variancia = 1.81, calculada por medio de $(X-\mu)^2 \cdot P(X)$ = 0.676 + 0.018 + 0.098 + 0.289 + 0.729.
    Desviación estándar = $\sqrt{1.81}$ = 1.3454 accidentes.

19. Sí, μ = 0.0025, calculada por medio de −0.03 + (−0.03) + 0 + 0.0225 + 0.0200 + 0.0200. Variancia = 0.02905, calculada por medio de 0.00765 + 0.00390 + 0.00000 + 0.00270 + 0.00490 + 0.00990.

21. a. 0.0009765, calculado por medio de:

$$P(5) = \frac{5!}{5!(5-5)!}(0.25)^5(0.75)^{5-5}$$

$$= (1)(0.0009765)(1)$$

    b. 0.2373046, calculado por medio de:

$$P(0) = \frac{5!}{0!(5-0)!}(0.25)^0(0.75)^{5-0}$$

$$= (1)(1)(0.2373046)$$

23. La probabilidad de que haya en el jurado exactamente dos ciudadanos de habla hispana es 0.168 (apéndice A, n = 12, r = 2, p = 0.3). Se podría argumentar que existe una probabilidad suficientemente grande y estar de acuerdo con el fiscal.

25. a. Aproximadamente 6 065 puertas (apéndice C, $\mu = 0.5$, $X = 0$).
    b. Aproximadamente 902 puertas, calculado por medio de 1 − (0.6065 + 0.3033) (apéndice C).
27. a. 0.8187 del apéndice C, $\mu = 0.2$, calculado por medio de 100 (0.002).
    b. 0.9824, calculado por medio de 0.8187 + 0.1637.
    c. No. La probabilidad de que tres o más máquinas estén descompuestas es sólo 0.0012, calculada por medio de 0.0011 + 0.0001.
29. $\mu = 4.0$, del apéndice C.
    a. 0.0183
    b. 0.1954
    c. 0.6289
    d. 0.5665
31. 0.20, calculado por medio de:

$$\left(\frac{2!}{2!0!}\right)\left(\frac{4!}{1!3!}\right)\left(\frac{3!3!}{6!}\right)$$

33. 0.4286, calculado por medio de:

$$\left(\frac{6!}{2!4!}\right)\left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{4!6!}{10!}\right)$$

35. La pérdida esperada es \$4.995, calculada por medio de 999/1 000 × − \$5. La ganancia esperada es \$0.50, calculada por medio de 1/1 000 × \$500.

CAPITULO 7 / Distribución probabilística normal

1. La forma real de una distribución normal depende de su media y desviación estándar. De esta forma existe una distribución normal con la curva normal correspondiente para una media de 7 y una desviación estándar de 2. Existe otra curva normal para una media de \$25 000 y una desviación estándar de \$1 742, etc.
3. a. 490 y 510, calculado por medio de 500 ± 1(10).
   b. 480 y 520, calculado por medio de 500 ± 2(10).
   c. 470 y 530, calculado por medio de 500 ± 3(10).
5. Tiene una media de 0 y una desviación estándar de 1. Es posible convertir cualquier distribución normal a una distribución normal estándar. De esta forma es posible comparar tanto distribuciones semejantes como diferentes.
7. a. − 0.4 para las ventas netas, calculado por medio de (170 − 180)/25. 2.92 para empleados, calculado por medio de (1 850 − 1 500)/120.
   b. Las ventas netas están a − 0.4 desviaciones estándar por abajo de la media. Los empleados están a 2.92 desviaciones estándar por encima de la media.
   c. 65.54% de los fabricantes de aluminio tienen mayores ventas netas que Clarion, calculado por medio de 0.1554 + 0.500. Sólo 0.18% tiene más empleados que Clarion, calculado por medio de 0.5000 − 0.4982.
9. a. 15.87%, calculado por medio de (15 − 20)/5 = −1.00. Después 0.5000 − 0.3413 = 0.1587.
   b. 0.5403. Primero el área entre 18 y 20 es 0.1554. El área entre 20 y 26 es 0.3849. Sumando 0.1554 + 0.3849 = 0.5403.
   c. 28.225 días. El valor de z para 0.4500 es 1.645. Resolviendo, 1.645 = (X − 20)/5 o sea, X = 28.225.
11. 60.06%. z = (\$42 000 − \$40 000)/\$5 000 = 0.40. El área bajo la curva para una z de 0.40 es 0.1554. De manera semejante, el área entre \$32 000 y \$40 000 es 0.4452. Sumando, 0.1554 + 0.4452 = 0.6006.
13. a. Sí. (1) Hay dos resultados mutuamente excluyentes: sobrepeso o ausencia de sobrepeso. (2) Es el resultado de contar el número de éxitos (miembro con sobrepeso). (3) Cada ensayo es independiente. (4) La probabilidad 0.30 permanece igual para cada ensayo.
    b. 0.0084, calculado por medio de $\mu = np$ = 500(0.30) = 150. Variancia = 105, calculada por medio de 500(0.30)(1 − 0.30). Desviación estándar = 10.24695, calculada por medio de $\sqrt{105}$.

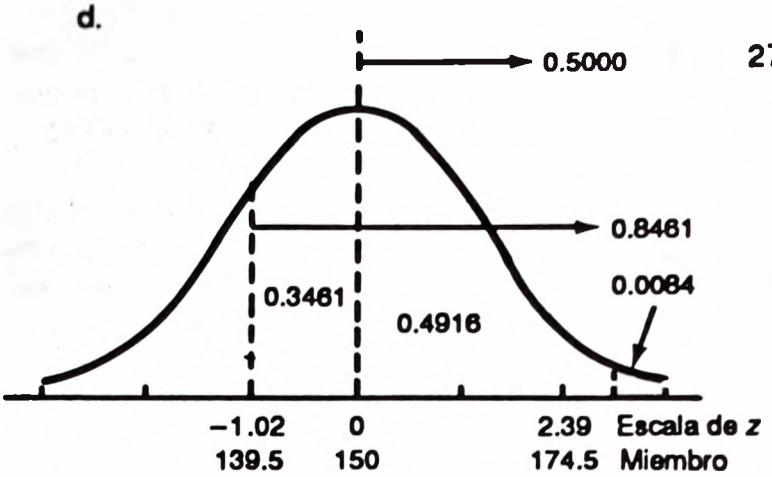
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{174.5 - 150}{10.24695} = 2.39$$

    El área bajo la curva para 2.39 es 0.4916. Después 0.5000 − 0.4916 = 0.0084.
    c. 0.8461, calculado por medio de:

$$z = \frac{139.5 - 150}{10.24695} = -1.02$$

El área entre 139.5 y 150 es 0.3461. Sumando 0.3461 + 0.5000 = 0.8461.

d.



15. a. 46.41%, calculado por medio de z = (20.27 − 20.00)/0.15 = 1.80. El área bajo la curva es 0.4641.
    b. 3.59%, calculado por medio de 0.5000 − 0.4641.
    c. 81.85%, calculado por medio de 0.3413 + 0.4772.
    d. 27.43%. El área para z = 0.60 es 0.2257. Restando, 0.5000 − 0.2257 = 0.2743.
17. a. 39.44%, calculado por medio de (1 970 − 1 820)/120 = 1.25. El área para z igual a 1.25 es 0.3944.
    b. 10.56%, calculado por medio de 0.5000 − 0.3944.
    c. 3.36%, calculado por medio de 0.5000 − 0.4664 = 0.0336
19. Aproximadamente 578, calculado al resolver X en la ecuación 1.56 = (X − 500)/50.
21. a. Aproximadamente 35.93%. El área entre 500 y 400 es 0.4772 y el área entre 500 y 485 es 0.1179. Restando, 0.4772 − 0.1179 = 0.3593. Aproximadamente 360.
23. a. Aproximadamente 0.47%. (65 200 − 60 000)/2 000 = 2.60. Después 0.5000 − 0.4953 = 0.0047.
    b. Aproximadamente 22 camiones. (55 000 − 60 000)/2 000 = − 2.50. Después 0.5000 − 0.4938 = 0.0062. Multiplicando, 0.0062 × 3 500 = 21.7.
    c. Aproximadamente 2 945. (62 000 − 60 000)/2 000 = 1.00. Después 0.5000 + 0.3413 = 0.8413. Multiplicando, 0.8413 × 3 500 = 2 944.55.
25. a. Sólo 2.28% ganan más que John: ($30 400 − $28 000)/$1 200 = 2.00. Después 0.5000 − 0.4772 = 0.0228.
    b. De los otros supervisores, 97.72% tienen más servicio. (10 − 20)/5 = − 2.00. Después 0.4772 + 0.5000 = 0.9772.
27. a. 15.39%, calculado por medio de (8 − 10.3)/2.25 = −1.02. Después 0.5000 − 0.3461 = 0.1539.
    b. 17.31%, calculado por medio de:
    (12 − 10.3)/2.25 = 0.76. El área es 0.2764.
    (14 − 10.3)/2.25 = 1.64. El área es 0.4495.
    El área entre 12 y 14 es 0.1731, calculada por medio de 0.4495 − 0.2764.
    c. Sí, pero es bastante difícil. Razonamiento: En el 99.73% de los días, las devoluciones están entre 3.55 y 17.05, calculadas por medio de 10.3 ± 3(2.25). De esta forma, la probabilidad de menos de 3.55 devoluciones es bastante pequeña.
29. $\mu = np = 100(0.05) = 5$
    $\sigma^2 = np(1 - p) = 100(0.05)(0.95) = 4.75$
    $\sigma = \sqrt{4.75} = 2.18$
    a. 0.0537, calculado por medio de (8.5 − 5)/2.18 = 1.61, valor para el que el área es 0.4463. Después 0.5000 − 0.4463 = 0.0537.
    b. 0.0499, calculado por medio de (10.5 − 5)/2.18 = 2.52, cuya área es 0.4962. Restando, 0.4962 − 0.4463 = 0.0499.
    c. 0.0714. Se calcula la probabilidad de 8.5 y 7.5. Después se obtiene la diferencia. La probabilidad de 8.5 es 0.4463 y la de 7.5 es 0.3749; 0.4463 − 0.3749 = 0.0714
    d. 0.0197, calculado por medio de 0.5000 + 0.4803.
31. a. 0.0393, calculado por medio de:
    $\mu = np = 60(0.10) = 6$
    $\sigma^2 = np(1 - p) = 5.4$
    $\sigma = 2.3238$
    Se calcula la probabilidad de 2.5 y 1.5. Después se resta. 0.4738 − 0.4345 = 0.0393.
    b. 0.9738, calculado por medio de 0.5000 + 0.4738.
33. 0.0150, calculado por medio de:
    $\mu = np = 800(0.80) = 640$
    $\sigma^2 = np(1 - p) = 128$
    $\sigma = \sqrt{128} = 11.3137$

(664.5 − 640)/11.3137 = 2.17, de manera que el área entre 640 y 664.5 es 0.4850. Después 0.5000 − 0.4850 = 0.0150.

CAPITULO 8 / Métodos y distribuciones de muestreo

1. a. 303 Louisiana, 5155 S. Main, 3501 Monroe, 2652 W.Central.
   b. Las respuestas varían.
3. 630 Dixie, 835 S. McCord, 4624 Woodville.
5. Las respuestas varían.
7. a. 6, obtenido por medio de 4!/2!2!.
   b.

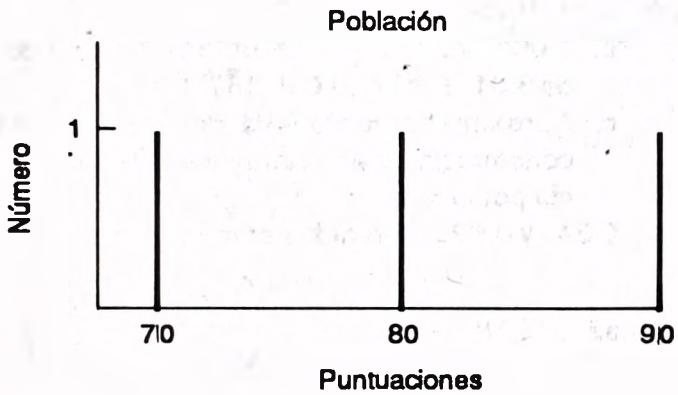
Puntuaciones de prueba	*Media*
90, 86	88
90, 70	80
90, 80	85
86, 70	78
86, 80	83
70, 80	75

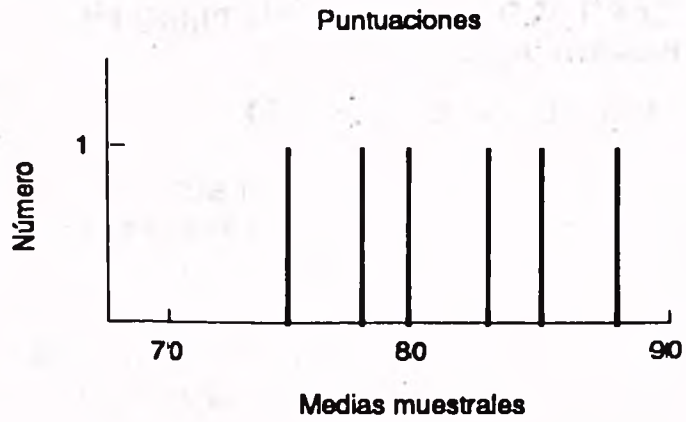
   c. $$\mu_{\bar{x}} = \frac{88 + 80 + 85 + 78 + 83 + 75}{6} = 81.5$$

$$\mu = \frac{90 + 86 + 70 + 80}{4} = 81.5$$

   Son iguales

   d.





Los valores de la población están más dispersos que las medias muestrales. La población va de 70 a 90, las medias muestrales de 75 a 88. (No hay un número suficiente de observaciones para mostrar si existe normalidad en la distribución de las medias muestrales.)

   e. Si 70–79 equivale a C y 80–89 a B, usted debería considerar seriamente aceptar la calificación ofrecida porque cuatro de las seis medias muestrales están en el intervalo de 80 a 88 y sólo dos tienen valores de 70.
9. a. $20 es nuestra mejor estimación de la media poblacional.
   b. $18.60 y $21.40, valores obtenidos por medio de $20 \pm 1.96(5/\sqrt{49})$.
11. a. 8.60 galones.
   b. 7.83 y 9.37, obtenidos por medio de $8.60 \pm 2.58(2.30)/\sqrt{60}$.
   c. Si se determinaran 100 de esos intervalos, la media poblacional quedaría en 99 de ellos.
13. a. 0.80, obtenido por medio de 80/100.
   b. 0.7216 y 0.8784, obtenidos por medio de:

$$0.80 \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.80)(0.20)}{100}}$$

15. a. 0.625, obtenido por medio de 250/400.
   b. 0.578 y 0.672, obtenidos por medio de:

$$0.625 \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.625)(0.375)}{400}}$$

17. 3.07 y 3.41, obtenido por medio de $3.24 \pm 2.58(0.50/\sqrt{50})(\sqrt{(400 - 50)/400 - 1})$.
19. 554, obtenido por medio de:

$$n = \left(\frac{1.96 \times 3}{0.25}\right)^2$$

21. a. 577, obtenido por medio de:

$$0.60(0.40)\left(\frac{1.96}{0.04}\right)^2 = 576.24$$

   b. 601, obtenido por medio de:

$$0.50(0.50)\left(\frac{1.96}{0.04}\right)^2 = 600.25$$

23. a. Por lo general no resulta factible estudiar toda la población. Entonces, cuando se desea inferir algo acerca de una caracterís-

tica de la población, es necesaria una parte de la población denominada muestra.

b. Establecer contacto con todos los votantes o todos los consumidores llevaría demasiado tiempo y sería muy costoso. Es imposible marcar todas las ballenas del océano para estudiarlas. Verificar la resistencia de todos los productos los destruye y no quedaría ninguno para su venta.

25. Una muestra no probabilística, como una muestra tipo panel, puede dar resultados que no sean representativos de la población porque no todos los elementos o personas tienen posibilidad de ser seleccionados para la muestra.

27. El área metropolitana podría subdividirse en delegaciones. Podrían seleccionarse cuatro delegaciones para el estudio. Suponga que en el área hay 74 parques para casas móviles. Se podrían seleccionar ocho y las personas que efectúan la encuesta se concentrarían en los residentes de esos ocho parques.

29. a. Jeanne Fiorito, Douglas Smucker, Jeanine S. Huttner, Harry Mayhew, Mark Steinmetz y Paul Langenkamp.

b. Un grupo de números seleccionado aleatoriamente es 05, 06, 74, 64, 66, 55, 27, 22. Los elementos de la muestra son Janet Arrowsmith, David DeFrance, Mark Zilkoski y Larry Johnson.

31. Las respuestas varían.

33. a. 10, obtenido por medio de 5!/3!2!.

b.

Número correcto	*Media*	*Número correcto*	*Media*
4, 3	3.5	3, 3	3.0
4, 5	4.5	3, 2	2.5
4, 3	3.5	5, 3	4.0
4, 2	3.0	5, 2	3.5
3, 5	4.0	3, 2	2.5

c.

Media muestral	*Frecuencia*	*Probabilidad*
2.5	2	0.20
3.0	2	0.20
3.5	3	0.30
4.0	2	0.20
4.5	1	0.10
	10	1.00

d. $$\mu_{\bar{x}} = \frac{3.5 + 4.5 + \cdots + 2.5}{10} = \frac{34}{10} = 3.4$$

$$\mu = \frac{4 + 3 + 5 + 3 + 2}{5} = \frac{17}{5} = 3.4$$

Las dos medias son iguales.

e. Los valores de la población tienen una forma uniforme. La distribución de las medias muestrales tiende a ser normal.

35. Una muestra aleatoria simple sería adecuada, pero esto significa que cada tramo de 10 pies de longitud tendría que numerarse: 1, 2, 3, . . . , 720. Un método más rápido sería (1) seleccionar, por ejemplo, uno de los primeros 20 tubos producidos y (2) seleccionar después cada 20avo tubo producido y medir su diámetro interior. De esta forma la muestra incluiría aproximadamente 36 tubos de PVC.

37. De 6.14 a 6.86 años, obtenido por medio de $6.5 \pm 1.96(1.7/\sqrt{85})$.

39. a. 708.13, redondeado a 709, obtenido por medio de:

$$0.21(1 - 0.21)\left[\frac{1.96}{0.03}\right]^2$$

b. 1 068, obtenido por medio de:

$$0.50(0.50)\left[\frac{1.96}{0.03}\right]^2$$

41. 133, obtenido por medio de $\left(\frac{1.645 \times 14}{2}\right)^2$

43. a. 3.01 libras.

b. 3.0002 y 3.0198 libras, obtenido por medio de $3.01 \pm 1.96(0.03/\sqrt{36})$.

c. Aproximadamente 95% de intervalos de construcción semejante incluirán a la media poblacional.

45. 0.345 y 0.695, obtenido por medio de:

$$0.52 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.52(0.48)}{50}}\left(\sqrt{\frac{650 - 50}{650 - 1}}\right)$$

CAPITULO 9 / Pruebas de hipótesis: muestras grandes

1. a. $H_0: \mu = 10$; $H_1: \mu < 10$.

b. 0.05

c. Se rechaza H_0 si $z < -1.645$.

d. La z calculada es -2.53, obtenida por medio de:

$$\frac{9.0 - 10.0}{\frac{2.8}{\sqrt{50}}}$$

Se rechaza H_0. La media es menor de 10 libras.

3. a. $H_0: \mu = \$30\,000$; $H_1: \mu \neq \$30\,000$.
   b. 0.10.
   c. Se rechaza H_0 si $z > 1.645$ o bien $z < -1.645$.
   d. La z calculada es 1.83, obtenida por medio de:

$$\frac{\$30\,50 - \$30\,00}{\dfrac{\$3\,000}{\sqrt{120}}}$$

Se rechaza H_0. El salario promedio no es \$30 000.

5. a. $H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
   b. 0.04.
   c.

   d. La z calculada es $= -1.60$. H_0 no se rechaza. No hay diferencia en las puntuaciones finales de prueba.

$$z = \frac{114.6 - 117.9}{\sqrt{\dfrac{(9.1)^2}{40} + \dfrac{(10.4)^2}{50}}} = -1.60$$

7. a. $H_0: \mu_1 = \mu_2$; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
   b. Se rechaza H_0 si la z calculada está a la izquierda de -1.645 o a la derecha de $+1.645$.
   c. La z calculada es 34.20, obtenida por medio de:

$$\frac{2\,175 - 2\,050}{\sqrt{\dfrac{(12)^2}{64} + \dfrac{(20)^2}{36}}}$$

Se rechaza H_0. Existe una diferencia significativa en los dos turnos en lo que se refiere a las rpm de los motores.

9. H_0: $\mu = 16$; H_1 $\mu > 16$. La z calculada es 11.78, obtenida por medio de:

$$\frac{16.05 - 16.00}{\dfrac{0.03}{\sqrt{50}}}$$

Se rechaza H_0. Las latas se están llenando de sobra.

11. H_0 $\mu = 1\,010$; H_1: $\mu > 1\,010$. Se rechaza H_0 si la z calculada es mayor que 2.33. La z calculada es $= 23.41$, obtenida por medio de:

$$\frac{1\,250 - 1\,010}{\dfrac{205}{\sqrt{400}}}$$

Se rechaza H_0. La cantidad gastada ha aumentado.

13. H_0: $\mu = 200\,000$; H_1: $\mu < 200\,000$. Se rechaza H_0 si la z calculada está a la izquierda de -1.645. La z calculada es -10.00, obtenida por medio de:

$$\frac{190\,000 - 200\,000}{\dfrac{12\,000}{\sqrt{144}}}$$

Se rechaza H_0. La media es menor de 200 000.

CAPITULO 10 / Pruebas de hipótesis: proporciones

1. H_0: $p = 0.20$; H_1: $p < 0.20$. Regla de decisión: Rechazar H_0 si la z calculada está a la izquierda de -1.645. La z calculada es -0.56, obtenida por medio de:

$$\frac{\dfrac{390}{2\,000} - 0.20}{\sqrt{\dfrac{0.20(1 - 0.20)}{2\,000}}} = \frac{-0.005}{0.0089} = -0.56$$

No se rechaza H_0. No se puede llegar a la conclusión de que menos del 20% del auditorio ven el programa.

3. H_0: $p = 0.50$; H_1: $p < 0.50$. Se rechaza H_0 si la z calculada es menor que -1.645. La z calculada es -0.40, obtenida por medio de:

$$\frac{\dfrac{48}{100} - 0.50}{\sqrt{\dfrac{0.50(1 - 0.50)}{100}}} = \frac{-0.02}{0.50} = -0.40$$

No se rechaza H_0. La proporción de estudiantes que cambian de tema principal de estudio sigue siendo 0.50.

5. H_0: $p_1 = p_2$; H_1: $p_1 \neq p_2$. Se acepta H_0 si la z calculada está entre −1.96 y +1.96. En caso contrario se rechaza H_0.

$$\bar{p}_c = \frac{120 + 150}{400 + 600} = \frac{270}{1\,000} = 0.27$$

$$z = \frac{\frac{120}{400} - \frac{150}{600}}{\sqrt{\frac{0.27(1-0.27)}{400} + \frac{0.27(1-0.27)}{600}}} = 1.74$$

Se acepta H_0. No hay diferencia entre las dos proporciones.

7. a. Sí.
   b. $p_1 = 180/200 = 0.90$; $p_2 = 261/300 = 0.87$.
   c. H_0: $p_1 = p_2$; H_1: $p_1 > p_2$.
   d. 1.645.
   e. La z calculada es 1.02, obtenida por medio de:

$$\frac{0.90 - 0.87}{\sqrt{\frac{(0.882)(1 - 0.882)}{200} + \frac{0.882(1 - 0.882)}{300}}}$$

No se rechaza H_0. No hay diferencia en la efectividad de las dos medicinas.

9. H_0: $p = 0.40$; H_1: $p < 0.40$. El valor crítico es −1.645. La z calculada es −2.00, obtenida por medio de:

$$\frac{0.38 - 0.40}{\sqrt{\frac{0.40(1 - 0.40)}{2\,000}}} = \frac{-0.02}{0.01} = -2.00$$

Se rechaza H_0. No es posible atribuir la diferencia de 0.02 al azar (muestreo). En Knoxville menos del 40% tiene garajes.

11. H_0: $p = 0.40$; H_1: $p < 0.40$. El valor crítico es −1.645. La z calculada es −0.37, obtenida por medio de:

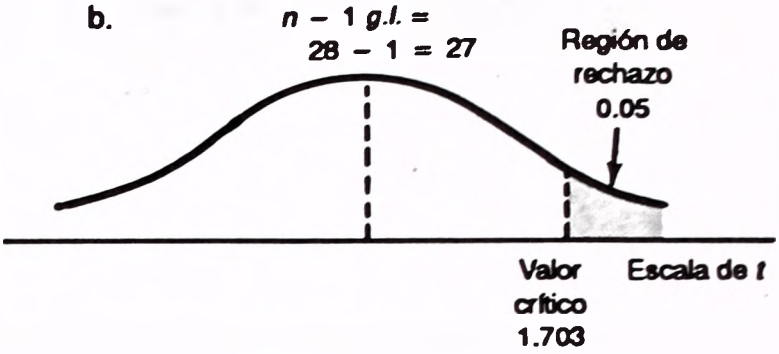
$$\frac{0.38 - 0.40}{\sqrt{\frac{0.40(1 - 0.40)}{80}}}$$

No se rechaza H_0. No se necesitan cortes en la producción.

CAPITULO 11 / Prueba t de Student: muestras pequeñas

1. a. H_0: $\mu = 40$; H_1: $\mu > 40$.

b.



c. La t calculada es 5.0, obtenida por medio de:

$$\frac{42 - 40}{\frac{2.1}{\sqrt{28}}} = \frac{2}{0.40} = 5.0$$

Se rechaza H_0; se acepta H_1. El número de llamadas es mayor de 40.

3. H_0: $\mu = 22\,100$; H_1: $\mu > 22\,100$. El valor crítico de t es 1.740. La t calculada es 3.68, obtenida por medio de:

$$\frac{23\,400 - 22\,100}{\frac{1\,500}{\sqrt{18}}}$$

Se rechaza H_0. La duración media de la bujía es de más de 22 100 millas.

5. H_0: $\mu = 1.35$; H_1: $\mu > 1.35$. Se rechaza H_0 si la t calculada es mayor de 2.821. La t calculada es 1.68, obtenida por medio de:

$$\frac{1.368 - 1.35}{\frac{0.0339}{\sqrt{10}}}$$

No se rechaza H_0. El aditivo no aumentó el peso de los pollos.

7. H_0: $\mu = 4.0$; H_1: $\mu > 4.0$. El valor crítico de t es 1.796.

$$s = \sqrt{\frac{322 - \frac{(54)^2}{12}}{12 - 1}} = 2.68$$

$$\bar{X} = \frac{54}{12} = 4.50$$

$$t = \frac{4.50 - 4.00}{\frac{2.68}{\sqrt{12}}} = 0.65$$

No se rechaza H_0. El número promedio de peces atrapados sigue siendo 4.00.

9. H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 < \mu_2$. $g.l. = 9 + 7 - 2 = 14$. El valor crítico de t es −2.624.

$$s_1^2 = \frac{55\,476 - \frac{(702)^2}{9}}{9 - 1} = 90$$

$$s_2^2 = \frac{43\,971 - \frac{(553)^2}{7}}{7 - 1} = 47.33$$

$\overline{X}_1 = 78$; $\overline{X}_2 = 79$. La t calculada es –0.234, obtenida por medio de:

$$\frac{-1}{\sqrt{71.7129\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{7}\right)}}$$

No se rechaza H_0. No hay diferencia en las calificaciones promedio.

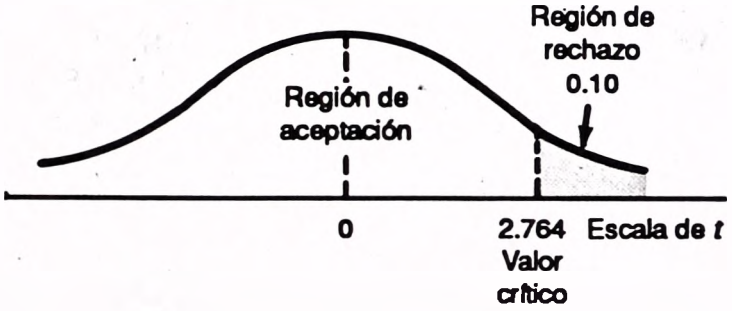
11. H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 > \mu_2$. $g.l. = 22 + 25 - 2 = 45$. El valor crítico de t es 1.301. La t calculada es 1.325, obtenida por medio de:

$$\frac{2}{\sqrt{26.6667\left(\frac{1}{22} + \frac{1}{25}\right)}}$$

Se rechaza H_0. El conteo promedio de polen en el valle es mayor que en las montañas.

13. a. H_0: $\mu_d = 0$; H_1: $\mu_d > 0$.

b. $g.l. = 11 - 1 = 10$



c. $\overline{d} = 7.3636$; $s_d = 8.3699$ La t calculada es 2.92. Se rechaza H_0; los pesos han aumentado.

15. H_0: $\mu_d = 0$; H_1: $\mu_d > 0$. Se considera a la pérdida de peso como un éxito. El valor crítico es 2.821.

$$\overline{d} = \frac{1}{10} = 0.10$$

$$s_d = \sqrt{\frac{165 - \frac{(1)^2}{10}}{10 - 1}} = 4.28$$

$$t = \frac{0.10}{\frac{4.28}{\sqrt{10}}} = 0.07$$

No se rechaza H_0. No ha habido reducción de peso.

17. H_0: $\mu = 87$; H_1: $\mu < 87$. $g.l. = 8 - 1 = 7$. El valor crítico es –1.895.

$$s = \sqrt{\frac{55\,244 - \frac{(664)^2}{8}}{8 - 1}} = 4.3425$$

$$\overline{X} = \frac{664}{8} = 83.0$$

$$t = \frac{83.0 - 87.0}{\frac{4.3425}{\sqrt{8}}} = -2.61$$

Se rechaza H_0. El número de millas es menor que el de la publicidad.

19. H_0: $\mu_1 - \mu_2$; H_1 $\mu_1 > \mu_2$. (El grupo 10–10–40 es 1). $g.l. = 15 + 13 + 2 = 26$. El valor crítico es 2.056.

$$t = \frac{0.29}{\sqrt{0.0521\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{13}\right)}} = 3.35$$

Se rechaza H_0. El grupo 10–10–40 tiene mayor estatura media.

21. H_0: $\mu_d = 0$; H_1: $\mu_d \neq 0$. $g.l. = 12 - 1 = 11$. Se rechaza H_0 si la t calculada está a la izquierda de –2.201 o a la derecha de 2.201.

$$s_d = \sqrt{\frac{291 - \frac{(1)^2}{12}}{12 - 1}} = 5.1427$$

$$\overline{d} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

$$t = \frac{0.0833}{\frac{5.1427}{\sqrt{12}}} = 0.056$$

No se rechaza H_0. No hay diferencia en los resultados usando los dos métodos.

CAPITULO 12 / Análisis de variancia

1. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, en donde 1 corresponde a mujeres, 2 a hombres. H_0 se rechaza si $F > 3.10$. La F calculada es 1.44, obtenida por medio de $(12)^2/(10)^2$. No se rechaza H_0.

3. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$. Se rechaza H_0 si $F > 4.26$.

$$\text{SS total} = 20\,783 - \frac{(495)^2}{12} = 364.25$$

$$\text{SST} = \frac{(142)^2}{4} + \frac{(164)^2}{4} + \frac{(189)^2}{4} - \frac{(495)^2}{12} = 276.5$$

$$\text{SSE} = 364.25 - 276.50 = 87.75$$

Fuente	*SS*	*g.l.*	*MS*	*F*
Tratamiento	276.50	2	138.25	14.18
Error	87.75	9	9.75	
Total	364.25	11		

Ya que 14.18 > 4.26, H_0 se rechaza. Los ingresos medios difieren.

5. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$; H_1: No todas las medias son iguales. Se rechaza H_0 si $F > 3.71$.

$$\text{SS total} = 2\,444 - \frac{(182)^2}{14} = 78.00$$

$$\text{SST} = \frac{(48)^2}{4} + \frac{(46)^2}{4} + \frac{(46)^2}{3} - \frac{(42)^2}{3} - \frac{(182)^2}{14} = 32.33$$

$$\text{SSE} = 78.00 - 32.33 = 45.67$$

Fuente	*SS*	*g.l.*	*MS*	*F*
Tratamiento	32.33	3	10.77	2.36
Error	45.67	10	4.567	
Total	78.00	13		

Ya que 2.36 es menor que 3.71, H_0 no se rechaza. No hay diferencia entre el número promedio de semanas.

7. Para tratamiento

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1: No todas las medias son iguales

Para bloques

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

H_1: No todas las medias son iguales

SS total = 139.73, SST = 62.53, SSB = 33.73, SSE = 43.47

Fuente	*SS*	*g.l.*	*MS*	*F*
Tratamiento	62.53	2	31.265	5.75
Bloques	33.73	4	8.4325	1.55
Error	43.47	8	5.43375	
Total	139.73	14		

Existe diferencia entre turnos, pero no por empleado.

9. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; H_1: No todas las medias son iguales. H_0 se rechaza si $F > 3.89$.

SS total = 37.73, SST = 26.13, SSE = 11.60

Fuente	*SS*	*g.l.*	*MS*	*F*
Tratamiento	26.13	2	13.067	13.52
Error	11.60	12	0.967	
Total	37.73	14		

Se rechaza H_0 ya que 13.52 > 3.89. Entre las tres dietas existe diferencia en la pérdida promedio de peso.

11. a. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; H_1: No todas las medias son iguales. H_0 se rechaza si $F > 3.68$.

$$\text{SS total} = 16\,608 - \frac{(542)^2}{18} = 287.7778$$

$$\text{SST} = \frac{(233)^2}{7} + \frac{(167)^2}{6} + \frac{(142)^2}{5} - \frac{(542)^2}{18} = 116.3187$$

$$\text{SSE} = 287.7778 - 116.3187 = 171.4591$$

$F = 5.09$. Por tanto, se rechaza H_0 porque 5.09 > 3.68. Las puntuaciones sobre perfeccionismo difieren dependiendo del tamaño de la ciudad.

b. Sí, porque ambos extremos son positivos.

$$(33.29 - 28.4) \pm 2.131\sqrt{11.43\left(\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{5}\right)} = 0.67 \text{ y } 9.11.$$

La puntuación media en perfeccionismo difiere para las personas con un origen rural o urbano.

13.

Fuente	*SS*	*g.l.*	*Media de cuadrados*	*F*
Tratamiento	320	2	160	8.00
Error	180	9	20	
Total	500	11		

a. 3.
b. 12.
c. 4.26.
d. H_0: $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3$; H_1: No todas las medias son iguales.
e. Se rechaza H_0. Las medias de tratamiento difieren.

15. SS total = 22.59, SST = 3.92, SSB = 10.21 SSE = 8.46

Para autos

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_1: Las medias no son iguales

H_0: se rechaza si $F > 5.14$

Para gasolina

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H_1: Las medias no son iguales

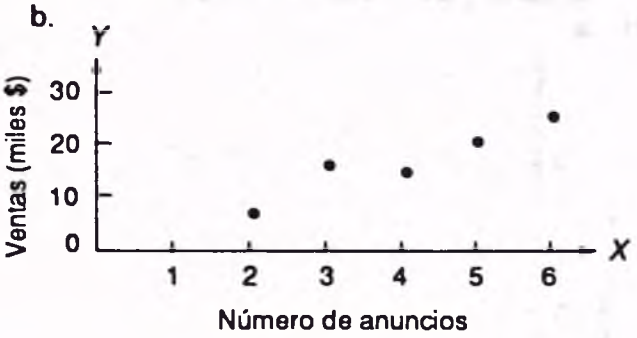
H_0: se rechaza si $F > 4.76$

Fuente	*SS*	*g.l.*	*Media de cuadrados*	*F*
Tratamiento	3.92	2	1.96	1.39
Bloques	10.21	3	3.40	2.41
Error	8.46	6	1.41	
Total	22.59	11		

a. No hay diferencia entre los tipos de gasolina porque 2.41 es menor que 4.76.
b. No hay diferencia en los automóviles porque 1.39 es menor que 5.14.

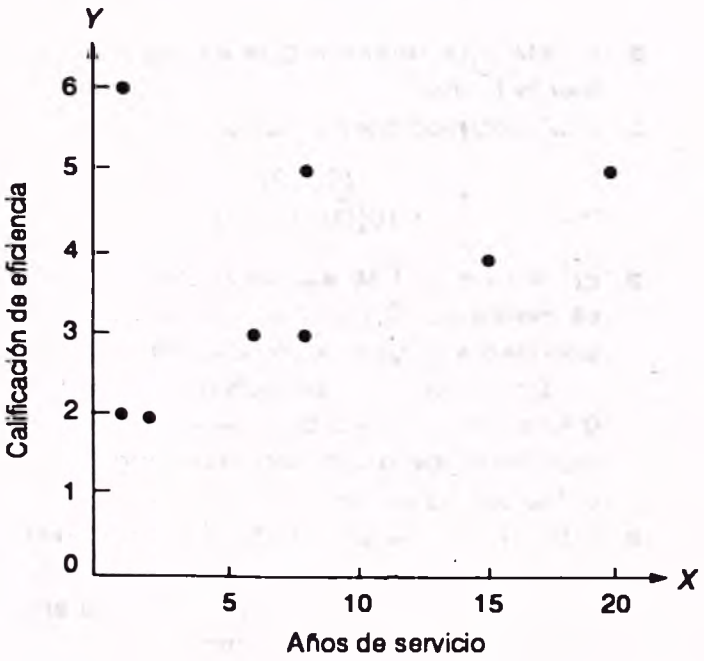
CAPITULO 13 / Análisis de correlación simple

1. a. Ventas
   b.



   c. Sí. Existe una fuerte correlación positiva.
   d. 0.93.
   e. 0.93 indica una fuerte correlación positiva entre el número de veces que la propaganda salió al aire y las ventas.

3. a. Calificación de eficiencia.
   b.



   c. No.
   d. 0.35, calculado por medio de:

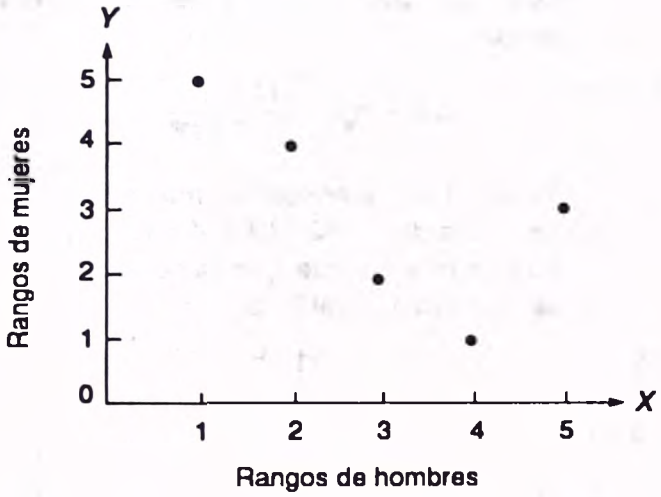
$$\frac{8(254) - (61)(30)}{\sqrt{[8(795) - (61)^2][8(128) - (30)^2]}}$$

   e. 0.35 indica una relación muy débil.

5. a. $r^2 = (0.93)^2 = 0.86$.
   $1 - r^2 = 1 - 0.86 = 0.14$.
   b. La cifra 0.86 es la proporción de la variación en ventas explicada por el número de anuncios; 0.14 es la proporción de la variación en ventas no explicada por el número de anuncios.

7. a. $r^2 = (0.35)^2 = 0.12$.
   $1 - r^2 = 0.88$ calculado por medio de $1 - 0.12$.
   b. El 12% de la variación en la calificación de eficiencia se debe a los años de servicio; 88% de la variación en eficiencia no se explica por los años de servicio.

9. a.



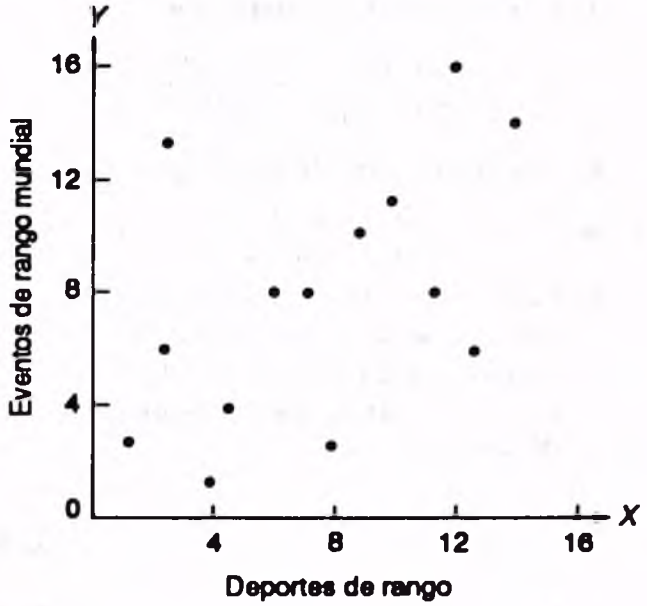
   b. −0.70, calculado por medio de:

$$1 - \frac{(6)(34))}{5(5^2 - 1)}$$

   Existe una fuerte relación, pero inversa.

11. a. −0.492, según cálculos con MINITAB.
    b. Existe una relación moderada, pero inversa, entre las dos variables por rango.

13. a.



b. 0.49, obtenido por medio de:

$$1 - \frac{6(234)}{14[(14)^2 - 1]}$$

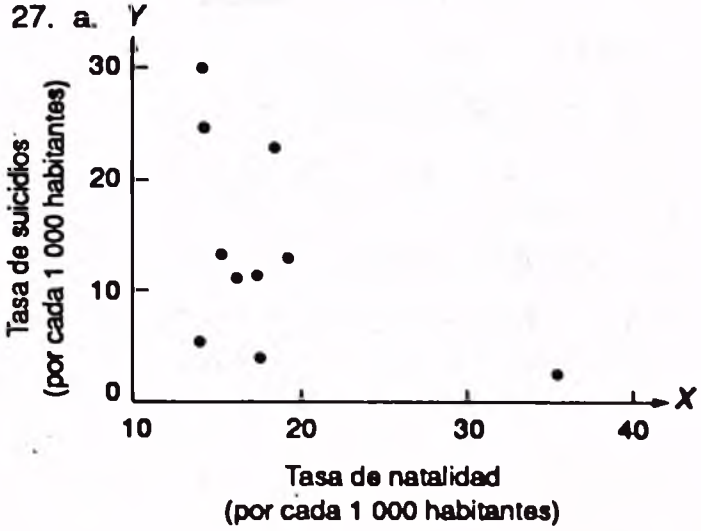
c. No, la correlación en la población no es 0. La t calculada es 1.95, obtenida por medio de:

$$0.49\sqrt{\frac{14 - 2}{1 - (0.49)^2}}$$

Ya que 1.95 se encuentra más allá del valor crítico de 1.782 (del apéndice F), la hipótesis nula de que r_s en la población es 0 se rechaza al nivel 0.05.

15. c.
17. d.
19. a.
21. b.
23. c.
25. d.

27. a.



b. Se trata de una relación más bien débil.

c. $r = -0.47$; $r^2 = 0.22$; $1 - 0.22 = 0.78$.

d. Sólo el 22% de la variación en la tasa de suicidios se explica por la tasa de nacimientos; el 78% no se explica.

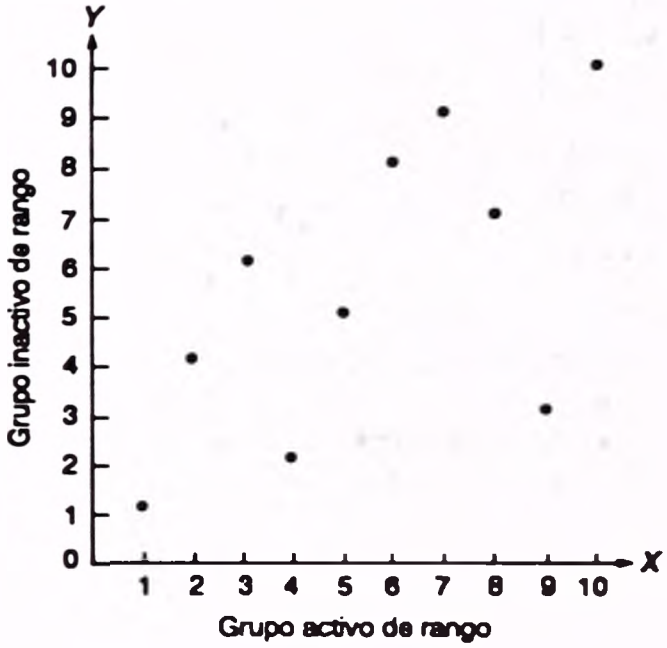
e. $t = -1.506$, obtenido por medio de

$$\frac{-0.47\sqrt{10 - 2}}{\sqrt{1 - (-0.47)^2}}$$

Usando el nivel 0.01 y una prueba de dos colas, el valor crítico de t para 8 grados de libertad es más-menos 3.355. Ya que 0 − 1.506 se encuentra en la región de aceptación, se acepta la hipótesis nula de que r en la población es cero.

29. Los resultados por computadora varían de acuerdo con el paquete que se use.

31. a.



b. Existe una relación que es moderadamente fuerte.

c. 0.62, obtenido por medio de:

$$1 - \frac{(6)(62)}{10[(10)^2 - 1]}$$

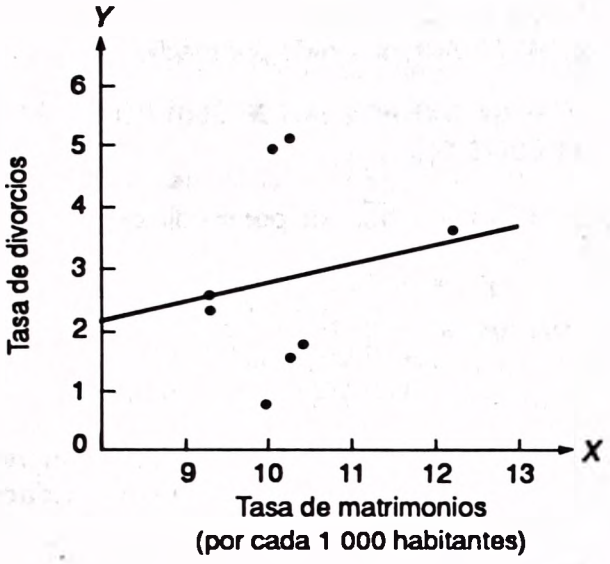
d. En el nivel 0.01 se acepta H_0 porque 0.62 es menor que 0.746. Se llega a la conclusión de que la correlación es cero.

En el nivel 0.05 se rechaza H_0 porque 0.62 es mayor que 0.564. Se llega a la conclusión de que la correlación de rango en la población no es cero.

e. Esto ilustra que se acepta H_0 en un nivel (0.01), pero se rechaza H_0 en el nivel 0.05. El nivel de significación debe elegirse antes de realizar el experimento.

CAPITULO 14 / Análisis de regresión simple

1. a.

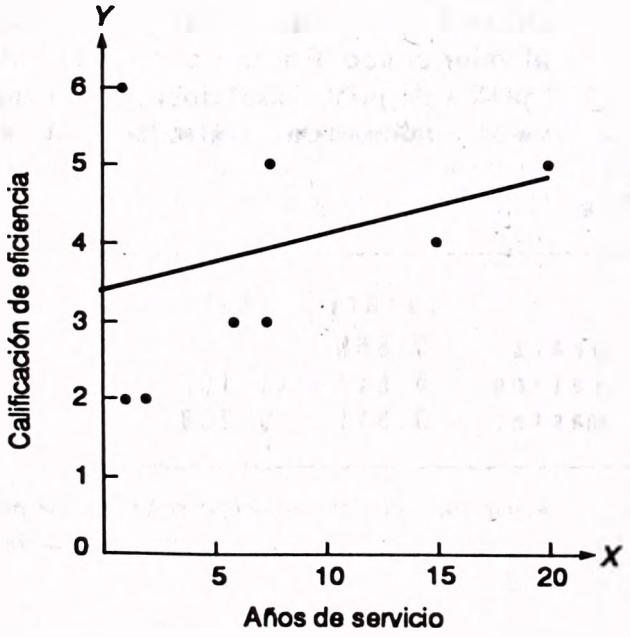


b. Tasa de matrimonios.
c. Existe cierta relación, pero muy débil.
d. $y' = -0.74 + 0.344X$.
e.

X	Y'
9.5	2.58
10.0	2.70
10.5	2.82

f. El coeficiente de correlación $r^2 = 0.20$, el coeficiente de determinación $r^2 = 0.04$, obtenido por medio de $(0.20)^2$. Existe una relación muy débil. Sólo el 4% de la variación en la tasa de divorcios se explica debido a la tasa de matrimonios.

3. a. Calificación de eficiencia.



c. Existe cierta relación, pero muy débil.
d. $Y' = a + bX = 3.166352 + 0.076544X$

$$b = \frac{8(254) - 61(30)}{8(795) - (61)^2}$$

$$a = \frac{30}{8} - 0.076544\left(\frac{61}{8}\right)$$

e. 3.778704, calculado por medio de $y' = 3.166352 + 0.076544(8)$.
f.

X	Y'
0	3.166352
6	3.625616
10	3.931792

5. a. 1.504, determinado por:

$$\sqrt{\frac{128 - 3.166352(30) - 0.076544(254)}{8 - 2}}$$

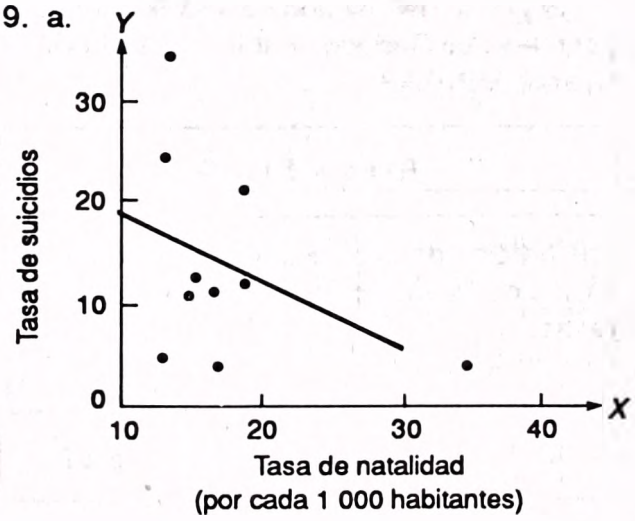
b. Entre más-menos 1.504 puntos de eficiencia, obtenido por medio de 1(1.504).

7. El coeficiente de correlación $r = 0.8944$, obtenido por medio de:

$$\frac{(5)(340) - (50)(30)}{\sqrt{[(5)(600) - (150)^2][(5)(200) - (30)^2]}}$$

Entonces, $(0.8944)^2 = 0.80$, es el coeficiente de determinación.

9. c.
11. a.
13. d.
15. b.
17. c.
19. a.



b. $y' = 25.64 + (-0.674)X$.
c.

X	Y'
10	18.90
20	12.16
30	5.42

d. 15.53, evaluado mediante $y' = 25.64 + (-0.674)15$.

e. 8.76, obtenido por medio de:

$$\sqrt{\frac{2\,652.52 - 25.64(136.6) - (-0.674)(2\,171.77)}{10 - 2}}$$

f. 8.53 y 22.53, calculado por medio de:

$$15.53 \pm 2.306(8.76)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{15.0 - 17.78)^2}{381.52}}$$

g. Para un grupo de países cuyas tasas de nacimiento son exactamente 15.0 por 1 000 habitantes, la probabilidad de que sus tasas de suicidio estén en el intervalo entre 8.53 y 22.53 es 0.95.

21. Usando MINITAB:

```
MTB > regress y in c2, 1 in c1
```

La ecuación de regresión es

```
c2 = 8.9 + .99/c1
```

Tres puntos son:

Porcinos	*Bovinos*
38	46.558
40	48.540
42	50.522

El precio del ganado es $53.50, obtenido por medio de Ganado = 8.9 + 0.991 (45). Usando MINITAB:

```
R-sq = 51.8%
```

Los precios de cerdos son responsables del 81.7% de la variación en los precios de las reses.

23. Usando MINITAB:

```
MTB > regress y in c3, 1 in c2
```

La ecuación de regresión es:

```
c3 = -6.99 + 1.30 c2
s = 5.961, R-sq = 93.0%
```

Existe una relación muy fuerte entre los precios de terneras y reses.

CAPITULO 15 / Análisis de regresión y correlación múltiples

1. a. Ecuación de regresión múltiple.
   b. La intersección y.
   c. $374 748, obtenido por medio de:

   $y' = 64\,100 + 0.394(796\,000) + 9.6(6\,940) - 11\,600(6.0)$

3. a. 465.256, obtenido por medio de:

$$\begin{aligned} y' = &- 16.24 + 0.017(18) \\ &+ 0.0028(26\,500) + 42(3) \\ &+ 0.0012(156\,000) \\ &+ 0.19(141) + 26.8(2.5) \end{aligned}$$

   b. Otras dos actividades sociales. El ingreso agregó sólo 28 al índice; las actividades sociales agregaron 53.6.

5. a. $28 000 al día.
   b. 0.58 obtenido por medio de:

$$\frac{\text{SSR}}{\text{SS total}} = \frac{3\,050}{5\,250}$$

   c. 9.20, obtenido por medio de $\sqrt{84.62}$.
   d. Se rechaza H_0 si $F > 2.97$ (aproximadamente).

$$F \text{ calculada} = \frac{762.50}{84.62} = 9.01$$

   Se rechaza H_0. Al menos un coeficiente de regresión no es cero.
   e. Si la t calculada no está a la izquierda de -2.056 o a la derecha de 2.056, la hipótesis nula en cada uno de estos casos se rechaza. La t calculada para X_2 y X_3 excede al valor crítico. Por tanto, "población" y "gastos de publicidad" deberían conservarse y "número de competidores", X_1, eliminarse.

7. a. Usando MINITAB:

	salary	years	rating
years	0.868		
rating	0.547	0.187	
master	0.311	0.208	0.458

Años tiene la correlación más fuerte con sueldo. No parece haber problema de multicolinealidad.

b. La ecuación de regresión es

$$\text{Sueldo} = 9.92 + 0.899\ (\text{años}) + 0.154\ (\text{calificación}) - 0.67\ (\text{posgrados})$$

El sueldo es aproximadamente $23 655.

c. Se rechaza H_0 si $F > 3.24$.

$$F \text{ calculada} = \frac{301.06}{5.71} = 52.7$$

Se rechaza H_0. Al menos un coeficiente de regresión no es cero.

d. Se elimina un coeficiente de regresión si la t calculada está a la izquierda de -2.120 o a la derecha de 2.120. Se conservan "años" y "calificación" y se elimina "posgrados".

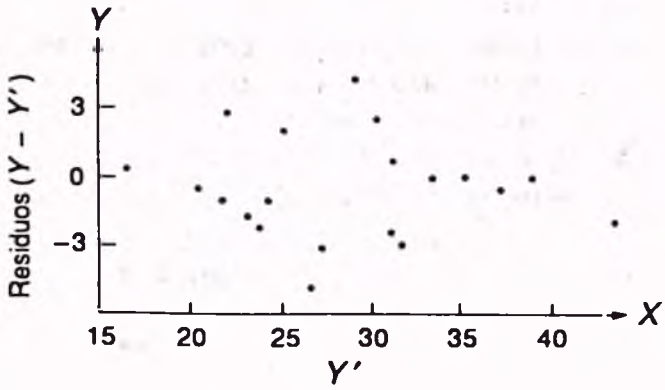
e. Eliminando "posgrados" se tiene

$$\text{Sueldo} = 10.1 + 0.893\ (\text{años}) + 0.146\ (\text{calificación})$$

f. La representación de hoja y tallo y el histograma no revelaron problema alguno con la consideración de normalidad. Usando de nuevo MINITAB:

Midpoint	Count
−4	1 *
−3	1 *
−2	3 ***
−1	3 ***
0	4 ****
1	4 ****
2	0
3	3 ***
4	0
5	1 *

g. No parece haber un patrón en los residuales, de acuerdo con la siguiente gráfica de MINITAB.



9. a. Usando MINITAB

	income	percent
percent	−0.514	
educ	−0.077	0.265

La variable "porcentaje empleado" tiene la mayor correlación. La relación entre ingreso y educación es bastante baja.

b. $y' = 31.9 - 1.23(12) + 0.109(15) = 18.775$, o $18 775 de ingreso.

c. Se rechaza H_0 si la F calculada es mayor que 3.63. $F = 32.43/11.11 = 2.92$, de manera que H_0 no se rechaza. Ambos coeficientes de regresión podrían ser cero.

d. Se rechaza H_0 si se calcula $t < -2.210$ o $t > 2.120$. Es significativo "porcentaje empleado en la agricultura"; "educación" no lo es.

e. Ingreso = 33.0 − 1.19 (porcentaje empleado).

f. Se cumple la consideración de normalidad.
El histograma de los residuales es:

Midpoint	Count
−8	1 *
−6	0
−4	1 *
−2	4 ****
0	5 *****
2	5 *****
4	3 ***

g. Las gráficas no revelan violaciones.

h. La cantidad de variación explicada es muy baja. Deberían considerarse otras variables independientes.

11. a. La relación más fuerte es entre ventas e ingreso (0.964). Podría ocurrir un problema si tanto "automóviles" como "distribuidores" son parte de la solución final. Además, distribuidores e ingreso están fuertemente correlacionados (0.825).

b. $$R^2 = \frac{1\,593.81}{1\,602.89} = 0.994$$

c. Se rechaza H_0. Al menos un coeficiente de regresión no es cero.

$$F = \frac{531.22}{1.54} = 344.95$$

d. Se eliminan "distribuidoras" y "jefes".

e. $$R^2 = \frac{1\,593.66}{1\,602.89} = 0.994$$

Hubo poco o ningún cambio en el coeficiente de determinación.

f. La consideración de normalidad parece razonable.

g. No hay nada raro en las gráficas.

CAPITULO 16 / Análisis de datos a nivel nominal: distribución ji cuadrada

1. H_0: No hay diferencia entre las opiniones.
H_1: No hay diferencia entre las opiniones.
Se rechaza H_0 si la ji cuadrada calculada es mayor que 15.086. Hay 5 grados de libertad, lo que se obtiene por medio de 6 − 1.
La ji cuadrada calculada es 3.4000. No se rechaza H_0. Las diferencias se deben al azar.

3. H_0: Las respuestas muestrales son representativas de la población.
H_1: Las respuestas no son representativas de la población.
Hay 7 − 1 = 6 grados de libertad. El valor crítico de ji cuadrada es 12.592. Se rechaza H_0 si el valor calculado es mayor que 12.592.

Universidad	f_0	*Proporción*	f_e	$\frac{(f_0 - f_e)}{f_e}$
Artes y C.	90	0.27	81	1.00
Admón. de E.	45	0.14	42	0.21
Docencia	60	0.19	57	0.16
Ingeniería	30	0.08	24	1.50
Derecho	15	0.05	15	0
Farmac.	15	0.07	21	1.71
Docencia	45	0.20	60	3.75
				8.33

No se rechaza H_0. La muestra es representativa de la población.

5. H_0: El nivel de ingreso y el estado laboral no están relacionados.
H_1: El nivel de ingreso y el estado laboral están relacionados.
Grados de libertad = (4 − 1)(3 − 1) = 6.
El valor crítico es 12.592.
La ji cuadrada calculada es 0.776, obtenida por medio de:

$$\frac{(9-9)^2}{9} + \frac{(11-10.2)^2}{10.2} + \cdots + \frac{(107-108)^2}{108}$$

No se rechaza H_0. No hay relación entre el nivel de ingreso y el estado laboral.

7. H_0: Edad y opinión no se relacionan.
H_1: Edad y opinión se relacionan.
Grados de libertad = (4 − 1)(4 − 1) = 9.
Se rechaza H_0 si la ji cuadrada calculada es mayor que 16.919.
Ji cuadrada calculada = 269.191. Se rechaza H_0.

9. H_0: El ingreso y los logros académicos no están relacionados.
H_1: El ingreso y los logros académicos están relacionados.
El valor crítico de ji cuadrada es 12.592.
La ji cuadrada calculada es 8.391. Se acepta H_0. El ingreso y los logros académicos no están relacionados. Esto significa que no hay relación entre el puntaje promedio de calificaciones en la universidad y el ingreso después de la universidad.

CAPITULO 17 / Métodos no paramétricos: análisis de datos por rango

1. a. De dos colas.
   b. n = 19. Se rechaza H_0 si hay 5 o menos signos "+", o 14 o más. El total de 12 signos "+" cae en la región de aceptación. H_0 no se rechaza. No hay preferencia entre los dos programas.
   c. Ambos programas serían igualmente populares.

3. a. $H_0: p = 0.50$ $H_1: p > 0.50$.
De las 14 personas que participaron, 12 mejoraron su confianza personal, 1 quedó igual y 1 persona sufrió la disminución de la confianza en sí misma después del seminario. Por tanto, el tamaño de la muestra es 13.
   b. Se rechaza H_0 si hay 10 o más signos positivos.
   c. Hubo 12 signos positivos, de manera que se rechaza H_0. Los corredores mejoraron la confianza personal.

5. $H_0: p = 0.50$ $H_1: p > 0.50$
Se rechaza H_0 si $z > 2.05$.

$$\mu = 81(0.50) = 40.5$$
$$\sigma = \sqrt{81(0.50)(0.50)} = 4.5$$
$$z = \frac{4.25 - 40.5}{4.5} = 0.44$$

No se rechaza H_0. No existe una preferencia decidida por el menú normal o gourmet.

7. a. H_0: Mediana = \$40 000 H_1: Mediana > \$40 000.
   b. Se rechaza H_0 si $z > 1.645$.
   c.
$$\mu = 200(0.50) = 100$$
$$\sigma = \sqrt{200(0.50)(0.50)} = 7.07$$
$$z = \frac{174.5 - 100}{7.07} = 10.54$$

Se rechaza H_0. La mediana del ingreso es mayor de \$40 000.

9. H_0: Las distribuciones de edades de los dos grupos son iguales.
H_1: Los músicos de "country-western" son más viejos.
$n_1 = 10$, $n_2 = 12$. Se rechaza H_0 si el menor de U o bien $U' \leq 34$.

Rock		*Country*	
Edad	*Rango*	*Edad*	*Rango*
28	8.0	26	6.0
16	1.0	42	16.5
42	16.5	65	22.0
29	9.5	38	13.0
31	11.0	29	9.5
22	3.0	32	12.0
50	20.0	59	21.0
42	16.5	42	16.5
23	4.0	27	7.0
25	5.0	41	14.0
	94.5	46	19.0
		18	2.0
			158.5

$$U = 10(12) + \frac{10(11)}{2} - 94.5 + 80.5$$
$$U' = 10(12) + \frac{12(13)}{2} - 158.5 = 39.5$$

Se acepta H_0 (ya que 39.5 es mayor que 34). No hay diferencia en las dos distribuciones de edad.

11. H_0: Las distribuciones de la duración son iguales.
H_1: Las distribuciones de la duración no son iguales.
Se rechaza H_0 si $\chi^2 > 9.210$.

Salado		*Dulce*		*Otras*	
Horas	*Rango*	*Horas*	*Rango*	*Horas*	*Rango*
167.3	3	160.6	1	182.7	13
189.6	15	177.6	11	165.4	2
177.2	10*	185.3	14	172.9	7
169.4	6	168.6	4	169.2	5
180.3	12	176.6	9	174.7	8
	46		39		35

$\chi^2 = 0.62$, obtenido por:

$$\frac{12}{15(16)}\left[\frac{(46)^2}{5} + \frac{(39)^2}{5} + \frac{(35)^2}{5}\right] - 3(16)$$

No se rechaza H_0. No hay diferencia en las tres distribuciones.

13. H_0: La producción es igual en los dos sistemas.
H_1: La producción usando el método Mump es mayor.
Se rechaza H_0 si $T \leq 21$. $n = 13$.
Los cálculos para los tres primeros empleados son:

Empleado	*Antig.*	*Mump*	*d*	*Rango*	R^+	R^-
A	60	64	4	6	6	
B	40	52	12	12.5	12.5	
C	59	58	−1	2		2

La suma de los rangos negativos es 6.5, menor que la suma de los rangos positivos. Ya que 6.5 es menor que 21, se rechaza H_0. La producción usando el método Mump es mayor.

15. H_0: La responsabilidad hacia la comunidad es la misma antes que después de casarse.
H_1: La responsabilidad hacia la comunidad no es la misma.
Se rechaza H_0 si $T \leq 3$. $n = 8$.
Los cálculos para las primeras cuatro mujeres son:

Nombre	*Antes*	*Despues*	*d*	*Rango*	R^+	R^-
Isabel	110	114	4	3	3	
Julia	157	159	2	2	2	
Susana	121	120	−1	1		1
Catalina	29	103	7	4.5	4.5	

La menor suma de rangos es 13.5, que la T calculada. Se encuentra en la región de aceptación más allá de 3. La responsabilidad hacia la comunidad es igual antes que después del matrimonio.

17. H_0: Los minutos desocupados son los mismos.
H_1: Los minutos desocupados no son los mismos.
$n_1 = 5; n_2 = 6$
Se rechaza H_0 si U o $U' \geq 3$.

Día		*Noche*	
Minutos	*Rango*	*Minutos*	*Rango*
92	7	96	8
103	9	114	10
116	11	80	1
81	2	82	3
89	5	88	4
	34	91	6
			32

$$U = 5 \times 6 + \frac{5 \times 6}{2} - 34 = 11$$

$$U' = 5 \times 6 + \frac{6 \times 7}{2} - 32 = 19$$

No se rechaza H_0; no hay diferencia en los minutos de ocio.

19. H_0: Mediana = \$1 200
H_1: Mediana > \$1 200
Se rechaza H_0 si $z > 1.645$.

$$\mu = 144(0.50) = 72$$
$$\sigma = 0.50\sqrt{144} = 6$$
$$z = \frac{74.5 - 72}{6} = 0.42$$

No se rechaza H_0. La mediana podría ser \$1 200.

21. $H_0; p = 0.50$
$H_1: p \neq 0.50$
Se rechaza H_0 si hay 12 o más signos positivos. Ya que sólo hay 8 signos positivos, no se rechaza H_0. No hay preferencia con respecto a las dos marcas de componentes.

CAPITULO 18 / Números de Índice

1. a. 122.2, calculado por medio de (\$110 500/\$90 400)(100). El precio aumentó 22.2% entre 1981 y 1988.
   b. 124.7, obtenido por (\$84 200/67 500)(100). El incremento del préstamo fue de 24.7% entre1981-82 y 1988.

3. a. 121.0, obtenido por (\$97.71/\$80.75)(100).

Fruta	*Precio 1983,* p_0	*Cantidad consumida* q_0	p_0q_0	*Precio 1990,* p_n	p_nq_0
Plátanos	\$0.23	100	\$23.00	\$0.35	\$35.00
Uvas	0.29	50	14.50	0.27	13.50
Manzanas	0.35	85	29.75	0.35	29.75
Fresas	1.02	8	8.16	1.69	13.52
Naranjas	0.89	6	5.34	0.99	5.94
			\$80.75		\$97.71

   b. Los precios de las frutas en 1990 fueron un 21.0 % superiores a los de 1983.

5. a. $Q = 90.4$, obtenido por medio de (\$1 975.92/\$2 186.53)(100).
   $V = 93.8$, obtenido por medio de (\$2 051.81/\$2 186.53)(100).

	p_0	q_0	p_0q_0	p_n	q_n	p_0q_n	p_nq_n
Avena	\$1.52	200	\$ 304.00	\$1.87	214	\$ 325.28	\$ 400.18
Trigo	2.10	565	1 186.50	2.05	489	1 026.90	1 002.45
Maíz	1.48	291	430.68	1.48	203	300.44	300.44
Cebada	3.05	87	265.35	3.29	106	323.30	348.74
			\$2 186.53			\$1 975.92	\$2 051.81

7. a. 250.0, calculado por medio de (\$1.00/\$0.40)(100) Los dividendos aumentaron 150.0% entre 1979 y 1987.
   b. 222.2, obtenido por (\$1.00/\$0.45)(100). Los dividendos aumentaron 122.2% de 1979-80 a 1987.

9. 31.9, calculado por medio de (\$109 844 000/\$3 444 568 000)(100). La deuda a largo plazo disminuyó 68.1% de 1979 a 1987, calculado por medio de 100 − 39.9.

11. Indice de construcción = 142.1, calculado por medio de ($487.54/$342.99)(100), lo que indica un incremento del 42.1%. Finanzas, seguros y bienes raíces aumentaron un 90.2%.
13. Los ingresos reales por servicios aumentaron $0.25. Para 1982-84, ($7.27/100) = $7.27. Para 1988 ($8.81/117.1)(100) = $7.52. Entonces, $7.52 − $7.27 = $0.25. El ingreso real por ventas al menudeo bajó $0.34, calculado por medio de $5.35 − $5.69. Las manufacturas bajaron $0.07, calculado por medio de $8.77 − $8.84.
15. El ingreso real en 1986 fue $1 861.31, calculado por medio de ($2 040/109.6)(100). Para 1988 el ingreso real fue $1 784.80, calculado por medio de ($2 090/117.1)(100). El ingreso real disminuyó $76.51.
17. a. Si 1950 es 100.0 (periodo base):

Año	*CPI*	*Mano de obra*	*Productividad*	*PNB*
1950	100.0	100.0	100.0	100.0
1967	138.7	126.6	154.1	275.9
1971	168.2	135.9	170.0	371.6
1975	223.6	148.4	177.0	529.8
1980	342.3	167.2	225.9	917.5

b. De 1950 a 1980 los precios al consumidor aumentaron 242.3%, la mano de obra 67.2%, la productividad 125.9% y el producto interno bruto 817.5%.

19. a. Los precios aumentaron 603.6%, calculado por medio de

P = ($1 818 260/$258 437)(100) = 703.6.

restando 100.0 se tiene 606.6.

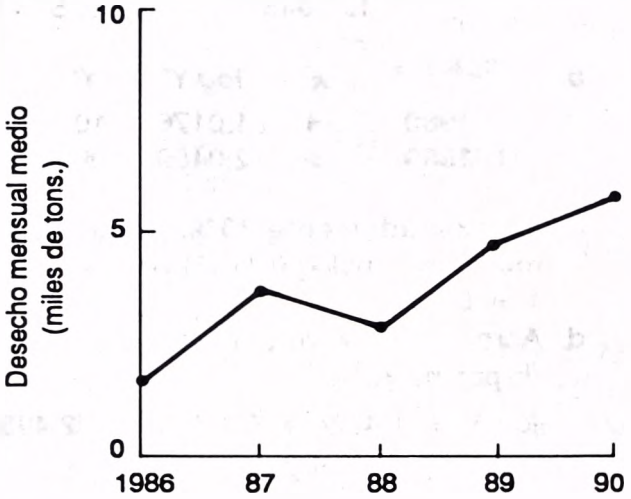
b. La cantidad producida aumentó en 5.1%, calculado por medio de ($271 624.40/$258 437)(100) = 105.1.

Artículo	p_0q_0	p_0q_n	p_nq_0
Aluminio	$ 287	$ 344.40	$ 760
Gas natl.	850	680	12 500
Petróleo	190 800	190 800	1 560 000
Platino	66 500	79 800	$ 245 000
	$258 437	$271 624.40	$1 818 260

21. Un índice de precios al consumidor está diseñado para consumidores de medio totalmente urbano, el otro para trabajadores en ambiente urbano y empleados de oficina. Ambos miden los cambios en los precios al consumidor de un periodo temporal a otro. En la actualidad el periodo base es 1982-84 y la base es 100.0.
23. Un contrato representativo entre patrones y sindicato indica que si el índice de precios al consumidor aumenta por ejemplo 0.5, los sueldos por hora deben aumentar $0.06.

CAPITULO 19 / Análisis de series de tiempo

1. a. $Y' = 800 + 30X$ (en miles de unidades).
   b. 30 000 unidades.
   c. 1 580 000 unidades, calculado por medio de 800 + 30 (26), en miles.
   d. Valores basados en el juicio de la persona que traza la recta.
3. a.



b. $y' = a + bx = 4 + 0.9x$, calculado por medio de:

$$b = \frac{9}{10} = 0.9$$

y

$$a = \frac{20}{5} = 4$$

c. 1986 = −2. Por lo tanto, $Y' = 4 + 0.9(-2) = 2.2$ (en miles). 1989 = +1. Entonces $Y' = 4 + 0.9(1) = 4.9$ (en miles).
d. Aproximadamente 10 300 toneladas, obtenido por $y' = 4 + 0.9(7) = 10.3$ (en miles).

5. a. Si se toma 1984 como año cero, la ecuación es

$$\log Y' = \log a + \log b(x) = 1.4724 + 0.1137x$$

$$\log a = \frac{\Sigma \log y}{n} = \frac{16.1945}{11} = 1.4724$$

$$\log b = \frac{\Sigma(x \log y}{\Sigma x^2} = \frac{12.5035}{110} = 0.1137$$

Año	Ventas ($ millones) Y	log Y	x	x(log Y)	x^2
1979	8.0	0.9031	−5	−4.5155	25
1980	10.4	1.0170	−4	−4.0680	16
1981	13.5	1.1303	−3	−3.3909	9
1982	17.6	1.2455	−2	−2.4910	4
1983	22.8	1.3579	−1	−1.3579	1
1984	29.3	1.4669	0	0	0
1985	39.4	1.5955	1	1.5955	1
1986	50.5	1.7032	2	3.4064	4
1987	65.0	1.8129	3	5.4387	9
1988	84.1	1.9248	4	7.6992	16
1989	109.0	2.0374	5	10.1870	25
		16.1945		12.5035	110

b.

	x	log Y'	Y'
1980	−4	1.0176	10.4
1989	5	2.0409	109.9

c. Aproximadamente 30%, calculado por medio de (antilog 0.1137) − 1 = 1.30 − 1 = 0.30.

d. Aproximadamente $313 millones, calculado por medio de

$$\log Y' = 1.4724 + 0.1137(9) = 2.4957$$

Entonces, antilog 2.4957 = 313.

7. a. Los índices estacionales trimestrales específicos usando Hall y Aldeman son:

Año	Invierno	Primavera	Verano	Otoño
1986			141.52	89.00
1987	62.87	102.43	151.19	80.26
1988	80.36	88.99	136.30	85.68
1989	86.90	98.61	134.80	86.12
1990	72.94	107.94		
Media	75.77	99.49	140.95	85.26
Típico	75.58	99.24	140.60	85.05

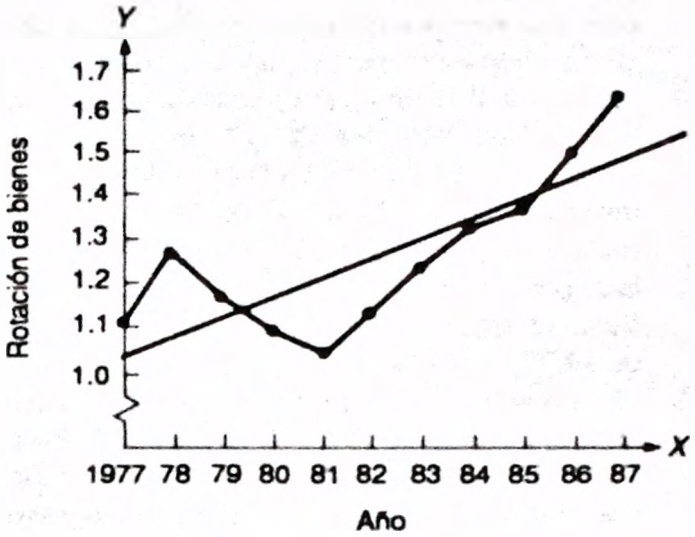
b. La producción es mayor durante el verano y menor en invierno.

9. a. $Y' = 18\,000 - 400X$, considerando que la recta empieza en 18 000 para 1970 y desciende a 10 000 para 1990.

b. 400.

c. 8 000, calculado por medio de 18 000 − 400(25).

11. a.



b.

Año	Y	x	xY	x^2
1977	1.11	−5	−5.55	25
1978	1.28	−4	−5.12	16
1979	1.17	−3	−3.51	9
1980	1.10	−2	−2.20	4
1981	1.06	−1	−1.06	1
1982	1.14	0	0	0
1983	1.24	1	1.24	1
1984	1.33	2	2.66	4
1985	1.38	3	4.14	9
1986	1.50	4	6.00	16
1987	1.65	5	8.25	25
	13.96		4.85	110

La ecuación de tendencia es $Y' = a + bx = 1.269 + 0.044x$, calculada por medio de:

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{13.96}{11} = 1.269$$

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} = \frac{4.85}{110} = 0.044$$

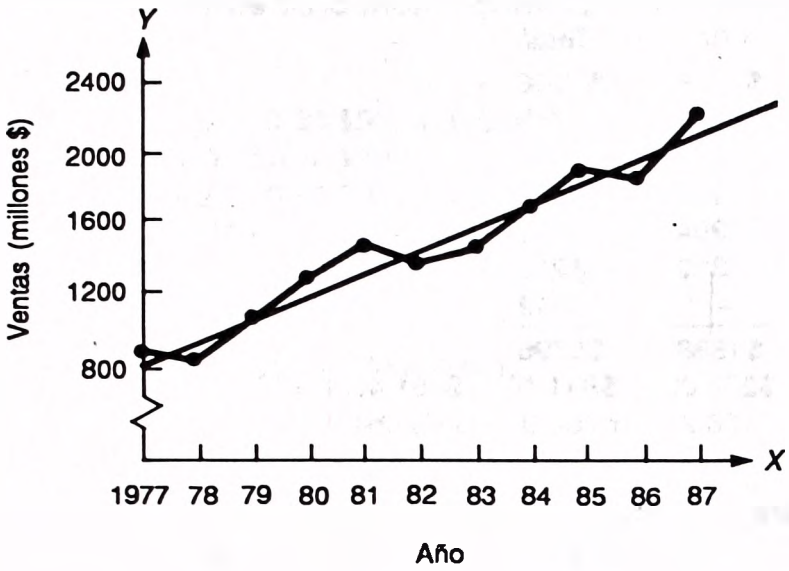
	x	Y'	
1980	−2	1.181	obtenido por: $Y' = 1.269 + 0.044(-2)$
1986	4	1.445	obtenido por: $Y' = 1.269 + 0.044(4)$

d. 1.709, calculado por medio de:

$$Y' = 1.269 + 0.044(10)$$

e. 0.044

13. a.



b. $Y' = a + bx = 1\,422 + 127.47x$

	Y	x	xY	x^2
1977	841	−5	−4 205	25
1978	829	−4	−3 316	16
1979	1 042	−3	−3 126	9
1980	1 256	−2	−2 512	4
1981	1 405	−1	−1 405	1
1982	1 314	0	0	0
1983	1 412	1	1 412	1
1984	1 660	2	3 320	4
1985	1 874	3	5 622	9
1986	1 853	4	7 412	16
1987	2 156	5	10 780	25
	15 642		13 982	110

$$a = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{15\,642}{11} = 1\,422$$

$$b = \frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} = \frac{13\,982}{110} = 127.11$$

c. Para 1979, 1 040.67. Para 1985, 1 803.33.
d. $127.11 millones.
e. $2 693.1 millones.

15. a. Julio, 44.2; agosto, 72.3; septiembre, 197.5.
b. Se eliminaron los índices superior e inferior de cada mes y se calculó la media de los índices restantes. (Al índice medio se le denomina media modificada.)

	Ene.	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sept.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*	*Total*
1985							44.2	72.3	197.5	92.1	106.5	92.9	
1986	88.9	102.9	178.9	118.2	60.1	43.1	44.0	74.0	200.9	90.0	101.9	90.9	
1987	87.6	103.7	170.2	125.9	59.4	48.6	44.2	77.2	196.5	89.6	113.2	80.6	
1988	79.9	105.6	165.8	124.7	62.1	41.7	48.2	72.1	203.6	80.2	103.0	94.2	
1989	89.0	112.1	182.9	115.1	57.6	56.9							
Medias modificadas	88.3	104.7	174.6	121.5	59.8	45.9	44.2	73.2	199.2	89.8	104.8	91.9	1197.9
Estacional típico	88.5	104.8	174.9	121.7	59.9	46.0	44.3	73.3	199.5	90.0	105.0	92.1	1200.0

El factor de corrección es 1.001753.

c. En forma representativa la producción está 74.9% por encima del promedio en marzo y 99.5 en septiembre. La producción de mayo a agosto está muy por abajo del promedio para el año.

17. Se eliminaron los índices superior e inferior para cada trimestre y se calculó la media de los índices restantes. A esto se le conoce como media modificada.

	Trimestre ($ millones)					
Año	*I*	*II*	*II*	*IV*	*Total*	
1983	$ 210	$ 180	$ 60	$ 246	$ 696	
1984	214	216	82	230	742	
1985	246	228	91	280	845	
1986	258	250	113	298	919	
1987	279	267	116	304	966	
1988	302	290	114	310	1016	
1989	321	291	—	—	612	
Total	$1830	$1722	$576	$1688	$5796	
Promedio	$261.40	$246.00	$96.00	$278.00	$881.40	$881.40/4 = $220.35
Indice	118.6	111.6	43.6	126.2	400.0	

a. Los cuatro índices trimestrales son para los años 1983–1989:
   I : 118.6
   II : 111.6
   III : 43.6
   IV : 126.2

b. Las ventas durante los trimestres 1, 2 y 4 son 18.6, 11.6 y 26.2% superiores al promedio, mientras que en el tercer trimestre están 56.4 por abajo del promedio. Las ventas del tercer trimestre son inferiores en forma significativa al promedio trimestral

19. a. La media modificada se usa para determinar el índice mensual promedio. Se podría haber utilizado la mediana o la media aritmética. Para calcular la media modificada, se eliminan los índices mensuales superior e inferior.

	Ene.	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sept.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*	
1985							91.7	96.8	95.2	100.5	117.4	187.7	
1986	68.3	69.1	91.2	92.3	98.1	99.1	89.5	97.4	96.2	97.8	116.3	184.9	
1987	69.2	68.0	90.7	92.8	97.7	94.7	88.1	98.0	93.3	103.6	121.4	180.0	
1988	72.6	73.2	88.3	90.5	99.7	90.7	88.6	99.2					
1989													
													Total
Medias modificadas	69.2	69.1	90.7	92.3	98.1	94.7	89.1	97.7	95.2	100.5	116.3	184.9	1 197.8
Estacional típico	69.3	69.2	90.9	92.5	98.3	94.9	89.3	97.9	95.4	100.7	116.5	185.2	1 200.1

El factor de corrección es 1.001831.

b. Normalmente las tiendas de departamentos tienen periodos relativamente bajos en enero y febrero, pero las ventas en diciembre están 85.2% por encima del promedio anual.

CAPITULO 20 / Introducción a la toma de decisiones bajo incertidumbre

1.

EMV(A_1) = 0.30($50) + 0.50($70) + 0.20($100) = $70
EMV(A_2) = 0.30($90) + 0.50($40) + 0.20($80) = $63
EMV(A_3) = 0.30($70) + 0.50($60) + 0.20($90) = $69

Decisión: Elegir la alternativa 1.

3.

	Pérdida de oportunidad		
	S_1	S_2	S_3
A_1	$40	$ 0	$ 0
A_2	0	30	20
A_3	20	10	10

5.

EOL(A_1) = 0.30($40) + 0.50($0) + 0.20($0) = $12
EOL(A_2) = 0.30($0) + 0.50($30) + 0.20($20) = $19
EOL(A_3) = 0.30($20) + 0.50($10) + 0.20($10) = $13

7. El valor esperado bajo condiciones de incertidumbre es $82, calculado por medio de 0.30 ($90) + 0.50 ($70) + 0.20 ($100) = $82

EVPI = $82 − $70 = $12

9. Sí, cambia la decisión. Se elige la alternativa 2.

EMV(A_1) = 0.50($50) + 0.20($70) + 0.30($100) = $69
EMV(A_2) = 0.50($90) + 0.20($40) + 0.30($80) = $77
EMV(A_3) = 0.50($70) + 0.20($60) + 0.30($90) = $74

11. a

EMV(ninguno) = 0.30($0) + 0.50($0) + 0.20($0) = $0
EMV(1) = 0.30($125) + 0.50($65) + 0.20($30) = $76.00
EMV(2) = 0.30($105) + 0.50($60) + 0.20($30) = $67.50
EMV(ambos) = 0.30($220) + 0.50($110) + 0.20($40) = $129.00

b. Elegir ambos.

c.

	Pérdida de oportunidad		
	S_1	S_2	S_3
Ninguno	$220	$110	$40
1	95	45	10
2	115	50	10
Ambos	0	0	0

d.

EOL(ninguno) = 0.30($220) + 0.50($110) + 0.20($40) = $129.00
EOL(1) = 0.30($95) + 0.50($45) + 0.20($10) = $53.00
EOL(2) = 0.30($115) + 0.50($50) + 0.20($10) = $61.50
EOL(ambos) = 0.30($0) + 0.50($0) + 0.20($0) = $0

e. EVPI = $0, obtenido por $129 − $129.

Certeza = 0.30($220) + 0.50($110) + 0.20($40) = $129

13. a.

	Evento				
Acto	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
10	$500	$500	$500	$500	$500
11	200	550	550	550	550
12	−100	250	600	600	600
13	−400	−50	300	650	650
14	−700	−350	0	350	700

b.

Acto	*Utilidad esperada*
10	$500.00
11	504.50
12	421.50
13	233.50
14	−31.50

Se ordenan 11 casas móviles porque la ganancia esperada de $504.50 es la más elevada.

c.

	Pérdida de oportunidad				
Oferta	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
10	$ 0	$ 50	$100	$150	$200
11	300	0	50	100	150
12	600	300	0	50	100
13	900	600	300	0	50
14	1 200	900	600	300	0

d.

	Acto				
	10	*11*	*12*	*13*	*14*
Pérdida de oportunidad esperada	$95.50	$91	$174	$362	$627

Decisión: Ordenar 11 casas porque la pérdida de oportunidad de $91 es la menor.

e. $91, calculado por medio de:

$595.50	utilidad bajo certeza
−504.50	utilidad bajo incertidumbre
$ 91.00	valor de información perfecta

15. a

	Evento					
Acto	*41*	*42*	*43*	*44*	*45*	*46*
41	$410	$410	$410	$410	$410	$410
42	405	420	420	420	420	420
43	400	415	430	430	430	430
44	395	410	425	440	440	440
45	390	405	420	435	450	450
46	385	400	415	430	445	460

b.

Acto	*Utilidad esperada*
41	$410.00
42	419.10
43	426.70
44	432.20
45	431.70
46	427.45

c Ordenar 44, porque $432.20 es la mayor ganancia esperada.

d. Pérdida de oportunidad esperada:

41	*42*	*43*	*44*	*45*	*46*
$28.30	$19.20	$11.60	$6.10	$6.60	$10.85

e. Ordenar 44, porque la pérdida de oportunidad de $6.10 es la menor. Sí, coincide.

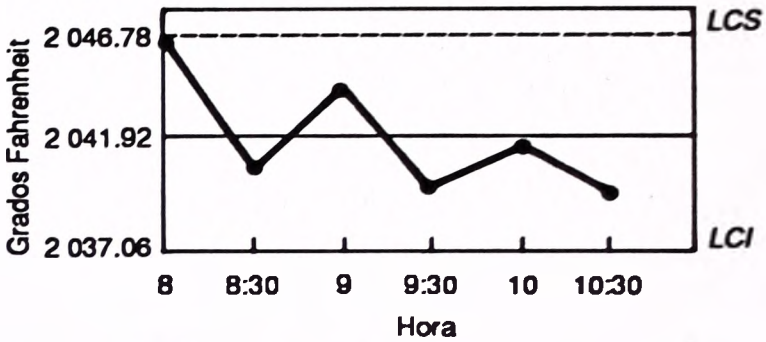
f. $6.10, calculado por medio de:

$438.30	utilidad bajo certeza
−432.20	utilidad bajo incertidumbre
$ 6.10	valor de información perfecta

El máximo que debería pagarse por información perfecta es $6.10.

CAPITULO 21 / Control estadístico de calidad

1. a.



Hora	$\overline{X}$, *Medias aritméticas*	*Amplitud R*
8:00 A.M.	46	16
8:30 A.M.	40.5	6
9:00 A.M.	44	6
9:30 A.M.	40	2
10:00 A.M.	41.5	9
10:30 A.M.	39.5	1
	251.5	40

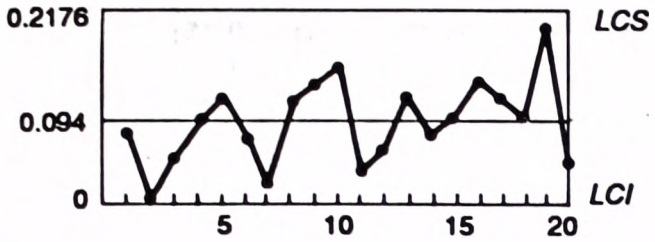
$$\text{LCS} = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$$
$$= 41.92 + 0.729(6.67)$$
$$= 46.78$$
$$\text{LCI} = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$$
$$= 41.92 + 0.729(6.67)$$
$$= 37.06$$

b. Interpretando, la lectura promedio fue 2 041.92 grados Fahrenheit. Si el horno sigue operando según lo indican las lecturas para las primeras seis horas, aproximadamente el 99.7% de las lecturas promedio estarán entre 2 037.6 y 2 046.78 grados.

3. a. El porcentaje de defectos para las 20 muestras es:

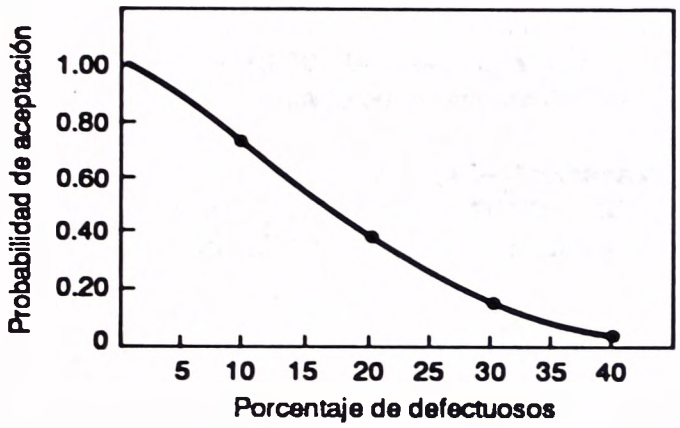
1.	0.08	6.	0.08	11.	0.04	16.	0.14
2.	0.00	7.	0.02	12.	0.06	17.	0.12
3.	0.06	8.	0.12	13.	0.12	18.	0.10
4.	0.10	9.	0.14	14.	0.08	19.	0.20
5.	0.12	10.	0.16	15.	0.10	20.	0.04

$$\overline{p} = 1.88/20 = 0.094$$
$$\text{LCI} = 0.094 - 3\sqrt{\frac{0.094(0.906)}{50}}$$
$$= 0$$
$$\text{LCS} = 0.094 + 3\sqrt{\frac{0.94(0.906)}{50}}$$
$$= 0.2176$$



b. El porcentaje de pernos defectuosos es 9.4. Aproximadamente el 99.7 de las verificaciones revelarán un porcentaje de defectos entre 0 y 21.76.

5. $P(X \leq 1 \mid n = 10, p = 0.10) = 0.736$
$P(X \leq 1 \mid n = 10, p = 0.20) = 0.376$
$P(X \leq 1 \mid n = 10, p = 0.30) = 0.149$
$P(X \leq 1 \mid n = 10, p = 0.40) = 0.046$



7. Para la gráfica media: linea central = 45.2; LCS = 54.3; LCI = 36.1. Límites de control calculados por medio de $\overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R} = 45.2 \pm 0.729(12.5)$. El factor A_2 se tomó del apéndice L. Para la gráfica de intervalo: linea central = 12.5; LCS = 28.5; LCI = 0. Límites de control calculados por medio de:

$$D_4\overline{R} = 2.282(12.5)$$
$$D_3\overline{R} = (0)(12.5)$$

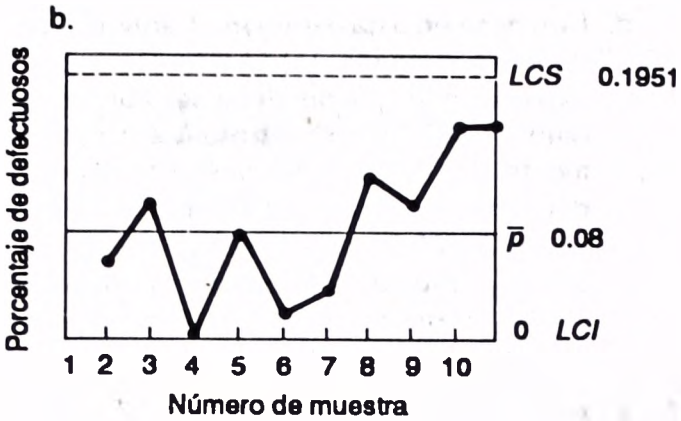
Ambos factores se tomaron del apéndice L.

9. a. $$\overline{p} = \frac{0.80}{10} = 0.8$$

Para obtener LCS y LCI:

$$0.08 \pm 3\sqrt{\frac{(0.08)(0.92)}{50}}$$
$$0.08 \pm 3(0.038)$$
$$\text{LCS} = 0.1951$$
$$\text{LCI} = 0$$

b.



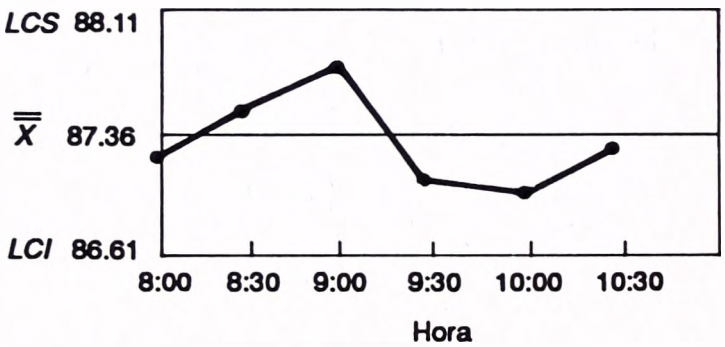
c. Los límites de control superior e inferior indican que el 99.73% del porcentaje de defectos estará entre 0 y 19.51, con un promedio de 8%.

11. a y b.

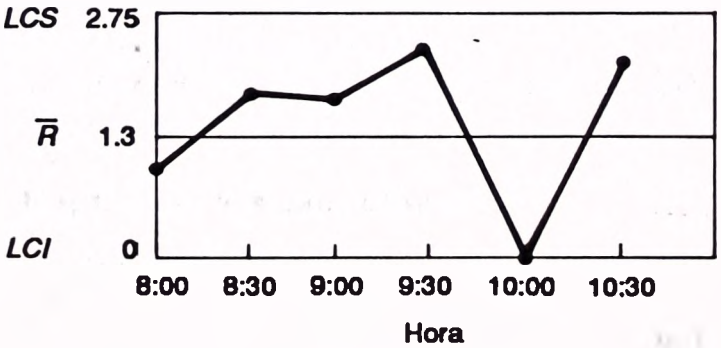
Hora	$\overline{X}$	$\overline{R}$
8.00	87.26	0.9
8.30	87.58	1.6
9.00	87.72	1.5
9.30	87.18	2.0
10.00	87.10	0.0
10.30	87.34	1.8

$\overline{\overline{X}} = 87.36$
$\overline{R} = 1.3$

$$\text{LCS y LCI} = \overline{\overline{X}} \pm A_2\overline{R} = 87.36 \pm 0.577(1.3)$$
$$= 87.36 \pm 0.75 = 88.11 \text{ y } 86.61$$



c. $$\text{LCS} = D_4\overline{R} = 2.115(1.3) = 2.75$$
$$\text{LCI} = D_3\overline{R} = 0(1.3) = 0$$



d. Con base en esta experiencia anterior con la nueva máquina: (1) El diámetro medio exterior de las piezas debe ser aproximadamente 87.36 milímetros. Aproximadamente el 99.97% de las muestras debería dar como resultado una media en el intervalo entre 86.61 y 88.11 milímetros. (2) La amplitud media de las muestras debería ser 1.3 milímetros, y 99.7% de las amplitudes debería estar entre 0 y 2.75 milímetros.

13. a. $P(X \leq 2 | n = 25, p = 0.10) = 0.537$
$P(X \leq 2 | n = 25, p = 0.20) = 0.098$
$P(X \leq 2 | n = 25, p = 0.30) = 0.009$

b. $P(X \leq 2 | n = 25, p = 0.15) =$
$0.172 + 0.759 + 0.1607$
$= 0.2538$

c. $P(X \leq 2 | n = 25, p = 0.05) =$
$0.2774 + 0.3650 + 0.2305$
$= 0.8729$

La probabilidad (0.8729) es un poco menor a la deseada (0.90). (Nota: Para las partes b y c se requiere una tabla más amplia o algún sistema de computadora como MINITAB).

Ejercicios impares de repaso de los capítulos

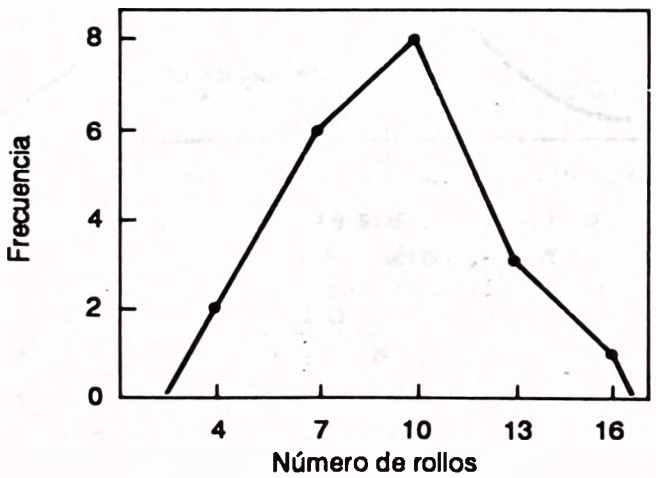
Repaso de los capítulos 1 - 4

1. a. Muestra.
   b. Razón.
   c. $6.80, calculado por medio de $34 / 5.
   d. $6.70. La mitad de las tasas están por encima de $6.70 y la mitad por abajo.
   e. 5.835, calculado por medio de 23.34/(5 − 1).
   f. 0.124, obtenido por: 3(X − Mediana)/s = 3($6.80 − $6.70)/s = 3($6.80 − $6.70)/2.4155745. Un ligero sesgo positivo.

3. a.

Número de rollos	*Frecuencia*
3–5	2
6–8	6
9–11	8
12–14	3
15–17	1
	20

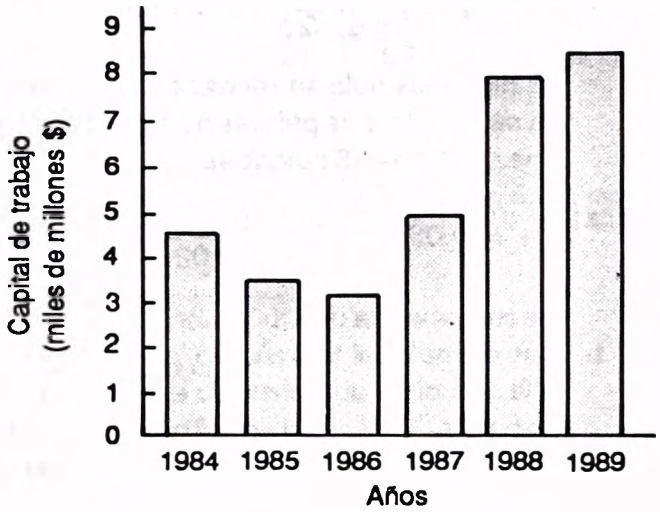
   b.



   c. 9.3 rollos, calculado por medio de 186/20 (usando los datos en bruto).
   d. 9.
   e. Bimodal: 8 y 9.
   f. 13, calculado por medio de 16 − 3.
   g. 9.274, obtenido por 176.2/(20 − 1).
   h. 3.045 rollos, calculado por medio de $\sqrt{9.274}$.
   i. 3.21 y 15.39 rollos, calculado por medio de 9.3 ± 2(3.045).

5. a. 8.82%, calculado por medio de 44.1/5.
   b. 7.48%.
   c. La media geométrica, ya que es más conservadora. En el caso de la media, se ve llevada hacia arriba por 19.5.

7.



9. Ordinal.
11. Polígono de frecuencias acumulada menos de; 45; 35; 10; 5; 35.
13. 9.375, calculado por medio de ($6/$64)(100).
15. Coeficiente de variación.
17. 92 y 108, calculados por medio de 100 ± 2(4).
19. Las respuestas varían.

Repaso de los capítulos 5 - 7

1. Subjetiva.
3. Evento.

5. Regla del complemento; $1 - P(X)$; 0.999.
7. Discreta.
9. Discreta.
11. En forma de campana, simétrica, asintótica.
13. a. 0.10, calculado por medio de 20/200.
    b. 0.725, calculado por medio de 145/200.
    c. 0.925, calculado por medio de 1 − 0.075.
15. a. 0.1353, del apéndice C y una μ de 2.0.
    b. 0.54, calculado por medio de 0.1353 × 400.
    c. 0.3232, calculado por medio de 0.1804 + 0.0902 + . . . + 0.0002.

Repaso de los capítulos 8 - 10

1. b.
3. c.
5. d.
7. e.
9. a.
11.

$$H_0: \mu = 36$$
$$H_1: \mu < 36$$

Se rechaza H_0 si el valor calculado para z es menor que −1.645.

$$z = \frac{35.5 - 36}{0.9/\sqrt{42}} = -3.60$$

La hipótesis nula se rechaza y la alternativa se acepta. Las pelotas no rebotan hasta una media de 36 pulgadas.

13. a.

$$n = 0.05(1 - 0.05)\left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 456.19$$

Se recomienda una muestra de 457.

b. Por ejemplo, el tamaño de la muestra podría reducirse aumentando el nivel de confianza a 10%. El tamaño de muestra también podría reducirse al aumentar el error permitido.

15. a. Si población 1 se refiere a Cartersville,

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

b. Esta es una prueba de dos colas, porque no se especifica dirección.

c.

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$$

d. Se rechaza H_0 si $z < -1.96$ o $z > 1.96$.

e.

$$z = \frac{8.40 - 8.50}{\sqrt{\frac{(0.60)^2}{180} + \frac{(030)^2}{200}}} = \frac{-0.1}{0.0495} = 2.02$$

Se rechaza H_0. No hay diferencia en los sueldos promedio.

Repaso de los capítulos 11 y 12

1. b.
3. a.
5. d.
7. e. $H_1: \mu > \$80$.
9. b, porque 1.90 se encuentra más allá de 1.725.
11. e. Es 5.57. $k - 1 = 3 - 1 = 2$ grados de libertad en el numerador; $N - k = 28 - 3 = 25$ grados de libertad en el denominador. Consulte el apéndice G, nivel 0.01.
13. H_0: $\mu = 20$. H_1: $\mu > 20$. La t calculada es 0.485. El valor crítico de t para $n - 1 = 9 - 1 = 8$ grados de libertad es 1.860. Se acepta H_0. Los cálculos para t y s son:

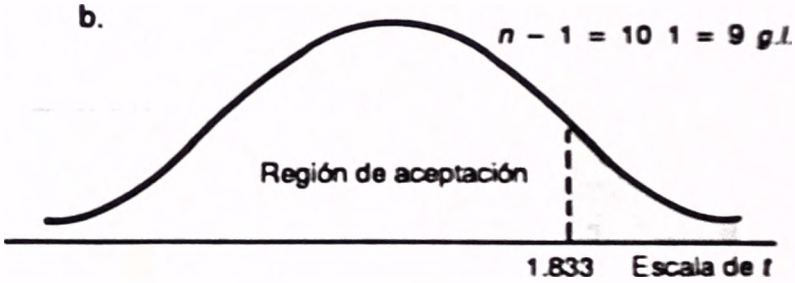
$$t = \frac{21 - 20}{6.18/\sqrt{9}} = \frac{1}{2.06} = 0.485$$

$$s = \sqrt{\frac{306}{9 - 1}} = 6.18$$

$$\overline{X} = 189/9 = 21$$

15. a. H_0: $\mu_d = 0$ (no hay diferencia). Las diferencias son positivas H_1: $\mu_d > 0$.

b.



c. La t calculada es igual a 0.21, calculada por medio de:

$$\frac{0.4}{6.11/\sqrt{10}}$$

y

$$s + \sqrt{\frac{338 - \frac{(0.4)^2}{10}}{10 - 1}} = 6.11$$

Se acepta H_0 porque 0.21 es menor que 1.833. Aditiva, no efectiva.

17. a. (1) H_0: Las medias de tratamiento son iguales.
H_1: Las medias de tratamiento no son iguales.
(2) H_0: Las medias de bloque son iguales.
H_1: Las medias de bloque no son iguales.
b. (1) 3.84 para tratamientos obtenidos por 4 en el numerador, 8 en el denominador, nivel 0.05
(2) 4.46 para bloques, obtenido por 2 en el numerador, 8 en el denominador, nivel 0.05.
c. (1) Se rechaza H_0 para tratamientos porque para la F calculada 11.1 > 3.84.
(2) Se acepta H_0 para bloques porque 3.05 < 4.46.

$$F(\text{Tratamientos}) = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{41.43}{3.73} = 11.1$$

$$F(\text{Bloques}) = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{11.4}{3.73} = 3.05$$

d. (1) Existe diferencia en los rendimientos de los cinco tipos de fertilizantes.
(2) No hay diferencia en los rendimientos con respecto al tipo de suelo. Los fertilizantes son igualmente efectivos.

Repaso de los capítulos 13 - 15

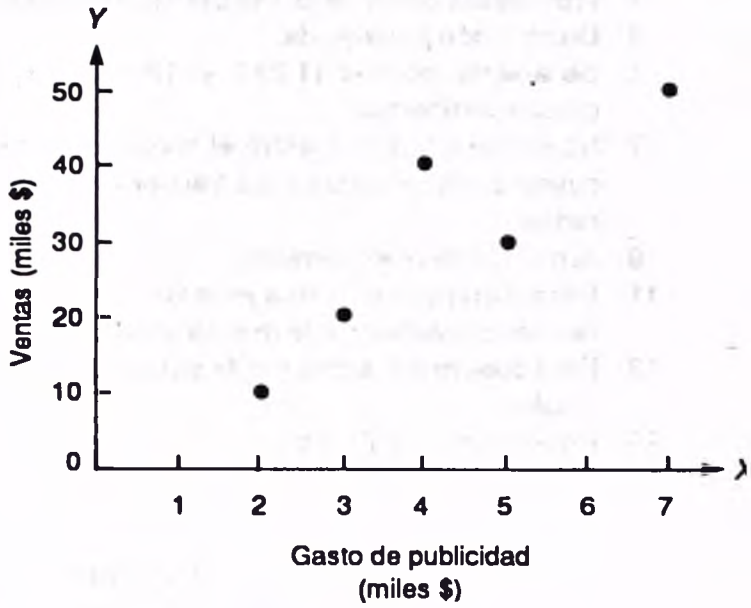
1. Coeficiente de determinación o coeficiente de correlación.
3. H_0: $\rho = 0$, H_1: $\rho \neq 0$. H_0 se rechaza si $z < -1.96$ o $z > 1.96$, usando un nivel de significación de 0.05.

$$z = \frac{r}{1/\sqrt{n-1}} = \frac{0.40}{1/\sqrt{60-1}} = 3.07$$

Se rechaza H_0. Existe correlación entre la población.

5. En el método por pasos, se introducen variables independientes en el orden en que aumenten más rápido R^2.
7. $Y' = a + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4$
9. Si $R = 0.86$ entonces $R^2 = (0.86)^2 = 0.7376$. Casi 74% de la variación en la ganancia neta se explica por las cuatro variables independientes.

11. a.



Y	X	X^2	XY	Y^2
10	2	4	20	100
40	4	16	160	1 600
30	5	25	150	900
50	7	49	350	2 500
20	3	9	60	400
150	21	103	740	5 500

b.

$$r = \frac{5(740) - (21)(150)}{\sqrt{[5(103) - (21)^2]\,[5(5\,500) - (150)^2]}}$$

$$= \frac{550}{\sqrt{(74)(5\,000)}}$$

$$= 0.904$$

c. $R^2 = (904)^2 = 0.82$; $1 - R^2 = 1 - 0.82 = 0.18$.

d. $$b = \frac{5(740) - (21)(150)}{5(103) - (21)^2} = \frac{550}{74} = 7.4324$$

$$a = \frac{150 - 7.4324(21)}{5} = -1.2161$$

$$Y' = -1.2161 + 7.4324\,X$$

e. $Y' = -1.2161 + 7.4324(4.5) = 32.2297$

f. Existe una fuerte asociación positiva entre las ventas y el gasto en publicidad. Además, un incremento de $1 000 en publicidad dará como resultado un incremento de $7 432 en las ventas.

Repaso de los capítulos 16 y 17

1. Frecuencia observada, frecuencia esperada.
3. Distribución ji cuadrada.
5. Se acepta, porque 11.248 < 12.592. Hay 6 grados de libertad.
7. No existe diferencia entre el conjunto de frecuencias observadas y las frecuencias esperadas.
9. Al menos de nivel nominal.
11. Para determinar si dos muestras independientes provienen de la misma población.
13. Para determinar si tres o más poblaciones son iguales.
15. Prueba Kruskal-Wallis.
17. Sí.
19. No. Tiene sesgo positivo.
21. Ejemplo:

H_0: Mediana del sueldo inicial de los contadores = \$27 000
H_1: Mediana ≠ \$27 000

Use el nivel 0.05. Aplique la prueba del signo. Esta es una prueba de dos colas, de manera que los valores críticos son +1.96 y −1.96. Cuente el número de valores por encima y por abajo de la mediana. Calcule z. Rechace H_0 si $z > 1.96$ o si $z < -1.96$. En caso contrario, acepte H_0. Esto es considerando que la muestra es grande.

INDICE

A

Actos, 771
Ajustes del costo de la vida, 710
Amplitud total, 121-22, 132-33
Análisis de
  correlación simple
    coeficiente de correlación, 497-500, 503-5
    coeficiente de determinación, 502, 548-52
    coeficiente de no determinación, 502
    diagrama de dispersión, 495-97
  regresión
    múltiple, 564-90
    simple, 530-44
      consideraciones, 542-44
      ecuación de regresión, 531-32
      error estándar de estimación, 539-42
      estimación de intervalos de confianza, 544
      principio de mínimos cuadrados, 532-35
  sensibilidad, 780-82
  series de tiempo
    estimación, 733-36
    método
      del promedio móvil, 736-41
      de mínimos cuadrados, 729-36
    tendencia
      no lineal, 741-45
      secular, 724
    variación
      cíclica, 726
      estacional, 726-27, 745-54
      irregular, 727
  variancia (ANOVA)
    ANOVA en un sentido, 454-69
    consideraciones, 456
    distribución *F*, 450-51
    grados de libertad, 457
ANOVA en dos sentidos, 470-75
Aproximación normal a la binomial, 83-84
Arboles de decisión, 782-84
Arreglo, 25
Asintótico, 268

B

Bayes, Thomas, 198

C

Clases de extremo abierto, 32
Coeficiente de
  correlación, 497-500, 503-5
    de rango-orden, 507-12, 514-15
  determinación del, 502, 548-51
  no determinación del, 502-3
  sesgo, 149-50
  variación, 147-49

Combinaciones, 208-10
Concepto probabilístico de frecuencia relativa, 180
Control de calidad
  causas de variación, 798-801
  diagrama de
    amplitudes, 807-9
    barras *C*, 815-18
    medias, 804-7
    porcentaje de defectuosos, 811-14
  muestreo de aceptación, 818-23
  tabla, 863
Correlación de rango
  análisis, 507-12
  prueba de la significación de *r*, 514-17
  tabla, 861
Corrimiento de la base, 710-12
Curtosis, 152
Curva
  característica de operación, 384
  de poder, 385
  normal, 268-83

D

Datos estacionalizados, 754
Desviación
  entre cuartiles, 143
  estándar, 126
    de la muestra, 126
    poblacional, 128-29
  media
    cálculo, 123-25
    definición, 123
Diagrama de
  árbol, 194-97, 199
  dispersión, 495-97
  medias, 804-9
  porcentaje de defectuosos, 811-14
  Venn, 184-87
Dispersión, medidas de
  amplitud total, 121-22, 132-33
  desviación
    cuartílica, 143
    estándar, 126, 133-36
    media, 123-25
  distancia entre
    cuartiles, 140-43
    porcentiles, 144-46
  medidas relativas, 146-47
  relativa, 146-49
  variancia, 126-31
Distancia entre
  cuartiles, 140-43
  porcentiles, 144-46
Distribución
  bimodal, 99
  de frecuencias
    acumuladas, 46
    arreglo, 25
    de clase, 27
    elaboración, 24-26, 30-32
    histograma, 40-42
    intervalo de clase, 29
    límites de clase
      declarados, 28-29
      verdaderos, 28-29
    puntos medios, 29
    relativas, 32-34
    representación de "tallo y hoja", 35-39
  de polígono de frecuencias, 42-45
    acumuladas, 46-51
  de sesgo
    negativo, 103
    positivo, 102
  F, 450- 53
  hipergeométrica, 247-51
  muestral de medias, 318-24
  probabilística, 224-26
    binomial
      acumulativa, 244-47
      análisis, 244-47
      características, 231-33
      elaboración, 233-36
      tabla, 236, 239, 835-53
    de Poisson
      análisis, 251-55
      tabla, 854-55
    discreta
      binomial, 231-44
      de Poisson, 251-55
      hipergeométrica, 247-51
    normal
      áreas bajo la curva, 271-73
      características, 268-69

estándar, 273-83
tabla, 854
simétrica, 101
t
características, 420-22
prueba para
la diferencia entre dos medias, 430-32
la media poblacional, 422-28
observaciones por pares, 434-39
tabla, 858

E

Error
de muestreo, 317-18
estándar de la media, 331-32
Errores
Tipo I, 362-63
Tipo II, 363, 380-85
Espacio muestral, 184
Estadística
definición, 4-5
descriptiva, definición, 8-9
inductiva, 9
inferencial, 9, 11
Estados de la naturaleza, 771
Estimación
de intervalo, 329-30
puntual, 327-29
Estimador combinado, 402
Estrategia maximín, 778
Evaluación de los coeficientes individuales de regresión, 580-82
Evento, 175-77
Exhaustivo, definición de, 13
Experimento, 175

F

Factor de corrección de continuidad, 284-87
Fórmula de la multiplicación, 202-204
Frecuencias de clase, 27

G

Ganancias, 772
esperadas, 772-75
Gossett, William S., 420
Grados de libertad, 424, 457
Gráfica
de barras, 52-58
bidireccionales, 57
C, 815-18
seccionadas, 55-57
de línea, 52-53
de sectores, 58-61
simple de
barras, 52-55
líneas, 52-53

H

Hipótesis
alternativa, 360-61
nula, 360-61
prueba de, *véase* Prueba de una hipótesis
Histograma, 40
Homoscedasticidad, 589

I

Indice
de precios, 691, 695-700
al consumidor, 705-12
corrimiento de la base, 710-11
de cantidad, 691, 698-99
véase también Números de índice
de valor, 691, 700-702
ingreso real, 706-7
no ponderado, 692-94
Paasche, 699-700
para uso especial, 703-4
poder adquisitivo del dinero, 708
ponderado, 694-700
de valor, 691, 700-701
estacional representativo, 745
para uso especial, 703-4
ponderado, 694-700
Inferencia estadística, *véase* Estadística inferencial
Ingreso real, 706-7

Intervalo
de clase, 29
de confianza, 332-36, 544

J

Ji cuadrada
características, 617-18
limitaciones, 622-23
prueba de bondad de ajuste
frecuencias esperadas
desiguales, 618-21
iguales, 612-17
tablas de contingencia, 625-31

K

Kruskal, W.H., 658

L

Leptocúrtica, 152
Límites de clase
declarados, 28
verdaderos 28-29

M

Marca de clase, 29
Matriz de correlación, 577
Media
aritmética
cálculo, 77-81, 93-94
definición, 77
propiedades, 79-81
de una muestra, 76
de una población, 78
geométrica
cálculo, 89-92
definición, 89
ponderada, 81-83
Mediana
cálculo, 84
definición, 83
propiedades, 86
Medición
de intervalo, nivel de, 14
de nivel
de razón, 15
nominal, 12
ordinal, 13
Mesocúrtica, 152
Método
del promedio móvil, 736-41
de mínimos cuadrados, 729-36
no probabilístico, 309
MINITAB, 16, 38, 42, 88, 237-39, 286-87, 325, 428, 432, 466, 505-7, 511, 573-74, 621, 752-53
Moda
cálculo, 87
definición, 86
desventajas, 87
Muestra
definición, 9
estratificada, 315-16
probabilística, 309
Muestreo
aleatorio simple, 309-12
de aceptación, 818-23
distribución muestral de medias, 318-22
error, 317-18
estándar de la media, 331-32
estimación
de intervalo, 329-31
puntual, 327
estratificado, 315-16
factor de corrección de población finita, 336-38
intervalos de confianza, 332-36
no probabilístico, 309
por conglomerados, 316-17
por panel, 309
probabilístico, 309
razones para el, 306-7
sistemático, 313-14
tamaño, 338-44
teorema del límite central, 324-27
Mutuamente excluyente, definición, 13

N

Nivel de medición
de intervalo, 14
de razón, 15
de significación, 361-63
nominal, 12

ordinal, 13
Números
aleatorios
tabla de, 857
uso en muestreo, 310-11
de índice
ajustes del costo de la vida, 710
definición, 688-91
deflación de las ventas, 707-8
de precios al consumidor, 705-12
tipo Laspeyres, 695-99
tipo Paasche, 699-700

O

Ojiva, 46

P

Papel cuadriculado, 52
Parámetro, definición, 78
Pérdida
de oportunidad, 775-76
esperada de oportunidad, 776-78
Permutación, 204-7
Platicúrtica, 152
Población
definición, 9
finita, 336
infinita, 336
Poder adquisitivo del dinero, 708
Poisson, Simeon, 251
Polígono
acumulado mayor que, 48
de frecuencias, 42-45
acumuladas, 46
"menos de", 46-48
Porcentiles, 144
Probabilidad
concepto de frecuencia relativa, 180
condicional, 194-95
conjunta, 188
definición, 175
diagramas
de árbol, 194-97
de Venn, 184-85
enfoque clásico, 178
evento, 175
regla de(I)
adición, 183-84, 187-89
complemento, 185
multiplicación, 189-94
subjetiva, 181
Programa de regresión por pasos, 584-86
Promedio, *véase* Tendencia central, medidas de
Proporciones
estimación por puntos, 327
intervalo de confianza, 332-36
tamaño de muestra, 343-45
Prueba
de bondad de ajuste, 612-21
de diferencias por pares, 434-37
de dos colas, 368-71
de hipótesis
alternativa, 360-61
de dos colas, 366-71
de una cola, 365-67
definición, 358
estadístico de prueba, 363
nivel de significación, 361-63
nula, 360-61
proporción, 394-99
regla de decisión, 364
valor crítico, 365
de Kruskal-Wallis, 658-66
de la mediana, 649-51
de significación de
rho, 504
r^2, 514-15
de signo, 640-49
de una cola, 365-67
de una hipótesis con respecto a la mediana, 649-51
de validez de un modelo de regresión múltiple, 577-79
de Wilcoxon de rangos con signo
análisis, 666-72
tabla, 864
no paramétrica
de la mediana, 649
de signo, 640-49
de Wilcoxon, 666-72
ji cuadrada, 617-31
Kruskal-Wallis, 658-66
U de Mann-Whitney, 651-57

U de Mann-Whitney
muestras
grandes, 656-57
pequeñas, 651-55
tabla, 863
Punto
medio, 29
muestral, 327-29

R

Regla
de adición, 183-84, 187-89
de probabilidad, 183-84, 187-89
de decisión en prueba de hipótesis, 364-65
del complemento, 185-86
de multiplicación, 189-94
empírica
cálculo, 138-39
definición, 138
especial
de adición, 183-84
de multiplicación, 189-91
general
de adición, 187-89
de multiplicación, 191-94
normal, *véase* Regla empírica
Regresión y correlación múltiples
análisis de residuos, 586
coeficiente de
correlación, 572
determinación, 572-73
no determinación, 573
consideraciones de, 571-72
ecuación de regresión, 564-69
matriz de correlación, 577
por pasos, 584-86
prueba global, 577
variables cualitativas, 582-84
Representación de "tallo y hoja", 35
Representación gráfica
de barras bidireccionales, 57-582
de barras seccionadas, 55-57
de sectores, 58-61
en papel cuadriculado, 52
simple de barras, 52-55
simple de líneas, 52-55
Rho de Spearman, *véase* Correlación de rango
Riesgo del
consumidor, 820
productor, 820

S

Selección del tamaño de la muestra, 338-43
Sesgo, 101-103, 149-51, 309
Spearman, Charles, 507
Statistical Package for the Social Sciences (SPSS-X), 151-52

T

t de Student; *véase* Distribución *t*
Tabla de
contingencia, 625-30
control, *véase* Control de calidad
ganancias, 772
la distribución probabilística acumulativa, 845-53
la muestra, 338-44
números aleatorios, 857
Tendencia
central, medidas de
media aritmética, 76-78, 93-95
media geométrica, 89-92
mediana, 83-86, 98-101
media ponderada, 81-83
lineal, 727-29
logarítmica en línea recta, 741-45
no lineal, 641-45
secular, 724
Teorema de
Bayes, 198-202
Chebyshev
cálculo, 137
definición, 137
Toma de decisiones
análisis de sensibilidad, 780-82
árboles de decisión, 782-84
estrategia maximín, 778
ganancias esperadas, 772-75
pérdida
de oportunidad, 775-76
esperada de oportunidad, 776-78

tabla de ganancias, 772
valor de la información perfecta, 779-80
Tratamiento, 454

V

Valor
crítico, 365
de la información perfecta, 779-80
P, 436, 581, 582,
z, definición, 274
Variable
aleatoria
continua, 227
discreta, 227
dependiente, 496, 530, 564
independiente, 496, 530, 564
Variación
cíclica, 726
estacional, 726-27, 745-54
explicada, 502, 572-73
irregular, 727
no explicada, 502, 572-73
Variancia
cálculo, 126
definición, 126
en un sentido, Análisis de; *véase* Análisis de variancia
muestral, 126
Ventas deflactadas, 754

W

Wallis, W.A., 658
Wilcoxon, Frank, 666

E14/E1/R2/95

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 1995. Publicada por ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. Apartado Postal 7-1032, 06700, México, D.F. La impresión y encuadernación se realizaron en ENCUADERNACION TECNICA EDITORIAL, S.A., Calz. San Lorenzo 279-45, Col. Granjas Estrella, 09880, México, D.F., el tiro fue de 2 000 ejemplares.

Esta es la traducción de la 7a. edición en inglés de *Statistical Techniques in Business and Economics*. El libro incluye todos los temas que se imparten en un curso inicial de Estadística y algunos otros que no se analizan en otros textos, como son Control Estadístico de la Calidad y Muestreo de Aceptación que se presentan debido a su importancia actual en las empresas.

El texto está orientado a las aplicaciones de la Estadística y, sobre todo, se escribió para personas no especializadas en matemáticas.

Algunas características de cada capítulo:

- Problemas de Autoexamen, diseñados para dar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con problemas semejantes a los ejemplos. Al final de cada uno se proporcionan las respuestas y métodos de solución de los problemas propuestos.
- Un Examen donde se abarca todo el material del mismo, cuyas preguntas permiten a los estudiantes evaluar su comprensión general del tema tratado.
  Las respuestas y métodos de solución también se dan al final del mismo.
- Después del análisis de cada concepto hay por lo menos un ejemplo y su solución.
- Las definiciones y fórmulas se destacan en recuadros.

Para mostrar las aplicaciones de las computadoras en la solución de problemas y en el análisis de datos, se incluyen más de 50 listados de computadora.

Foto de la cubierta: THE IMAGE BANK MEXICO/Gary Crallé

9 789686 223712

ISBN 968-6223-71-1